

DÉNOMBREMENT DES 2-ARBRES k -GONAUX SELON LA TAILLE ET LE PÉRIMÈTRE

GILBERT LABELLE, CÉDRIC LAMATHE ET PIERRE LEROUX

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous nous intéressons au dénombrement étiqueté et non étiqueté des 2-arbres k -gonaux par rapport à leur taille et à leur périmètre, à savoir, le nombre de k -gones et d'arêtes externes (de degré un) du 2-arbre, respectivement. Cette famille de 2-arbres est une variante des 2-arbres (libres) dans laquelle on a remplacé les triangles par des polygones à k -côtés, appelés k -gones. On s'attache à donner des formules énumératives explicites dans le cas étiqueté et des formules de récurrence ou des séries génératrices explicites pour le cas non étiqueté.

ABSTRACT. In this paper, we deal with the labelled and unlabelled enumeration of k -gonal 2-trees according to their size and their perimeter, that is, the number of k -gons and of external edges (of degree one) of the structure, respectively. This class of 2-trees is a generalization of (free) 2-trees in which triangles have been replaced by k -sided polygons, called k -gons. We give explicit formulas for the labelled case and recursive formulas or explicit generating series in the unlabelled case.

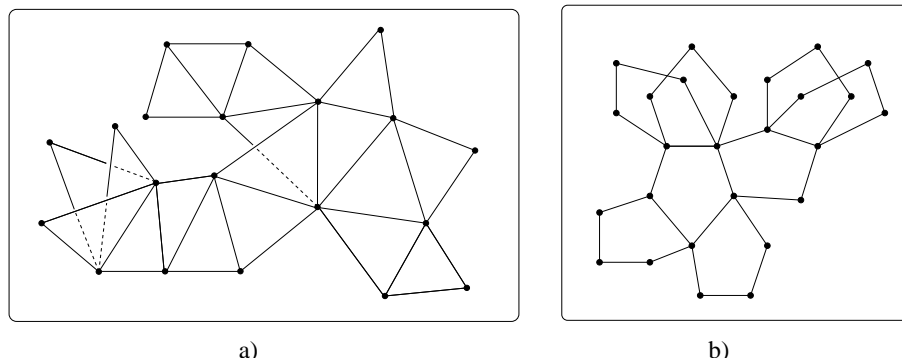
1. Introduction. On définit récursivement l'espèce a des 2-arbres (*arbres bidimensionnels*) comme étant la plus petite classe de graphes simples telle que :

1. une arête seule fait partie de a ;
2. si un graphe simple G possède un sommet, noté x , de degré 2 dont les voisins sont adjacents et tel que le graphe $G - x$ obtenu à partir de G en enlevant le sommet x et les arêtes incidentes à x est dans a , alors G appartient à a .

De façon plus concrète, un 2-arbre est essentiellement un graphe simple connexe constitué de triangles qui sont liés entre eux selon les arêtes de manière arborescente, c'est-à-dire, sans former de cycle de triangles.

Les 2-arbres présentent de nombreuses propriétés remarquables. Notons par exemple que les 2-arbres forment une famille de graphes simples qui sont uniquement tricolorables. Cela signifie que tout 2-arbre peut être coloré de façon propre (deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur) de manière unique avec un jeu de trois couleurs, à une permutation près des couleurs. Ces objets sont également utilisés en mathématiques sociales et en phylogénie comme éléments de base du calcul des dissimilarités et distances d'arbres en théorie de la classification ; voir [15].

Reçu le 19 janvier 2004 et, sous forme définitive, le 6 juillet 2004.

FIGURE 1. Des 2-arbres k -gonaux pour $k = 3$ et $k = 5$.

On modifie la définition des 2-arbres classiques en remplaçant les triangles par des quadrilatères, des pentagones ou, plus généralement, des polygones à k côtés, appelés k -gones, avec $k \geq 3$ fixé. Ces structures sont appelées *2-arbres k -gonaux*.

Le dénombrement des 2-arbres et de ses généralisations a été extensivement étudié dans la littérature. Les premiers travaux à ce sujet se trouvent dans Palmer [17], pour le dénombrement étiqueté des 2-arbres (voir également [1]), et dans Harary et Palmer [6], pour le cas non étiqueté.

Mentionnons également les travaux de Palmer et Read [18], qui ont énuméré les 2-arbres extérplanaires («outerplanar» en anglais) (2-arbres plongeables dans le plan de sorte que chaque sommet appartienne à la face externe), qu'ils appellent planaires dans leur article, dans les cas étiqueté et non étiqueté.

Deux années plus tard, en compagnie de Harary, [7], ces auteurs ont généralisé les résultats précédents en considérant pour la première fois les 2-arbres k -gonaux et en les dénombrant dans le cas extérplanair.

On s'intéresse ici au même type d'objets à la différence près que nous considérons les 2-arbres k -gonaux *libres* (sans structure ajoutée) dans l'espace, c'est-à-dire en tant que graphes simples, sans aucune restriction de planarité.

Dans sa thèse de doctorat en 1993, T. Kloks [9] a énuméré les 2-arbres partiels 2-connexes (non-étiquetés), à savoir, les 2-arbres dans lesquels certaines arêtes ont été enlevées sans toutefois briser la 2-connexité de la structure. strictement celle des 2-arbres k -gonaux étant donné que dans un 2-arbre partiel 2-connexe, on peut trouver des polygones de toutes les tailles et que certaines arêtes, incidentes à plus de deux cellules, peuvent être absentes. En principe, la méthode de Kloks, qui, tout comme celle de Harary et Palmer, étend la traditionnelle caractéristique de dissimilarité de Otter [19], pourrait être utilisée pour dénombrer aussi les 2-arbres k -gonaux (avec k fixe) mais ce travail n'a pas été effectué.

À propos des 2-arbres libres, Fowler, Gessel, Labelle et Leroux, dans [5], ont proposé de nouvelles équations fonctionnelles pour l'espèce des 2-arbres et certaines espèces pointées associées. Leur approche, fondée sur la théorie combinatoire des espèces de A. Joyal (cf. [8, 2]), est plus structurée, remplaçant par exemple une éventuelle caractéristique de dissimilarité par un théorème de dissymétrie pour les 2-arbres (voir plus bas). Ils ont donné de nouvelles formules de récurrence pour le cas non étiqueté

ainsi que des formules asymptotiques. Finalement, les présents auteurs ont généralisé ces résultats dans [12, 13], en considérant la famille plus grande des 2-arbres k -gonaux.

Le but du présent article est de dénombrer ces mêmes structures en tenant compte non seulement de leur taille mais aussi de leur périmètre. Le *périmètre* d'un 2-arbre est défini comme étant le nombre d'arêtes externes de la structure. Plus précisément, on définit le *degré* d'une arête d'un 2-arbre k -gonal comme étant le nombre de k -gones qui lui sont incidents et alors les arêtes externes sont, par définition, celles de degré un. De plus, dans le cas d'une arête seule, donc de degré zéro, cette arête est considérée comme externe, par convention, et le périmètre est 1. À titre d'exemples, les 2-arbres des figures 1a, 1b et 2a possèdent des périmètres de 23, 28, et 37, respectivement. L'intérêt du périmètre provient de l'analogie avec certains modèles discrets de la mécanique statistique où ce paramètre mesure la taille de l'interface et donc les possibilités d'interaction avec le milieu.

Donnons dès à présent une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un 2-arbre k -gonal en terme des nombres d'arêtes et de polygones.

Lemme 1. Soient m et n deux entiers positifs. Alors, il existe un 2-arbre k -gonal possédant m k -gones et n arêtes si et seulement si $n = (k - 1)m + 1$.

Preuve. La preuve est asez immédiate, étant donné qu'à partir du 2-arbre k -gonal composé d'une arête seule, l'ajout d'un polygone à k côtés, augmente de $k - 1$ le nombre d'arêtes de la structure. \square

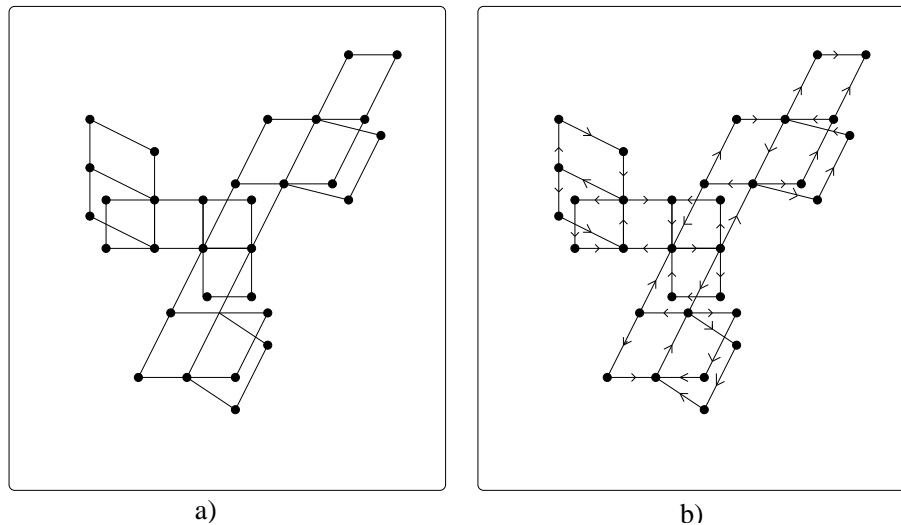


FIGURE 2. Un 2-arbre 4-gonal non orienté et orienté.

Nous étudions d'abord les 2-arbres k -gonaux orientés, pour ensuite utiliser le concept d'espèces quotients (voir [2,3] et [5, 14] pour des espèces quotients liées aux 2-arbres) pour se défaire de l'orientation. On dit qu'un 2-arbre k -gonal est *orienté* si ses arêtes sont orientées de telle sorte que tous les k -gones forment un cycle orienté. Cependant, on peut considérer que l'orientation de n'importe quelle arête peut être étendue de façon unique à l'ensemble de la structure, en orientant tout d'abord le polygone contenant

l'arête orientée, pour ensuite transmettre cette orientation aux polygones adjacents, et ainsi de suite. Cette orientation est cohérente par la nature arborescente des 2-arbres k -gonaux, c'est-à-dire, par le fait que la structure ne possède pas de cycle de k -gones. La figure 2b montre un 2-arbre 4-gonal orienté.

On utilise, dans cet article, l'approche de Fowler *et al.* introduite dans [5] pour les 2-arbres. Nous nous basons alors sur les résultats de Labelle *et al.* [13]. Cela signifie notamment que l'on se place dans le contexte des espèces de structures (voir [2], chapitre 1) et que les 2-arbres k -gonaux sont étiquetés aux polygones. Dans [13], les auteurs ont introduit de nombreuses espèces. Nous reprenons leurs notations : désignons par a et a_o , les espèces des 2-arbres k -gonaux, respectivement non orientés et orientés. Introduisons également trois types de pointages :

- : indiquant le pointage en une arête,
- ◊ : indiquant le pointage en un k -gone,
- ◊̇ : indiquant le pointage en un k -gone dont une des arêtes est distinguée.

Nous utilisons un théorème de dissymétrie dans les cas orienté et non orienté, permettant d'exprimer les espèces a_o et a en fonction des diverses espèces pointées. Voir [5, 13].

Théorème 1. THÉORÈME DE DISSYMMÉTRIE POUR LES 2-ARBRES k -GONAUX. *On a les isomorphismes d'espèces*

$$a_o = a_o^- + a_o^\diamond - a_o^{\diamond\dot{}}, \quad (1)$$

$$a = a^- + a^\diamond - a^{\diamond\dot{}}. \quad (2)$$

Il y a encore une espèce importante à introduire, qui joue un rôle fondamental dans notre analyse. C'est l'espèce $B = a^\rightarrow$, des 2-arbres k -gonaux pointés en une arête orientée. Cela revient à dire que l'on choisit une arête quelconque d'un 2-arbre pondéré, que l'on oriente par la suite. Il est alors possible d'étendre cette orientation au 2-arbre tout entier de sorte qu'il y a un isomorphisme canonique d'espèces $B \cong a_o^-$. Cependant il est souvent utile de ne pas faire cette extension et de considérer que seule l'arête distinguée est orientée.

Nous allons proposer des versions pondérées de toutes ces espèces, pour tenir compte du périmètre. Pour cela, nous introduisons une fonction de poids w , définie comme suit :

$$\begin{aligned} w : a &\longrightarrow \mathbb{Q}[t] \\ s &\longmapsto w(s) = t^{p(s)}, \end{aligned} \quad (3)$$

où t est une variable formelle, et $p(s)$ désigne le périmètre de la structure $s \in a$ et \mathbb{Q} est le corps des nombres rationnels. En d'autres termes, la variable t agit comme compteur d'arêtes externes. Par la suite, pour différencier les espèces pondérées que nous considérons ici de celles précédemment introduites, nous utilisons l'indice w . Par exemple, on écrit $a_{o,w}$ et a_w pour les versions pondérées (par leur périmètre) des espèces a_o et a . Enfin, nous notons $a_w^- = (a_w)^-$, $a_w^\diamond = (a_w)^\diamond$, $a_w^{\diamond\dot{}} = (a_w)^{\diamond\dot{}}$, et $a_{o,w}^- = (a_{o,w})^-$, $a_{o,w}^\diamond = (a_{o,w})^\diamond$, $a_{o,w}^{\diamond\dot{}} = (a_{o,w})^{\diamond\dot{}}$.

Dans le cas de l'espèce B , la pondération est encore donnée par le périmètre, avec la distinction suivante : si l'arête pointée est de degré 1, elle n'est pas considérée comme

externe et ne contribue pas au périmètre, de sorte qu'au niveau pondéré, on n'a pas d'isomorphisme entre les espèces B_w et $a_{o,w}^-$.

Le théorème de dissymétrie reste valide dans le contexte pondéré, pour les cas orienté et non orienté :

$$a_{o,w}^- + \hat{a}_{o,w} = a_{o,w} + \hat{a}_{o,w}^{\diamond}, \quad (4)$$

$$a_w^- + \hat{a}_w = a_w + \hat{a}_w^{\diamond}. \quad (5)$$

Il faut alors exprimer ces espèces pointées pondérées en termes de l'espèce B_w , ce qui mène à des formules d'énumération. À l'image des travaux [13], nous allons pour cela distinguer deux cas dans notre démarche selon la parité de l'entier k , représentant la taille des polygones que nous considérons.

Cet article est organisé de la façon suivante. Dans la prochaine section, nous caractérisons l'espèce $B_w = a_w^-$, en donnant une équation combinatoire qu'elle satisfait. Nous obtenons alors quelques propriétés de cette espèce et proposons des formules énumératives. Le but est alors d'exprimer les différentes espèces pointées apparaissant dans le théorème de dissymétrie en fonction de l'espèce de base B_w et d'en déduire les résultats énumératifs que nous désirons établir. Le cas des 2-arbres orientés est étudié dans la section 3. Ensuite, le cas non orienté est traité en section 4, en distinguant deux cas suivant la parité de l'entier k .

Pour nos besoins, le principal outil de la théorie des espèces de structures est le théorème de composition de Pólya-Robinson-Joyal, qui s'énonce de la façon suivante (voir [2], sections 2.3 et 4.3) : soient G_u et H_v deux espèces pondérées et $F_w = G_u \circ H_v$, la composée (partitionnelle) de G_u et H_v . Alors, la série génératrice exponentielle

$$F_w(x) = \sum_{n \geq 0} f_{n,w} \frac{x^n}{n!},$$

où $f_{n,w} = |F[n]|_w$ est le poids total des F_w -structures étiquetées d'ordre n , et la série génératrice tilde

$$\tilde{F}_w(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_{n,w} x^n,$$

où $\tilde{f}_{n,w} = |F[n]/\mathbb{S}_n|_w$ est le poids total des F_w -structures non étiquetées d'ordre n , satisfont les relations suivantes :

$$F_w(x) = G_u(H_v((x))), \quad (6)$$

$$\tilde{F}_w(x) = Z_{G_u}(\tilde{H}_v(x), \tilde{H}_{v^2}(x^2), \dots), \quad (7)$$

où $Z_{G_u}(x_1, x_2, \dots)$ désigne la série indicatrice de cycles de G_u . De plus, nous avons

$$Z_{F_w} = Z_{G_v} \circ Z_{H_u} = Z_{G_v}(Z_{H_u}(x_1, x_2, \dots), Z_{H_u^2}(x_2, x_4, \dots), \dots). \quad (8)$$

Rappelons également les expressions bien connues [2] des séries indicatrices de cycles de l'espèce C_k des cycles orientés de taille k ,

$$Z_{C_k}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \phi(d) x_d^{k/d}, \quad (9)$$

où ϕ désigne la fonction d'Euler, et de l'espèce E , des ensembles,

$$Z_E(x_1, x_2, \dots) = \exp \left(\sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{i} \right). \quad (10)$$

2. L'espèce $B_w = a_w^\rightarrow$. La première étape consiste à déterminer l'équation fonctionnelle que satisfait l'espèce B_w des 2-arbres k -gonaux pointés en une arête orientée et pondérés par le compteur de périmètre t . dans le cas de l'arête seule, le poids est de t . On a alors le résultat suivant.

Proposition 1. *L'espèce pondérée B_w est caractérisée par l'équation fonctionnelle*

$$B_w(X) = t + E_+(XB_w^{k-1}(X)), \quad (11)$$

où E_+ est l'espèce des ensembles non vides.

Preuve. L'espèce non pondérée B satisfait la relation (voir [13])

$$B = E(XB^{k-1}) = 1 + E_+(XB^{k-1}(X)), \quad (12)$$

où le terme 1 correspond au cas de l'arête seule. En tenant compte du poids w et du fait que dans B_w , l'arête seule possède le poids t , on obtient directement (11). \square

Notons que la relation (11) est également valide pour le cas $k = 2$. L'espèce B_w représente alors l'espèce des arborescences étiquetées aux arêtes, la variable t agissant alors comme un compteur de feuilles.

Les séries génératrices associées à l'espèce pondérée B_w sont notées de la façon suivante :

$$B_w(x) = B(x, t) = \sum_{n \geq 0, \ell \geq 1} a_{n, \ell}^\rightarrow t^\ell \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} a_n^\rightarrow(t) \frac{x^n}{n!}, \quad (13)$$

$$\tilde{B}_w(x) = \tilde{B}(x, t) = \sum_{n \geq 0, \ell \geq 1} b_{n, \ell} t^\ell x^n = \sum_{n \geq 0} b_n(t) x^n, \quad (14)$$

où $a_{n, \ell}^\rightarrow$ et $b_{n, \ell}$ désignent les nombres de 2-arbres k -gonaux étiquetés et non étiquetés, respectivement, pointés en une arête orientée, possédant n polygones et de périmètre ℓ . De l'équation (11), on déduit des formules explicites pour les polynômes $a_n^\rightarrow(t)$ et les nombres $a_{n, \ell}^\rightarrow$ ainsi qu'une formule de récurrence pour $b_n(t)$ et $b_{n, \ell}$. Il est important de remarquer que le périmètre ℓ est borné :

$$(k-2)n + 1 \leq \ell \leq (k-1)n.$$

Proposition 2. *Les polynômes $a_n^\rightarrow(t)$, dénombrant les B_w -structures sur n k -gones selon le périmètre, sont donnés par $a_0^\rightarrow(t) = t$ et, pour $n \geq 1$,*

$$a_n^\rightarrow(t) = \frac{n!}{m} \sum_{\ell=m-n}^{m-1} \sum_{i+j=m-\ell} (-1)^j i^n \binom{m}{\ell, i, j} t^\ell \quad (15)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \frac{m!}{(m-i)!} S(n, i) t^{m-i}, \quad (16)$$

où $m = (k - 1)n + 1$ est le nombre d'arêtes et $S(n, j)$ désigne les nombres de Stirling de seconde sorte, donnant le nombre de partitions d'un ensemble de n éléments en j blocs, $n, j \geq 1$.

Preuve. De la relation (11), nous avons $B(x, t) = t + \exp(xB^{k-1}(x, t)) - 1$. Alors, on en déduit

$$xB^{k-1}(x, t) = x(t + \exp(xB^{k-1}(x, t)) - 1)^{k-1}.$$

On pose $\mathcal{B}(x, t) = xB^{k-1}(x, t)$. Alors, la série $\mathcal{B}(x, t)$ satisfait l'équation fonctionnelle $\mathcal{B}(x, t) = xR(\mathcal{B}(x, t))$, où $R(y) = (t + \exp(y) - 1)^{k-1}$. De plus,

$$B(x, t) = \left(\frac{\mathcal{B}(x, t)}{x} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \tag{17}$$

Alors, la version composée de l'inversion de Lagrange, appliquée à (17) conduit à (15). Pour établir maintenant (16), nous appliquons la même méthode, mais en utilisant la relation bien connue suivante

$$\frac{(e^x - 1)^j}{j!} = \sum_{n \geq j} S(n, j) \frac{x^n}{n!},$$

voir [4] page 63. \square

On établit alors de façon directe, des expressions pour $a_{n,\ell}^{\rightarrow}$.

Corollaire 1. *Le nombre $a_{n,\ell}^{\rightarrow}$ de B_w -structures étiquetées sur n k -gones possédant un périmètre de ℓ (i.e., un poids de t^ℓ), pour $(k - 2)n + 1 \leq \ell \leq (k - 1)n$, est donné par*

$$a_{n,\ell}^{\rightarrow} = \frac{n!}{m} \sum_{i+j=m-\ell} (-1)^j i^n \binom{m}{\ell, i, j} \tag{18}$$

$$= \frac{(m - 1)!}{\ell!} S(n, m - \ell), \tag{19}$$

où $m = (k - 1)n + 1$ est le nombre d'arêtes.

Remarque 1. On peut donner une preuve bijective de la formule (19) en adaptant la correspondance de Prüfer comme suit. On sait que le nombre total de a^{\rightarrow} -structures, c'est-à-dire de 2-arbres k -gonaux pointés en une arête orientée, sur un ensemble de n k -gones, est donné par

$$a_n^{\rightarrow}(1) = m^{n-1}. \tag{20}$$

Étant donnée une a^{\rightarrow} -structure α sur $[n]$, on étiquette 0 l'arête pointée et pour tout k -gone étiqueté j de α , on étiquette j_1, j_2, \dots, j_{k-1} ses arêtes dans l'ordre circulaire, à partir de (et excluant) celle qui rattache le k -gone au 2-arbre en direction de la racine. Toutes les arêtes de α se retrouvent ainsi étiquetées dans un ensemble M . Une suite d'éléments de M de longueur $n - 1$ est alors construite récursivement en émondant le k -gone de plus petite étiquette parmi les k -gones pendants et en notant à quelle arête il était attaché. Ceci est la bijection recherchée, établissant (20). On remarque de plus que l'image de la suite construite est précisément l'ensemble des arêtes internes de

α , au détail suivant près : l'arête interne racine, d'étiquette 0, apparaît dans l'image seulement si son degré est ≥ 2 . On doit donc prévoir aussi le cas où elle est de degré 1. La bijection montre donc également que

$$a_{n,\ell}^{\rightarrow} = \binom{m-1}{\ell} (\text{surj}(n-1, m-\ell-1) + \text{surj}(n-1, m-\ell)), \quad (21)$$

où le coefficient binomial correspond au choix des arêtes internes et où $\text{surj}(n, h)$ désigne le nombre de suites surjectives de longueur n dans un ensemble de h éléments. Un simple calcul montre que (19) est équivalente à (21), sachant que $\text{surj}(n, h) = h!S(n, h)$ et que

$$S(n, h) = S(n-1, h-1) + hS(n-1, h).$$

De plus, on voit que les nombres $a_{n,\ell}^{\rightarrow(1)}$ et $a_{n,\ell}^{\rightarrow(2)}$ de B_w -structures étiquetées sur n triangles, ayant ℓ arêtes externes, et dont l'arête pointée est de degré $d = 1$ et $d \geq 2$, respectivement, sont donnés par

$$a_{n,\ell}^{\rightarrow(1)} = \binom{m-1}{\ell} \text{surj}(n-1, m-\ell-1) = \frac{(m-1)!}{\ell!} S(n-1, m-\ell-1), \quad (22)$$

$$a_{n,\ell}^{\rightarrow(2)} = \binom{m-1}{\ell} \text{surj}(n-1, m-\ell) = (m-\ell) \frac{(m-1)!}{\ell!} S(n-1, m-\ell). \quad (23)$$

Notons également que, lorsque $k = 3$, $\ell = n + 1$ représente le périmètre minimal, et $a_{n,n+1}^{\rightarrow} = n!c_n$, où les c_n désignent les nombres de Catalan, puisque, dans ce cas, les B_w -structures obtenues sont extérieurement planaires ; voir [10, 11]. De même, pour un k général, $a_{n,(k-2)n+1}^{\rightarrow} = n!C_{k,n}$, où $C_{k,n} = \frac{1}{n} \binom{n(k-1)}{n-1}$ représente les nombres de Catalan généralisés.

On ne peut obtenir de formules closes explicites dans le cas non étiqueté. Toutefois, nous proposons des formules de récurrence pour les entiers $b_{n,\ell}$ et les polynômes $b_n(t)$.

Proposition 3. *Les polynômes $b_n(t)$, $n \geq 1$, satisfont la récurrence suivante :*

$$b_0(t) = t, \quad (24)$$

$$b_n(t) = \frac{1}{n} \left(\sum_{d|n} d \cdot b_{d-1}^{(k-1)}(t^{\frac{n}{d}}) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{d|i} d \cdot b_{d-1}^{(k-1)}(t^{\frac{i}{d}}) \right) b_{n-i}(t) \right),$$

où les sommations sont prises sur les entiers $i, d \geq 1$, et où

$$b_n^{(j)}(t) = [x^n] \tilde{B}^j(x, t) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_j=n} b_{i_1}(t) b_{i_2}(t) \dots b_{i_j}(t). \quad (25)$$

Preuve. On établit la récurrence (24) en prenant la dérivée logarithmique (par rapport à x) de l'équation

$$\tilde{B}(x, t) = t + \exp \left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} x^i \tilde{B}^{k-1}(x^i, t^i) \right) - 1,$$

obtenue de la relation (11) par passage aux séries tildes en utilisant (7) et (10). \square

Le résultat suivant découle immédiatement du précédent.

Corollaire 2. Le nombre $b_{n,\ell}$ de B_w -structures non étiquetées sur n k -gones possédant un périmètre de ℓ satisfait la récurrence suivante :

$$b_{0,\ell} = \delta_{1,\ell}, \quad b_{n,\ell} = \frac{1}{n}\omega_{n,\ell} + \frac{1}{n} \sum_{\substack{\nu+\mu=n \\ \nu,\mu \geq 1}} \sum_{\substack{p+q=\ell \\ p,q \geq 1}} \omega_{\nu,p} \cdot b_{\mu,q}, \quad (26)$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker et

$$\omega_{n,\ell} = \sum_{d|(n,\ell)} \frac{n}{d} b_{\frac{n}{d}-1, \frac{\ell}{d}}^{(k-1)}. \quad \square \quad (27)$$

Comme pour le cas non pondéré, nous exprimons les espèces pointées pondérées du théorème de dissymétrie en fonction de l'espèce B_w . On commence par le cas orienté pour ensuite utiliser les espèces quotients pour déduire le cas général.

3. Cas orienté. Commençons par rappeler le théorème de dissymétrie pour le cas orienté :

$$a_{o,w}^- + \hat{a}_{o,w}^\diamond = a_{o,w} + \hat{a}_{o,w}^\diamond, \quad (28)$$

Nous devons d'abord exprimer ces espèces en termes de l'espèce pondérée de base B_w .

Proposition 4. Les espèces pointées pondérées $a_{o,w}^-$, $\hat{a}_{o,w}^\diamond$ et $\tilde{a}_{o,w}^\diamond$ sont caractérisées par

$$a_{o,w}^- = B_w + (t-1)XB_w^{k-1}, \quad (29)$$

$$\hat{a}_{o,w}^\diamond = XC_k(B_w), \quad (30)$$

$$\tilde{a}_{o,w}^\diamond = XB_w^k, \quad (31)$$

où $B_w = a_{w^-}$ et C_k est l'espèce des cycles (orientés) de taille k .

Preuve. La seule différence entre $a_{o,w}^-$ et B_w est lorsque l'arête pointée est de degré 1, contribuant d'une unité au périmètre dans le premier cas. Ces structures sont des pages et leur espèce s'exprime par XB_w^{k-1} , d'où la formule (29). Les relations (30) et (31) sont directes à établir et les détails sont laissés au lecteur. \square

On déduit alors facilement les séries génératrices associées aux espèces $a_{o,w}^-$, $\hat{a}_{o,w}^\diamond$ et $\tilde{a}_{o,w}^\diamond$ en utilisant les formules (6), (7) et (9) :

$$a_o^-(x, t) = B(x, t) + (t-1)xB^{k-1}(x, t), \quad (32)$$

et

$$\tilde{a}_o^-(x, t) = \tilde{B}(x, t) + (t-1)x\tilde{B}^{k-1}(x, t), \quad (33)$$

$$\hat{a}_o^\diamond(x, t) = \frac{x}{k} \sum_{d|k} \phi(d) \tilde{B}^{\frac{k}{d}}(x^d, t^d), \quad (34)$$

$$\tilde{a}_o^\diamond(x, t) = x(\tilde{B}^k(x, t) + (t-1)\tilde{B}^{k-1}(x, t)), \quad (35)$$

expressions à partir desquelles il vient, en utilisant le théorème de dissymétrie,

$$\tilde{a}_o(x, t) = \tilde{B}(x, t) + \frac{x}{k} \sum_{d|k} \phi(d) \tilde{B}^{\frac{k}{d}}(x^d, t^d) - x\tilde{B}^k(x, t) + (t-1)x\tilde{B}^{k-1}(x, t). \quad (36)$$

On a ainsi obtenu :

Proposition 5. *On a, pour $n \geq 2$,*

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{o,n}(t) &= [x^n]\tilde{a}_o(x, t) \\ &= b_n(t) - b_{n-1}^{(k)}(t) + \frac{1}{k} \sum_{\substack{d|k \\ d \geq 1}} \phi(d) b_{\frac{n-1}{d}}^{(\frac{k}{d})}(t^d) + (t-1)b_{n-1}^{(k-1)}(t),\end{aligned}\quad (37)$$

où $b_n^{(i)}(t)$ est défini par (25).

Pour le dénombrement étiqueté, on obtient directement, à partir de (22) et (23),

$$a_o^-(n, \ell) = a_{n, \ell-1}^{\rightarrow(1)} + a_{n, \ell}^{\rightarrow(2)} = \frac{m!}{\ell!} S(n-1, m-\ell), \quad (38)$$

où $m = (k-1)n + 1$ est le nombre d'arêtes.

Corollaire 3. *Les nombres $a_o(n, \ell)$ et $\tilde{a}_o(n, \ell)$ de 2-arbres k -gonaux orientés étiquetés et non étiquetés, respectivement, sur n k -gones, possédant un périmètre de ℓ , sont donnés par*

$$a_o(n, \ell) = \frac{1}{m} a_o^-(n, \ell) = \frac{(m-1)!}{\ell!} S(n-1, m-\ell) \quad (39)$$

$$\tilde{a}_o(n, \ell) = b_{n, \ell} - b_{n-1, \ell}^{(k)} + \frac{1}{k} \sum_{d|(k, \ell)} \phi(d) b_{\frac{n-1}{d}, \frac{\ell}{d}}^{(\frac{k}{d})} + b_{n-1, \ell-1}^{(k-1)} - b_{n-1, \ell}^{(k-1)}. \quad (40)$$

4. Cas non orienté. Les espèces non orientées liées aux 2-arbres k -gonaux peuvent être exprimées comme espèces quotient, de la manière suivante :

$$a_w^- = \frac{a_{o,w}^-}{\mathbb{Z}_2}, \quad a_w^\diamond = \frac{a_{o,w}^\diamond}{\mathbb{Z}_2}, \quad a_w^{\hat{\diamond}} = \frac{a_{o,w}^{\hat{\diamond}}}{\mathbb{Z}_2}, \quad (41)$$

où \mathbb{Z}_2 est un groupe à deux éléments, $\{1, \tau\}$, et où l'action de τ sur les structures orientées consiste à renverser l'orientation. Ainsi, une structure d'une espèce quotient F/\mathbb{Z}_2 est une orbite $\{s, \tau \cdot s\}$ d'une F -structure particulière s sous l'action de \mathbb{Z}_2 . Une F -structure étiquetée s est dite τ -symétrique si $s = \tau \cdot s$. Par contre la F -structure non-étiquetée associée à s est dite τ -symétrique si s et $\tau \cdot s$ sont isomorphes.

Les deux séries génératrices associées à une espèce quotient F/\mathbb{Z}_2 , où $F = F_w$ est une espèce pondérée sont données par

$$(F/\mathbb{Z}_2)(x) = \frac{1}{2} (F(x) + F_\tau(x)), \quad (42)$$

$$(F/\mathbb{Z}_2)^\sim(x) = \frac{1}{2} (\tilde{F}(x) + \tilde{F}_\tau(x)), \quad (43)$$

où $F_\tau(x)$ est la série génératrice exponentielle des F_w -structures étiquetées τ -symétriques et $\tilde{F}_\tau(x)$ est la série génératrice ordinaires des F_w -structures non-étiquetées τ -symétriques. Cependant, d'importantes différences apparaissent dans les calculs selon la parité de k . La différence principale provient de l'existence d'arêtes opposées dans les k -gones lorsque k est pair. Il est donc préférable de traiter séparément les deux cas de parité.

4.1. k impair. Lorsque k est impair, on obtient facilement le nombre $a_{n,\ell}$ de 2-arbres k -gonaux étiquetés sur n k -gones de périmètre ℓ ,

$$a(n, \ell) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_o(n, \ell) + 1), & \text{si } \ell = (k-1)n, \\ \frac{1}{2}a_o(n, \ell), & \text{sinon,} \end{cases} \quad (44)$$

étant donné que le seul 2-arbre k -gonal étiqueté laissé fixe par changement d'orientation, pour un nombre de polygones donné, est celui dans lequel tous les polygones partagent une arête commune, ayant ainsi $(k-1)n$ arêtes externes. Donc, le polynôme $a_n(t)$, énumérateur des 2-arbres k -gonaux étiquetés selon le périmètre possède l'expression suivante :

$$a_n(t) = \sum a_{n,\ell} t^\ell = \frac{1}{2}(a_{o,n}(t) + t^{(k-1)n}). \quad (45)$$

Pour le dénombrement non étiqueté, on peut voir que les espèces a_w^- , a_w^\diamond et a_w° s'expriment en termes des espèces quotients pondérées Q_w , S_w et U_w , que nous avons adaptées assez directement de [13] :

$$\begin{aligned} a_w^- &= Q_w(X, B_w^{\frac{k-1}{2}}), \\ a_w^\diamond &= X \cdot S_w(X, B_w^{\frac{k-1}{2}}), \\ a_w^\circ &= X \cdot U_w(X, B_w^{\frac{k-1}{2}}), \end{aligned} \quad (46)$$

avec

$$\begin{aligned} Q_w(X, Y) &= (t + tXY^2 + E_{\geq 2}(XY^2)) / \mathbb{Z}_2, \\ S_w(X, Y) &= C_k(t + E_+(XY^2)) / \mathbb{Z}_2, \\ U_w(X, Y) &= \left((t + E_+(XY^2))^k \right) / \mathbb{Z}_2. \end{aligned} \quad (47)$$

Les expressions (47) sont les versions pondérées, obtenues en analysant avec précaution l'occurrence des arêtes externes, des espèces squelettes $Q(X, Y) = E(XY^2) / \mathbb{Z}_2$, $S(X, Y) = C_k(E(XY^2)) / \mathbb{Z}_2$ et $U(X, Y) = (E(XY^2))^k / \mathbb{Z}_2$, définies par les figures 3a, 3b et 3c, respectivement, suivant [13].

Une extension similaire conduit aux séries indicatrices de cycles de ces espèces :

$$\begin{aligned} Z_{Q_w} &= \frac{1}{2}(Z_{E_w(XY^2)} + q_w), \\ Z_{S_w} &= \frac{1}{2} \left(Z_{C_k(t+E_+(XY^2))} + q_w \cdot (p_2 \circ (t + Z_{E_+(XY^2)}^{\frac{k-1}{2}})) \right), \\ Z_{U_w} &= \frac{1}{2} \left(Z_{(t+E_+(XY^2))^k} + q_w \cdot (p_2 \circ (t + Z_{E_+(XY^2)}^{\frac{k-1}{2}})) \right), \end{aligned} \quad (48)$$

où

$$E_w(XY^2) = t + tXY^2 + E_{\geq 2}(XY^2) = E(XY^2) + (t-1)(1 + XY^2)$$

et

$$q_w(x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots) = (t-1)(1 + x_1 y_2) + h \circ (x_1 y_2 + p_2 \circ (x_1 \frac{y_1^2 - y_2}{2})). \quad (49)$$

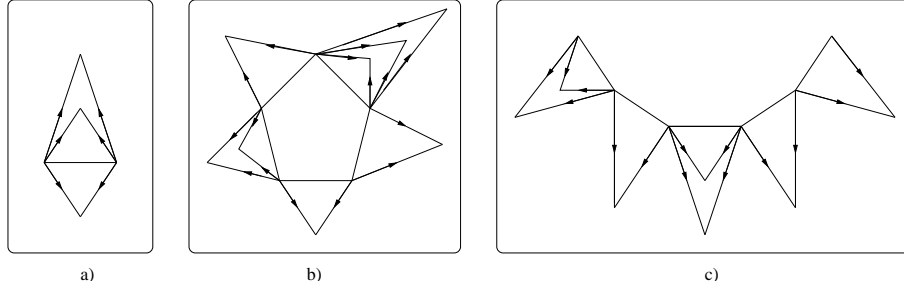


FIGURE 3. Espèces squelette a) $Q(X, Y)$, b) $S(X, Y)$ et c) $U(X, Y)$.

Ici, h est la fonction symétrique homogène et p_i désigne la $i^{\text{ième}}$ somme de puissances, $i \geq 1$, et \circ note la composition pléthystique des fonctions symétriques. Voir [13] pour plus de détails. Une nouvelle application du théorème de dissymétrie et quelques simplifications donnent la série tilde des 2-arbres k -gonaux pondérés.

Proposition 6. *La série génératrice ordinaire des 2-arbres k -gonaux non étiquetés, pondérés par leur périmètre est donnée par :*

$$\tilde{a}(x, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_o(x, t) + q_w[x, \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x, t)] + (t-1)(1 + x\tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2, t^2)) \right), \quad (50)$$

où

$$q_w[x, \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x, t)] := q_w(x, x^2, \dots; \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x, t), \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^2, t^2), \dots).$$

Corollaire 4. *Pour k impair ≥ 3 , le polynôme énumérateur $\tilde{a}_n(t)$ des 2-arbres k -gonaux non-étiquetés ayant n k -gones, selon le périmètre, satisfait la récurrence suivante :*

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n(t) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l|j} l\omega_l(t) \right) \left(\tilde{a}_{n-j}(t) - \frac{1}{2}\tilde{c}_{n-j}(t) \right) + \frac{1}{2}\tilde{a}_{o,n}(t) \\ + \frac{1}{2}(t-1)b_{\frac{n-1}{2}}^{\left(\frac{k-2}{2}\right)}(t^2), \end{aligned} \quad (51)$$

où $\tilde{a}_0(t) = t$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\omega_n = 2b_{\frac{n-1}{2}}^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(t^2) + b_{\frac{n-2}{2}}^{(k-1)}(t^2) - b_{\frac{n-2}{4}}^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}(t^4), \quad (52)$$

$$\tilde{c}_n(t) = \tilde{a}_{o,n}(t) + (t-1) \left(\chi(n=0) + b_{\frac{n-1}{2}}^{\left(\frac{k-2}{2}\right)}(t^2) \right), \quad (53)$$

$b_i^{(j)}(t)$ est défini par (25) et $\chi(n=0)$ vaut 1 si $n=0$ et 0 autrement.

Preuve. Développant le second membre de (50), il vient

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, t) = \frac{1}{2} \left(\tilde{a}_o(x, t) + (t-1)(1 + x\tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^2, t^2)) \right. \\ \left. + \exp\left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{2i} (2x^i \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^{2i}, t^{2i}) + x^{2i} \tilde{B}^{k-1}(x^{2i}, t^{2i}) - x^i \tilde{B}^{\frac{k-1}{2}}(x^{4i}, t^{4i}))\right) \right). \end{aligned} \quad (54)$$

On obtient le résultat annoncé en prenant x fois la dérivée logarithmique de cette relation. \square

4.2. k pair. Lorsque k est pair, la situation est plus délicate. Par exemple, il existe plusieurs 2-arbres k -gonaux orientés étiquetés invariants par changement d'orientation. Ces structures s'obtiennent à partir d'un arbre ordinaire étiqueté aux arêtes, en remplaçant les arêtes par des k -gones attachés entre eux par les arêtes opposées. Remarquons que si l'arbre possède h feuilles, alors le 2-arbre ainsi obtenu possède $n(k - 2) + h$ arêtes externes. Pour obtenir le nombre $\alpha(n, h)$ d'arbres étiquetés aux arêtes avec n arêtes et $m := n + 1$ sommets, dont h feuilles, on peut appliquer la formule (39) avec $k = 2$ et $\ell = h$, ce qui donne

$$\alpha(n, h) = \frac{n!}{h!} S(n - 1, n - h + 1). \tag{55}$$

Cette formule est cohérente avec le dénombrement des arbres étiquetés aux sommets, avec m sommets, dont h feuilles, donné dans Moon [16]. On obtient donc :

Proposition 7. Soit $n \geq 2$, h un entier compris entre 2 et n , et $\ell = n(k - 2) + h$. Alors le nombre $a(n, \ell)$ de 2-arbres k -gonaux étiquetés sur n k -gones de périmètre ℓ , est donné par

$$\begin{aligned} a(n, \ell) &= \frac{1}{2} (a_o(n, \ell) + \alpha(n, h)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(m - 1)!}{\ell!} S(n - 1, m - \ell) + \frac{n!}{h!} S(n - 1, n - h + 1) \right). \end{aligned} \tag{56}$$

Pour le dénombrement non étiqueté, il nous suffit d'adapter toutes les espèces introduites en section 4.2 de l'article [13]. Ceci est relativement facile à faire en prêtant attention au statut de l'arête distinguée (externe ou non). Nous reprenons les notations de [13], que nous étendons avec l'indice w , indiquant que l'espèce considérée est pondérée selon le périmètre de ses structures.

La première étape consiste à calculer la série tilde de l'espèce a^- . Pour ce faire, on utilise la relation (43), donnant

$$\tilde{a}_w^-(x) = \frac{1}{2} (\tilde{a}_{o,w}^-(x) + \tilde{a}_S(x)), \tag{57}$$

où nous avons posé $\tilde{a}_S(x) = \tilde{a}_{o,w,\tau}^-(x)$ pour simplifier. Notons que l'espèce $a_{S,w}$ est la sous-espèce de $a_{o,w}^-$ constituée des a_o^- -structures s pondérées par leur périmètre qui sont τ -symétriques, c'est-à-dire telles que s soit isomorphe à $\tau \cdot s$.

Avant de donner une expression de la série $\tilde{a}_S(x)$, nous introduisons quelques espèces auxiliaires, analogues pondérées de celles introduites dans [13].

Définition 1. Une page d'un 2-arbre pointé en une arête est un sous-2-arbre k -gonal maximal qui contient exactement un des k -gones attaché à l'arête racine. On dit qu'il y a une symétrie croisée si on peut trouver une paire de pages alternées, c'est-à-dire de pages de la forme $\{s, \tau \cdot s\}$, où s n'est pas elle-même τ -symétrique, attachées à l'arête pointée. Voir la figure 4a. Une page mixte est une page τ -symétrique contenant au moins

une symétrie croisée. Voir la figure 4b. Finalement, on dit qu'une page τ -symétrique est totalement symétrique si elle ne contient pas de symétrie croisée.

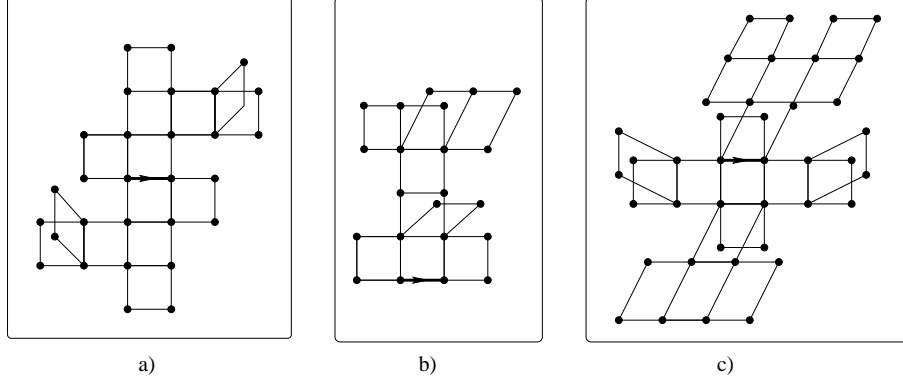


FIGURE 4. a) Une page alternée, b) une page mixte, et c) une structure de l'espèce $a_{TS,w}$.

On définit alors les espèces pondérées suivantes, sous-espèces de B_w :

- $P_{AL,w}$ est l'espèce des paires de pages alternées ;
- $P_{M,w}$ est l'espèce des pages mixtes ;
- $P_{TS,w}$ est l'espèce des pages totalement symétriques.

Enfin, l'espèce $a_{TS,w}$ des a_S -structures *totalement symétriques* (voir la figure 4c), est définie par

$$\begin{aligned} a_{TS,w} &= t + t \cdot P_{TS,w} + E_{\geq 2}(P_{TS,w}) \\ &= (t-1)(1 + P_{TS,w}) + E(P_{TS,w}). \end{aligned} \quad (58)$$

On a

$$P_{TS,w} = X \cdot X_{\equiv}^2 \langle B^{\frac{k-2}{2}} \rangle \cdot (a_{TS,w} + (1-t)P_{TS,w}), \quad (59)$$

où la notation $X_{\equiv}^2 \langle F \rangle$ désigne l'espèce des couples de F -structures isomorphes, pour laquelle $X_{\equiv}^2 \langle F \rangle \sim (x) = \tilde{F}(x^2)$. On en déduit, pour les séries tildes,

$$\tilde{a}_{TS}(x, t) = (t-1)(1 + \tilde{P}_{TS}(x, t)) + \exp \left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} \tilde{P}_{TS}(x^i, t^i) \right) \quad (60)$$

et

$$\tilde{P}_{TS}(x, t) = x \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2, t^2) \left(\tilde{a}_{TS}(x, t) + (1-t)\tilde{P}_{TS}(x, t) \right). \quad (61)$$

On a également, par définition,

$$P_{AL,w} = \Phi_2 \langle X B_w^{k-1} - (P_{TS,w} + P_{M,w}) \rangle, \quad (62)$$

où $\Phi_2 \langle F \rangle$ représente l'espèce des paires de F -structures de la forme $\{s, \tau \cdot s\}$. Noter que $\Phi_2 \langle F \rangle \sim (x) = \frac{1}{2} \tilde{F}(x^2)$ lorsqu'on est assuré que les structures s and $\tau \cdot s$ ne sont pas isomorphes. De plus,

$$P_{M,w} = X \cdot X_{\equiv}^2 \langle B^{\frac{k-2}{2}} \rangle \cdot (a_{S,w} + (1-t)P_{M,w} - a_{TS,w}). \quad (63)$$

On en déduit

$$\tilde{P}_{AL}(x, t) = \frac{1}{2}(x^2 \tilde{B}^{k-1}(x^2, t^2) - \tilde{P}_{TS}(x^2, t^2) - \tilde{P}_M(x^2, t^2)), \quad (64)$$

et

$$\tilde{P}_M(x, t) = x \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2, t^2) \left(\tilde{a}_S(x, t) + (1-t)\tilde{P}_M(x, t) - \tilde{a}_{TS}(x, t) \right). \quad (65)$$

On trouve également, à partir de la décomposition des a_S -structures (voir la figure 5),

$$\tilde{a}_S(x, t) = \left(E(P_{TS} + P_{M,w} + P_{AL,w}) + (t-1)(1 + P_{TS,w} + P_{M,w}) \right) \tilde{}(x) \quad (66)$$

$$= \exp \left(\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i} (\tilde{P}_{TS}(x^i, t^i) + \tilde{P}_M(x^i, t^i) + \tilde{P}_{AL}(x^i, t^i)) \right) + (t-1)(1 + \tilde{P}_{TS}(x, t) + \tilde{P}_M(x, t)). \quad (67)$$

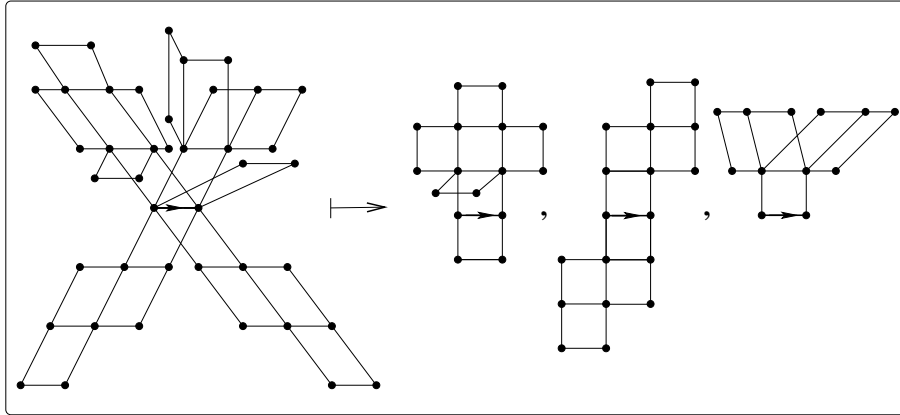


FIGURE 5. Décomposition d'une \tilde{a}_S -structure τ -symétrique.

Ces séries peuvent être calculées récursivement, en regroupant tout d'abord les équations (60) et (61), puis (64), (65) et (67).

Par la suite il devient possible de calculer les séries tildes associées aux espèces données en (41). Tout d'abord on a

$$\tilde{a}_{o,\tau}(x, t) = \tilde{a}_S(x, t). \quad (68)$$

De plus, il est immédiat d'étendre les propositions 13 et 14 de [13] pour obtenir

$$\tilde{a}_{o,\tau}^{\tilde{}}(x, t) = x \left(\tilde{a}_S(x, t) + (1-t)(\tilde{P}_{TS}(x, t) + \tilde{P}_M(x, t)) \right)^2 \cdot \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2, t^2) \quad (69)$$

et

$$\tilde{a}_{o,\tau}^{\tilde{}}(x, t) = \frac{x}{2} \left(\tilde{a}_S(x, t) + (1-t)(\tilde{P}_{TS}(x, t) + \tilde{P}_M(x, t)) \right)^2 \cdot \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2, t^2) + \frac{x}{2} \tilde{B}^{\frac{k}{2}}(x^2, t^2). \quad (70)$$

Combinant les trois dernières expressions avec le théorème de dissymétrie, nous obtenons le résultat final de cet article.

Proposition 8. *La série génératrice tilde de l'espèce des 2-arbres k -gonaux pondérés par leur périmètre est donnée par*

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, t) = & \frac{1}{2}\tilde{a}_o(x, t) + \frac{1}{2}\tilde{a}_S(x, t) + \frac{x}{4}\tilde{B}^{\frac{k}{2}}(x^2, t^2) \\ & - \frac{x}{4} \left(\tilde{a}_S(x, t) + (1-t)(\tilde{P}_{TS}(x, t) + \tilde{P}_M(x, t)) \right)^2 \cdot \tilde{B}^{\frac{k-2}{2}}(x^2, t^2). \end{aligned} \quad (71)$$

5. Conclusion. On trouvera, en appendice, des tableaux des polynômes $b_n(t)$ pour $k = 2, \dots, 9$ et $n = 0, \dots, 9$, ainsi que des polynômes $\tilde{a}_n(t)$ qui sont les coefficients de x^n dans $\tilde{a}(x, t)$, c'est-à-dire les polynômes générateurs selon leur périmètre, des 2-arbres k -gonaux non-étiquetés de taille n , pour $k = 2, \dots, 9$ et $n = 0, \dots, 10$.

Remerciements. Cette recherche a bénéficiée du soutien financier du FQRNT (Québec) et du CRSNG (Canada).

English extended abstract. The goal of this paper is to enumerate k -gonal 2-trees according to the size (the number of k -gons) and to the perimeter, that is, the number of external edges (edges of degree at most one). This extends our previous results in [13] where only the size was taken into account. The interest for the perimeter comes from the analogy with certain discrete models of statistical physics where this parameter measures the interface with the environment. We introduce a weight function to take into account the perimeter of 2-trees and present weighted versions of all the species introduced in [13]. In the first section, we give basic definitions and an overview of the various classes of 2-trees that are studied. We also present the main tool of our approach, the Dissymmetry Theorem for (oriented and unoriented) weighted k -gonal 2-trees.

The second section is devoted to the study of a weighted species, denoted B_w , which plays an essential role in our computations. We first characterize this species by means of a functional equation. We then deduce explicit formulas for the labelled enumeration (in terms of Stirling numbers of the second kind) and recursive formulas for the unlabelled enumeration. We obtain the labelled enumeration by two different ways: using Lagrange inversion and with a one-to-one correspondence.

In section 3, we treat the oriented case. We give formulas, in terms of the weighted species B_w , for the three pointed species occurring in the Dissymmetry Theorem. There result expressions for the generating series of the weighted species of oriented k -gonal 2-trees and for their generating polynomials according to size and perimeter in both labelled and unlabelled cases.

Finally, in section 4, we enumerate unoriented k -gonal 2-trees. To achieve this goal, we use a quotient species by a two-element group of the weighted species of oriented k -gonal 2-trees. The labelled enumeration is straightforward, but the unlabelled case is more complex and we have to treat separately two cases according to the parity of the integer k . Some tables are given in the Appendix.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. W. Beineke et J. W. Moon, *Several proofs of the number of labeled 2-dimensional trees*, Proof Techniques in Graph Theory, Academic Press, New York, 1969, pp. 11–20.

2. F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux, *Combinatorial species and tree-like structures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998; aussi disponible en français dans les Publications du LaCIM, vol. 19, 1994, <http://www.lacim.uqam.ca/>.
3. M. Bousquet, *Espèces de structures et applications au dénombrement de cartes et de cactus planaires*, Thèse de doctorat, Montréal, Université du Québec à Montréal, 1999.
4. L. Comtet, *Analyse Combinatoire, tome premier*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
5. T. Fowler, I. Gessel, G. Labelle et P. Leroux, *The specification of 2-trees*, Adv. in Appl. Math. **28** (2002), 145–168.
6. F. Harary et E. Palmer, *Graphical Enumeration*, Academic Press, New York-London, 1973.
7. F. Harary, E. Palmer et R. Read, *On the cell-growth problem for arbitrary polygons*, Discrete Math. **11** (1975), 371–389.
8. A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math. **42** (1981), 1–82.
9. T. Kloks, *Treewidth*, Thèse de doctorat, Utrecht, Royal University of Utrecht, 1993.
10. G. Labelle, C. Lamathe et P. Leroux, *Développement moléculaire de l'espèce des 2-arbres planaires*, Proceedings GASCom 2001 (Génération Aléatoire de Structures Combinatoires), Certosa di Pontignano, Italie, (17–20 nov. 2001), 41–46.
11. G. Labelle, C. Lamathe et P. Leroux, *Molecular expansion of the species of plane and planar 2-trees*, Theoretical Computer Science **307** (2003), 337–363.
12. G. Labelle, C. Lamathe et P. Leroux, *Énumération des 2-arbres k -gonaux*, Mathematics and Computer Science, vol. II, pp. 95–109 (Versailles, 2002); *Trends Math.*, Birkhauser, Basel, 2002.
13. G. Labelle, C. Lamathe et P. Leroux, *Labelled and unlabelled enumeration of k -gonal 2-trees*, J. Combin. Theory Ser. A **106** (2004), 193–219.
14. C. Lamathe, *Spécification de classes de structures arborescentes*, Thèse de doctorat, Montréal, Université du Québec à Montréal, 2003.
15. B. Leclerc et V. Makarenkov, *On some relations between 2-trees and tree metrics*, Discrete metric spaces (Villeurbanne, 1996); Discrete Math. **192** (1998), 223–249.
16. J. W. Moon, *Counting labelled trees*, Canadian Mathematical Monographs, No. 1, Canadian Mathematical Congress, Montreal, Que. 1970.
17. E. M. Palmer, *On the number of labeled 2-trees*, J. Combinatorial Theory **6** (1969), 206–207.
18. E. M. Palmer et R. C. Read, *On the number of plane 2-trees*, J. London Math. Soc. (2) **6** (1973), 583–592.
19. R. Otter, *The number of trees*, Ann. of Math. (2) **49** (1948), 583–599.

Appendice.**k=2**

t
 t
 $t+t^2$
 $t+2t^2+t^3$
 $t+4t^2+3t^3+t^4$
 $t+6t^2+8t^3+4t^4+t^5$
 $t+9t^2+18t^3+14t^4+5t^5+t^6$
 $t+12t^2+35t^3+39t^4+21t^5+6t^6+t^7$
 $t+16t^2+62t^3+97t^4+72t^5+30t^6+7t^7+t^8$
 $t+20t^2+103t^3+212t^4+214t^5+120t^6+40t^7+8t^8+t^9$

k=3

t
 t^2
 $2t^3+t^4$
 $5t^4+4t^5+t^6$
 $14t^5+18t^6+6t^7+t^8$
 $42t^6+72t^7+37t^8+8t^9+t^{10}$
 $132t^7+291t^8+204t^9+64t^{10}+10t^{11}+t^{12}$
 $429t^8+1152t^9+1048t^{10}+438t^{11}+97t^{12}+12t^{13}+t^{14}$
 $1430t^9+4558t^{10}+5128t^{11}+2757t^{12}+804t^{13}+138t^{14}+14t^{15}+t^{16}$
 $4862t^{10}+17944t^{11}+24249t^{12}+16108t^{13}+5981t^{14}+1332t^{15}+185t^{16}+16t^{17}+t^{18}$

k=4

t
 t^3
 $3t^5+t^6$
 $12t^7+6t^8+t^9$
 $55t^9+42t^{10}+9t^{11}+t^{12}$
 $273t^{11}+274t^{12}+87t^{13}+12t^{14}+t^{15}$
 $1428t^{13}+1806t^{14}+767t^{15}+150t^{16}+15t^{17}+t^{18}$
 $7752t^{15}+11820t^{16}+6387t^{17}+1641t^{18}+228t^{19}+18t^{20}+t^{21}$
 $43263t^{17}+77440t^{18}+51078t^{19}+16614t^{20}+3006t^{21}+324t^{22}+21t^{23}+t^{24}$
 $246675t^{19}+507246t^{20}+396905t^{21}+157638t^{22}+35847t^{23}+4972t^{24}+435t^{25}+24t^{26}+t^{27}$

k=5

t
 t^4
 $4t^7+t^8$
 $22t^{10}+8t^{11}+t^{12}$
 $140t^{13}+76t^{14}+12t^{15}+t^{16}$
 $969t^{16}+688t^{17}+158t^{18}+16t^{19}+t^{20}$
 $7084t^{19}+6290t^{20}+1916t^{21}+272t^{22}+20t^{23}+t^{24}$
 $53820t^{22}+57376t^{23}+22064t^{24}+4092t^{25}+414t^{26}+24t^{27}+t^{28}$
 $420732t^{25}+524412t^{26}+244840t^{27}+57113t^{28}+7488t^{29}+588t^{30}+28t^{31}+t^{32}$
 $3362260t^{28}+4799568t^{29}+2645854t^{30}+749908t^{31}+122908t^{32}+12376t^{33}+790t^{34}+32t^{35}+t^{36}$

TABLE 1. Polynômes $b_n(t)$ pour $k = 2, 3, 4, 5$ et $n = 0, \dots, 9$.

k=6

t
 t^5
 $5t^9+t^{10}$
 $35t^{13}+10t^{14}+t^{15}$
 $285t^{17}+120t^{18}+15t^{19}+t^{20}$
 $2530t^{21}+1390t^{22}+250t^{23}+20t^{24}+t^{25}$
 $23751t^{25}+16255t^{26}+3860t^{27}+430t^{28}+25t^{29}+t^{30}$
 $231880t^{29}+190106t^{30}+56755t^{31}+8235t^{32}+655t^{33}+30t^{34}+t^{35}$
 $2330445t^{33}+2229120t^{34}+805621t^{35}+146510t^{36}+15060t^{37}+930t^{38}+35t^{39}+t^{40}$
 $23950355t^{37}+26193570t^{38}+11149900t^{39}+2457081t^{40}+314810t^{41}+24880t^{42}+1250t^{43}+40t^{44}+t^{45}$

k=7

t
 t^6
 $6t^{11}+t^{12}$
 $51t^{16}+12t^{17}+t^{18}$
 $506t^{21}+174t^{22}+18t^{23}+t^{24}$
 $5481t^{26}+2456t^{27}+363t^{28}+24t^{29}+t^{30}$
 $62832t^{31}+34989t^{32}+6808t^{33}+624t^{34}+30t^{35}+t^{36}$
 $749398t^{36}+499188t^{37}+121800t^{38}+14514t^{39}+951t^{40}+36t^{41}+t^{42}$
 $9203634t^{41}+7143466t^{42}+2106138t^{43}+313872t^{44}+26532t^{45}+1350t^{46}+42t^{47}+t^{48}$
 $115607310t^{46}+102489288t^{47}+35536296t^{48}+6406278t^{49}+673749t^{50}+43820t^{51}+1815t^{52}+48t^{53}+t^{54}$

k=8

t
 t^7
 $7t^{13}+t^{14}$
 $70t^{19}+14t^{20}+t^{21}$
 $819t^{25}+238t^{26}+21t^{27}+t^{28}$
 $10472t^{31}+3962t^{32}+497t^{33}+28t^{34}+t^{35}$
 $141778t^{37}+66556t^{38}+10969t^{39}+854t^{40}+35t^{41}+t^{42}$
 $1997688t^{43}+1120658t^{44}+231203t^{45}+23373t^{46}+1302t^{47}+42t^{48}+t^{49}$
 $28989675t^{49}+18932368t^{50}+4713849t^{51}+595077t^{52}+42714t^{53}+1848t^{54}+49t^{55}+t^{56}$
 $430321633t^{55}+320771256t^{56}+93827895t^{57}+14311479t^{58}+1276471t^{59}+70532t^{60}+2485t^{61}+56t^{62}+t^{63}$

k=9

t
 t^8
 $8t^{15}+t^{16}$
 $92t^{22}+16t^{23}+t^{24}$
 $1240t^{29}+312t^{30}+24t^{31}+t^{32}$
 $18278t^{36}+5984t^{37}+652t^{38}+32t^{39}+t^{40}$
 $285384t^{43}+115796t^{44}+16552t^{45}+1120t^{46}+40t^{47}+t^{48}$
 $4638348t^{50}+2247376t^{51}+401632t^{52}+35256t^{53}+1708t^{54}+48t^{55}+t^{56}$
 $77652024t^{57}+437772920t^{58}+9432184t^{59}+1032814t^{60}+64416t^{61}+2424t^{62}+56t^{63}+t^{64}$
 $1329890705t^{64}+855243648t^{65}+216340024t^{66}+28597424t^{67}+2214272t^{68}+106352t^{69}+3260t^{70}+64t^{71}+t^{72}$

TABLE 2. Polynômes $b_n(t)$ pour $k = 6, 7, 8, 9$ et $n = 0, \dots, 9$.

k=2

t
 t^2
 t^2
 t^2+t^3
 $t^2+t^3+t^4$
 $t^2+2t^3+2t^4+t^5$
 $t^2+3t^3+4t^4+2t^5+t^6$
 $t^2+4t^3+8t^4+6t^5+3t^6+t^7$
 $t^2+5t^3+14t^4+14t^5+9t^6+3t^7+t^8$
 $t^2+7t^3+23t^4+32t^5+26t^6+12t^7+4t^8+t^9$
 $t^2+8t^3+36t^4+64t^5+66t^6+39t^7+16t^8+4t^9+t^{10}$

k=3

t
 t^3
 t^4
 t^5+t^6
 $4t^6+2t^7+t^8$
 $6t^7+8t^8+3t^9+t^{10}$
 $19t^8+28t^9+16t^{10}+4t^{11}+t^{12}$
 $49t^9+100t^{10}+70t^{11}+26t^{12}+5t^{13}+t^{14}$
 $150t^{10}+358t^{11}+325t^{12}+142t^{13}+38t^{14}+6t^{15}+t^{16}$
 $442t^{11}+1309t^{12}+1414t^{13}+783t^{14}+250t^{15}+52t^{16}+7t^{17}+t^{18}$
 $1424t^{12}+4772t^{13}+6186t^{14}+4102t^{15}+1615t^{16}+402t^{17}+70t^{18}+8t^{19}+t^{20}$

k=4

t
 t^4
 t^6
 $2t^8+t^9$
 $5t^{10}+2t^{11}+t^{12}$
 $16t^{12}+11t^{13}+4t^{14}+t^{15}$
 $60t^{14}+54t^{15}+22t^{16}+4t^{17}+t^{18}$
 $261t^{16}+305t^{17}+142t^{18}+34t^{19}+6t^{20}+t^{21}$
 $1243t^{18}+1755t^{19}+975t^{20}+273t^{21}+51t^{22}+6t^{23}+t^{24}$
 $6257t^{20}+10478t^{21}+6853t^{22}+2336t^{23}+490t^{24}+69t^{25}+8t^{26}+t^{27}$
 $32721t^{22}+63100t^{23}+48271t^{24}+19497t^{25}+4803t^{26}+770t^{27}+92t^{28}+8t^{29}+t^{30}$

k=5

t
 t^5
 t^8
 $2t^{11}+t^{12}$
 $12t^{14}+4t^{15}+t^{16}$
 $57t^{17}+32t^{18}+6t^{19}+t^{20}$
 $366t^{20}+248t^{21}+64t^{22}+8t^{23}+t^{24}$
 $2340t^{23}+2002t^{24}+630t^{25}+104t^{26}+10t^{27}+t^{28}$
 $16252t^{26}+16452t^{27}+6393t^{28}+1280t^{29}+156t^{30}+12t^{31}+t^{32}$
 $115940t^{29}+137378t^{30}+63516t^{31}+15493t^{32}+2259t^{33}+216t^{34}+14t^{35}+t^{36}$
 $854981t^{32}+1158532t^{33}+626996t^{34}+181484t^{35}+31887t^{36}+3640t^{37}+288t^{38}+16t^{39}+t^{40}$

TABLE 3. Polynômes $\tilde{a}_n(t)$, pour $k = 2, 3, 4, 5$ et $n = 0, \dots, 10$.

k=6 t t^6 t^{10} $3 t^{14}+t^{15}$ $12 t^{18}+3 t^{19}+t^{20}$ $68 t^{22}+28 t^{23}+6 t^{24}+t^{25}$ $483 t^{26}+253 t^{27}+56 t^{28}+6 t^{29}+t^{30}$ $3946 t^{30}+2582 t^{31}+659 t^{32}+89 t^{33}+9 t^{34}+t^{35}$ $34485 t^{34}+26953 t^{35}+8213 t^{36}+1300 t^{37}+133 t^{38}+9 t^{39}+t^{40}$ $315810 t^{38}+288021 t^{39}+103799 t^{40}+19831 t^{41}+2318 t^{42}+182 t^{43}+12 t^{44}+t^{45}$ $2984570 t^{42}+3112780 t^{43}+1306605 t^{44}+295143 t^{45}+40775 t^{46}+3689 t^{47}+243 t^{48}+12 t^{49}+t^{50}$ **k=7** t t^7 t^{12} $3 t^{17}+t^{18}$ $26 t^{22}+6 t^{23}+t^{24}$ $203 t^{27}+72 t^{28}+9 t^{29}+t^{30}$ $41989 t^{32}+868 t^{33}+144 t^{34}+12 t^{35}+t^{36}$ $20254 t^{37}+10914 t^{38}+2212 t^{39}+236 t^{40}+15 t^{41}+t^{42}$ $219388 t^{42}+140106 t^{43}+34704 t^{44}+4494 t^{45}+354 t^{46}+18 t^{47}+t^{48}$ $2459730 t^{47}+1827555 t^{48}+537357 t^{49}+84102 t^{50}+7937 t^{51}+492 t^{52}+21 t^{53}+t^{54}$ $28431861 t^{52}+24115080 t^{53}+8261473 t^{54}+1529246 t^{55}+172956 t^{56}+12794 t^{57}+656 t^{58}+24 t^{59}+t^{60}$ **k=8** t t^8 t^{14} $4 t^{20}+t^{21}$ $21 t^{26}+4 t^{27}+t^{28}$ $183 t^{32}+53 t^{33}+8 t^{34}+t^{35}$ $1918 t^{38}+704 t^{39}+106 t^{40}+8 t^{41}+t^{42}$ $22908 t^{44}+10375 t^{45}+1825 t^{46}+170 t^{47}+12 t^{48}+t^{49}$ $290511 t^{50}+156471 t^{51}+32934 t^{52}+3635 t^{53}+255 t^{54}+12 t^{55}+t^{56}$ $3844688 t^{56}+2407227 t^{57}+599513 t^{58}+79651 t^{59}+6466 t^{60}+351 t^{61}+16 t^{62}+t^{63}$ $52454248 t^{62}+37482092 t^{63}+10853332 t^{64}+1702405 t^{65}+163728 t^{66}+10336 t^{67}+468 t^{68}+16 t^{69}+t^{70}$ **k=9** t t^9 t^{16} $4 t^{23}+t^{24}$ $46 t^{30}+8 t^{31}+t^{32}$ $494 t^{37}+128 t^{38}+12 t^{39}+t^{40}$ $6532 t^{44}+2096 t^{45}+256 t^{46}+16 t^{47}+t^{48}$ $90954 t^{51}+35788 t^{52}+5348 t^{53}+422 t^{54}+20 t^{55}+t^{56}$ $1339448 t^{58}+624552 t^{59}+113582 t^{60}+10864 t^{61}+632 t^{62}+24 t^{63}+t^{64}$ $20459857 t^{65}+11077108 t^{66}+2387924 t^{67}+275174 t^{68}+19194 t^{69}+880 t^{70}+28 t^{71}+t^{72}$ $322092958 t^{72}+198865368 t^{73}+49851852 t^{74}+6782964 t^{75}+565666 t^{76}+30944 t^{77}+1174 t^{78}+32 t^{79}+t^{80}$ TABLE 4. Polynômes $\tilde{a}_n(t)$, pour $k = 6, 7, 8, 9$ et $n = 0, \dots, 10$.

G. LABELLE, C. LAMATHE ET P. LEROUX
LACIM ET DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
CASE POSTALE 8888, SUCCURSALE CENTRE-VILLE
MONTRÉAL QC H3C 3P8
CANADA
COURRIEL : [gilbert,lamathe,leroux]@lacim.uqam.ca