

SUR LE THÉORÈME DE PICK

FRANÇOIS DUBEAU ET SÉBASTIEN LABBÉ

RÉSUMÉ. Le théorème de Pick sert à calculer l'aire de certains types de polygones, ceux dont les sommets ont des coordonnées entières dans le plan. D'abord, ce travail rassemble les idées qui ont été publiées à ce sujet au cours des dernières décennies. Ensuite, il présente une généralisation du théorème.

ABSTRACT. Pick's theorem is used to compute the area of lattice polygons. In our work we present a survey of the ideas published on this subject during the last decennies. We add our own generalization of this theorem for very general lattice polygons.

1. Introduction. Georg Alexander Pick est né à Vienne le 10 août 1859 et c'est à ce même endroit qu'il a obtenu, en 1880, son doctorat. Ses recherches touchent différents domaines des mathématiques entre autres l'analyse, la géométrie différentielle et la topographie (*conformal mapping*). C'est en 1899 que Pick publie sa formule dans un article ayant pour titre «Geometrisches zur Zahlenlehre» dans la revue *Zeitschrift d. vereines 'Lotos'* de Prague [19]. Pendant près d'un demi-siècle, ce résultat resta inconnu. C'est dans *Mathematical Snapshots* [28] (aussi disponible en français [29]) que Hugo Steinhaus l'a réellement fait connaître sans nommer Pick dans le texte, mais en insérant la référence de son article à la bibliographie. Ainsi, c'est peut-être grâce à lui que l'on n'a pas oublié la vraie origine du résultat et que celui-ci porte le nom de Pick aujourd'hui. Un fait intéressant de la vie de Georg Alexander Pick est qu'il fut un bon ami d'Albert Einstein. L'article de Duane de Temple [5], par exemple, nous apprend que ces deux compagnons partageaient les mêmes goûts musicaux. En 1942, l'armée allemande occupa la ville de Prague où il vivait. Il fut déporté dans le camp de concentration de Theresienstadt où il mourut le 26 juillet de la même année.

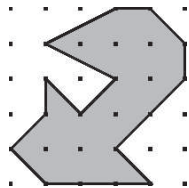


FIG. 1 UN PREMIER EXEMPLE.

Reçu le 19 mars 2004 et, sous forme définitive, le 1er septembre 2004.

La formule de Pick est utilisée pour calculer l'aire d'un polygone de réseau dans le plan. Un polygone de réseau est un polygone dont les sommets ont des coordonnées entières dans un système d'axes prédéfini. L'aire d'un tel polygone P est alors donnée par la relation

$$(1.1) \quad \text{Aire}(P) = I + \frac{B}{2} - 1,$$

où B est le nombre de points frontières et I est le nombre de points à l'intérieur du polygone. On aura l'occasion de mieux définir ces termes à la prochaine section.

À la Figure 1 par exemple, $I = 7$, $B = 16$ et l'aire du polygone est alors

$$\text{Aire}(P) = 7 + \frac{16}{2} - 1 = 14.$$

Depuis les années 1960, plusieurs articles ont été publiés sur la formule de Pick. On y trouve diverses preuves du théorème [2, 4, 5, 12, 13, 17, 21, 28, 29, 30] ou d'équivalence avec d'autres résultats [6, 8, 9, 16], des généralisations à des polygones [3, 10, 11, 25, 26, 27, 31] et à des réseaux [20, 24] plus généraux et même à des espaces à trois dimensions et plus [14, 22, 23, 26].

Le but de ce travail est de faire une présentation cohérente des résultats anciens et nouveaux sur le sujet. En premier lieu, on introduit les définitions des termes utilisés, ensuite des résultats sur la décomposition d'un polygone en triangles sont présentés et la démonstration du théorème de Pick suit. Finalement, on termine avec des généralisations de la formule de Pick dans les dernières sections selon les types de polygones.

2. Définitions. Cette section contient plusieurs définitions et des énoncés de faits que nous admettrons sans démonstration.

Considérons une suite de points $\{a_i\}_{i=0}^n$ du plan telle que trois points consécutifs soient toujours différents et jamais alignés. Deux points successifs a_{i-1} et a_i joints entre eux forment le *segment* $\overline{a_{i-1}a_i}$. La suite des segments $\{\overline{a_{i-1}a_i}\}_{i=1}^n$ forme une *ligne brisée*. Un *polygone* est une ligne brisée fermée, c'est-à-dire telle que $a_0 = a_n$. Les segments d'un polygone peuvent se croiser, mais ne peuvent pas se superposer.

Étant donné un polygone P représenté par la suite de points $\{a_i\}_{i=0}^n$, l'ensemble des *sommets* de P est $\bigcup_{i < j} \{\overline{a_{i-1}a_i} \cap \overline{a_{j-1}a_j}\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points de la suite et des points d'intersection entre les segments. Un *côté* d'un polygone est un segment ou une partie de segment entre deux sommets. L'ensemble des côtés du polygone est son *périmètre*.

Un polygone P délimite un certain nombre de régions connexes à l'aide de son périmètre, ce sont les composantes connexes du complémentaire de P . La région connexe non bornée délimitée par P est appelée sa *région extérieure non bornée*. Une région connexe bornée délimitée par P est appelée *région extérieure bornée*, ou *trou*, si toute ligne polygonale partant d'un point de cette région et se terminant dans la région extérieure non bornée croise le polygone P un nombre pair de fois. L'union de la région extérieure non bornée et des régions extérieures bornées forme l'*extérieur* de P . D'autre part une composante connexe déterminée par P est appelée *région intérieure*, si une ligne polygonale partant d'un point de cette région et se terminant dans la région

extérieure non bornée (ou toute région extérieure bornée) croise le polygone P un nombre impair de fois. L'union des régions intérieures forme l'*intérieur* du polygone P . L'*aire* d'un polygone est la somme des aires des régions intérieures de celui-ci.

Deux régions connexes d'un polygone sont dites *adjacentes* si elles ont au moins un côté en commun. Dans le cas contraire, elles sont dites *non adjacentes*. Notons que deux régions intérieures, ou deux régions extérieures, ne peuvent être adjacentes.

Un polygone est dit *simple* s'il n'y a pas d'intersection entre deux segments non consécutifs, ainsi aucun des points de la suite qui le définit ne s'y retrouve plus d'une fois, sauf les extrémités $a_0 = a_n$. Autrement, on le dit *non simple*.

Un polygone *quasi simple* est un polygone non simple délimitant une seule région intérieure dont au moins un sommet de la suite le définissant est répété (sans tenir compte du dernier point a_n de la suite).

Notons qu'un polygone simple ou quasi simple possède une seule région intérieure. Également, un polygone quasi simple peut être vu comme un polygone simple duquel on a enlevé un ou des polygones simples. Finalement, tout polygone non simple est obtenu à partir de polygones simples et quasi simples reliés entre eux par un ou des sommets.

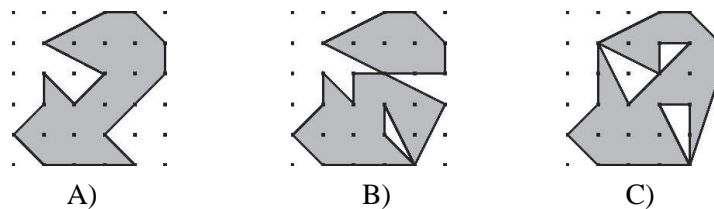


FIG. 2 EXEMPLES : POLYGONES A) SIMPLE, B) NON SIMPLE ET C) QUASI SIMPLE.

On appelle *diagonale* d'un polygone P un segment entièrement contenu dans une seule région intérieure du polygone, qui relie deux sommets de P et dont la seule intersection du segment avec le périmètre sont les deux sommets en question.

Si on peut ajouter des diagonales qui ne se croisent pas (sauf à leurs extrémités) à un polygone P jusqu'à ce que l'intérieur de P soit partitionné en triangles, on dit qu'on a une *décomposition de P en triangles*.

Un *réseau* est défini à partir d'une base B d'un espace vectoriel et est l'ensemble des points à coordonnées entières par rapport à cette base choisie. Ici on utilise la base canonique du plan; le réseau est alors l'ensemble des points du plan à coordonnées entières par rapport à la base canonique.

Un *polygone de réseau* est un polygone dont les sommets appartiennent au réseau. Un *point frontière* d'un polygone de réseau est un point du réseau sur le périmètre d'un polygone. Un *point intérieur* d'un polygone de réseau est un point du réseau à l'intérieur d'un polygone.

Un triangle est dit *élémentaire* s'il est un polygone simple de réseau n'ayant aucun point intérieur et trois points frontières. Une *triangulation* est une partition d'un polygone de réseau en triangles élémentaires. Si R est une région à trianguler, on notera souvent par R' une triangulation de R .

3. Triangulation. Il existe plus d'une preuve du théorème de Pick [2, 4, 5, 12, 13, 17, 21, 28, 29, 30]. Celle présentée ici s'inspire de [5] et [13]. Nous avons simplifié la démonstration en isolant les différents résultats en lemmes que l'on retrouve dans cette section.

On accepte la proposition suivante sans démonstration. On peut retrouver ce résultat dans [15] ou [18] par exemple.

Lemme 3.1. *Tout polygone simple P à n sommets possède au moins une décomposition en $(n - 2)$ triangles dont l'ensemble des sommets des triangles de la décomposition sont les sommets de P .*

On obtient alors immédiatement le résultat suivant.

Lemme 3.2. *Dans un polygone simple P à n sommets la somme des angles internes est $(n - 2)\pi$.*

Un résultat important pour la suite concerne la possibilité d'obtenir une triangulation d'un polygone.

Lemme 3.3. *Tout polygone simple de réseau à n sommets possède au moins une triangulation.*

Démonstration. Il s'agit de développer une manière de diviser un polygone simple de réseau de sorte que l'on ait à la fin que des triangles élémentaires. En vertu du Lemme 3.1, il existe une décomposition de P en $(n - 2)$ triangles. Il reste donc à montrer que, quel que soit le triangle de réseau, il est possible d'en faire une triangulation. L'algorithme est le suivant :

- 1) tant qu'il reste des points intérieurs :
 - a) choisir un point intérieur,
 - b) le relier aux trois autres sommets du triangle dans lequel il se trouve (par conséquent, il y a deux triangles de plus dans la triangulation) ;
- 2) tant qu'il reste des points frontières :
 - a) choisir un point frontière,
 - b) le relier aux sommets opposés au côté de chacun des triangles sur lesquels il se trouve (ainsi, il y a un (ou deux) triangle(s) de plus dans la triangulation).

Comme un triangle de réseau possède un nombre fini de points frontières et de points intérieurs, éventuellement tous les triangles seront élémentaires. \square

Notons qu'il est possible d'obtenir des résultats équivalents au lemmes 3.1 et 3.3 pour un polygone non simple.

Le lemme suivant est à la base du théorème de Pick. Il est intéressant de remarquer comment le résultat s'appuie sur des idées très simples.

Lemme 3.4. *Soit un polygone simple de réseau P contenant B points frontières dont V sommets et I points intérieurs. Quelle que soit la triangulation de P , elle contiendra toujours*

$$(3.1) \quad N = 2I + B - 2$$

triangles élémentaires.

Démonstration. Notons premièrement que les $(B + I)$ points sont les sommets des triangles élémentaires et qu'ainsi toute triangulation de P possède $(B + I)$ sommets. Calculons de deux façons différentes la somme des angles internes de tous les triangles élémentaires composant une triangulation quelconque. En vertu du Lemme 3.2, la contribution des V sommets sera de $(V - 2)\pi$. Celle des $(B - V)$ autres points frontières sera de $(B - V)\pi$, car ce sont des angles plats. Finalement, celle des I points intérieurs sera de $2I\pi$, car ce sont des angles pleins. Supposons qu'il y a N triangles élémentaires, la somme des trois dernières contributions devra être égale à $N\pi$. D'où,

$$\begin{aligned} N\pi &= (V - 2)\pi + (B - V)\pi + 2I\pi \\ N &= 2I + B - 2. \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 3.5. [16] *Soit un polygone simple de réseau P triangulé possédant E arêtes entre deux points de réseau, N triangles élémentaires et B points frontières. Alors, on a la relation suivante*

$$(3.2) \quad 2E = 3N + B.$$

Démonstration. Chacun des N triangles possède 3 côtés. Ainsi, $3N$ compte deux fois le nombre d'arêtes internes, car celles-ci appartiennent à deux triangles, mais une seule fois le nombre d'arêtes sur la frontière qui sont du même nombre que les points frontières. \square

4. Aire d'un polygone simple : le théorème de Pick. Pour débiter cette section nous admettrons le résultat suivant.

Lemme 4.1. *Un triangle de sommets $O(0, 0)$, $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$ a une aire de $|x_1y_2 - x_2y_1|/2$.*

On démontre alors le prochain résultat.

Lemme 4.2. [5, 13] *L'aire d'un triangle élémentaire est $\frac{1}{2}$.*

Démonstration. Soit T_1 un triangle élémentaire arbitraire. Supposons, sans perte de généralité, que ses sommets sont $(0, 0)$, (a, b) et (c, d) . Puisqu'il s'agit d'un polygone de réseau, a, b, c et $d \in \mathbb{Z}$. Ainsi $|ad - bc| \in \mathbb{N}$. De plus, par hypothèse $ad \neq bc$, d'où $|ad - bc| \in \mathbb{N}^*$ et alors $|ad - bc| \geq 1$. Donc

$$\frac{|ad - bc|}{2} = \text{Aire}(T_1) \geq \frac{1}{2}.$$

Étant donné que T_1 est arbitraire, on a comme résultat intermédiaire que l'aire de n'importe quel triangle élémentaire est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$. Supposons maintenant que T_1 est inclu dans un carré dont les côtés, de longueur n , sont parallèles au système d'axe. Choisissons deux sommets du triangle et relier-les, de façon perpendiculaire aux côtés du carré, à deux points frontières de celui-ci dans la direction opposée au triangle bien sûr. On a donc un triangle élémentaire et deux polygones que l'on sait triangulables. Il existe donc une triangulation contenant le triangle T_1 et, en vertu du Lemme 3.4,

$$\begin{aligned}
N &= 2I + B - 2 \\
&= 2(n - 1)^2 + 4n - 2 \\
&= (2n^2 - 4n + 2) + 4n - 2 \\
&= 2n^2.
\end{aligned}$$

L'aire du carré est bien sûr n^2 . Ainsi, pour une triangulation du carré faite par les triangles élémentaires $T_1, T_2, \dots, T_{2n^2}$, on a

$$\frac{1}{2} \leq \text{Aire}(T_1) = n^2 - \sum_{i=2}^{2n^2} \text{Aire}(T_i) \leq n^2 - \sum_{i=2}^{2n^2} \frac{1}{2} = n^2 - (n^2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

D'où le résultat. \square

La preuve du théorème de Pick qui suit est courte étant donné qu'elle découle des résultats précédents.

Théorème 4.3. (Théorème de Pick) *Soit P un polygone simple de réseau possédant I points intérieurs et B points frontières. Alors,*

$$(4.1) \quad \text{Aire}(P) = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Démonstration. En vertu du Lemme 3.4, P possède $(2I + B - 2)$ triangles élémentaires. Or le Lemme 4.2 assure que chaque triangle élémentaire a une aire de $\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(P) &= (\text{Aire d'un triangle élémentaire}) \cdot (\text{Nombre de triangles élémentaires}) \\
&= \frac{1}{2}(2I + B - 2) \\
&= I + \frac{B}{2} - 1. \quad \square
\end{aligned}$$

5. Caractéristiques d'Euler. En 1967, un des premiers articles sur le théorème de Pick depuis Hugo Steinhaus [28, 29] a été publié dans *American Mathematical Monthly*. Effectivement, Niven et Zuckerman [17] trouvaient que la démonstration du théorème de Pick faite par Steinhaus était trop brève et, dans le but de faire connaître cet élégant résultat, ils ont construit une nouvelle argumentation plus complète, mais longue. Un fait intéressant à remarquer dans cet article est qu'il n'est jamais fait mention du théorème de Pick. De même pour les articles de J. E. Reeve [22, 23] parus en 1957 et 1959. Il faudra attendre la parution de *Introduction to Geometry* de H. S. M. Coxeter [4], en 1969, et de *Ingenuity in Mathematics* de R. Honsberger [13], en 1970, pour clairement voir le nom de Pick associé à la formule (1.1). La dernière partie de leur article porte sur les généralisations : "... Theorem 4 [Pick] does not generalize to polygons that are not simple. In fact, the formula for the area is not correct at a common vertex". Malheureusement pour eux, ils se trompaient, il existe une façon de modifier la formule de Pick pour trouver l'aire de polygones non simples. Cette nouvelle formule apparaît dans quelques articles [11, 26], mais seul celui de Rosenholtz [25] contient

une démonstration. Cette formule utilise les caractéristiques d'Euler [1, 7] que nous abordons dans cette section.

On définit et calcule les *caractéristiques d'Euler* d'un polygone P et de son périmètre ∂P , que l'on note $\chi(P)$ et $\chi(\partial P)$, de la façon suivante :

$$(5.1) \quad \chi(P) = V' - E' + F' ,$$

$$(5.2) \quad \chi(\partial P) = V'|_{\partial P} - E'|_{\partial P}$$

où V' , E' et F' sont respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces bornées d'une triangulation de P , et où $V'|_{\partial P}$ et $E'|_{\partial P}$ désignent le nombre de sommets et d'arêtes de la triangulation sur le périmètre ∂P de P .

Or, lorsque l'objet est un polygone, il n'est pas nécessaire d'avoir une triangulation de l'objet pour en calculer la caractéristique d'Euler. Il suffit de la calculer à partir des sommets, côtés et faces déjà présents, donc à partir du périmètre du polygone. C'est ce que nous assure la proposition suivante.

Théorème 5.1. *Soit P un polygone. Alors on peut calculer $\chi(P)$ et $\chi(\partial P)$ à partir des nombres de sommets V , côtés E et régions intérieures F du polygone P de la façon suivante :*

$$(5.3) \quad \chi(P) = V - E + F,$$

$$(5.4) \quad \chi(\partial P) = V - E.$$

Démonstration. Partons d'une triangulation de P . Commençons par retirer les arêtes situées à l'intérieur du polygone de telle sorte que l'ensemble des arêtes et sommets reste connecté en tout instant au périmètre (il suffit de procéder à l'inverse de la procédure de triangulation obtenue à l'aide des lemmes 3.1 et 3.3). Deux cas se présenteront. Utilisons l'indice zéro pour symboliser la situation initiale.

Cas 1. Les deux sommets resteront après la suppression de l'arête, car au moins une autre arête s'y termine, ainsi

$$V = V_0$$

$$E = E_0 - 1$$

$$F = F_0 - 1.$$

Cas 2. Un des deux sommets est éliminé par la suppression de l'arête, alors

$$V = V_0 - 1$$

$$E = E_0 - 1$$

$$F = F_0.$$

Dans les deux cas, la valeur de $\chi(P) = V - E + F$ n'est pas modifiée. Il ne reste plus qu'à éliminer les sommets sur les côtés du polygone. En les enlevant un par un, à chaque étape on a

$$V = V_0 - 1$$

$$E = E_0 - 1$$

$$F = F_0,$$

de sorte que ni $\chi(P) = V - E + F$, ni $\chi(\partial P) = V - E$ ne s'en trouvent changés. On conclut que les valeurs des caractéristiques d'Euler d'un polygone ne dépendent pas de la triangulation de celui-ci, mais seulement de la nature de son périmètre. \square

Théorème 5.2. *Soit P un polygone possédant T trous dans son périmètre. Alors,*

$$(5.5) \quad \chi(P) = 1 - T.$$

Démonstration. Un polygone peut être défini comme étant plusieurs polygones simples et quasi simples reliés par leur périmètre. Or, un polygone quasi simple est un polygone simple duquel on a retiré un ou des polygones simples. Notons qu'on peut reconstruire un polygone de façon séquentielle en ajoutant ou retranchant un polygone simple à la fois. Procédons donc par récurrence sur le nombre de polygones simples.

Pour un polygone P simple, comme les sommets et les côtés sont du même nombre et qu'une seule face est présente, nous avons

$$\chi(P) = V - E + F = 1 = 1 - 0 = 1 - T.$$

De façon générale, supposons que P est un polygone pour lequel la relation $\chi(P) = V_P - E_P + F_P = 1 - T_P$ est vérifiée. Ajoutons un polygone simple Q au polygone P en connectant n sommets de l'un à n sommets de l'autre. Ainsi, deux cas sont possibles.

Cas 1. Le polygone simple Q est un $(T + 1)$ -ième trou dans le périmètre de P . Le nombre de régions intérieures F se verra augmenter de $(n - 1)$. Ainsi

$$\begin{aligned} V_{P \cup Q} &= V_P + V_Q - n, \\ E_{P \cup Q} &= E_P + E_Q, \\ F_{P \cup Q} &= F_P + (n - 1) = F_P + F_Q + n - 2, \\ T_{P \cup Q} &= T_P + 1. \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} \chi(P \cup Q) &= V_{P \cup Q} - E_{P \cup Q} + F_{P \cup Q} \\ &= (V_P + V_Q - n) - (E_P + E_Q) + (F_P + F_Q + n - 2) \\ &= \chi(P) + \chi(Q) - n + n - 2 \\ &= (1 - T_P) + 1 - 2 \\ &= 1 - (T_P + 1) \\ &= 1 - T_{P \cup Q}. \end{aligned}$$

Cas 2. Le polygone simple Q est une nouvelle région intérieure du polygone P . Cela ajoute $(n - 1)$ trous entre les n sommets connectés. Ainsi

$$\begin{aligned} V_{P \cup Q} &= V_P + V_Q - n, \\ E_{P \cup Q} &= E_P + E_Q, \\ F_{P \cup Q} &= F_P + F_Q, \\ T_{P \cup Q} &= T_P + (n - 1). \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
 \chi(P \cup Q) &= V_{P \cup Q} - E_{P \cup Q} + F_{P \cup Q} \\
 &= (V_P + V_Q - n) - (E_P + E_Q) + (F_P + F_Q) \\
 &= \chi(P) + \chi(Q) - n \\
 &= (1 - T_P) + 1 - n \\
 &= 1 - (T_P + n - 1) \\
 &= 1 - T_{P \cup Q}.
 \end{aligned}$$

La formule est donc vérifiée dans tous les cas. Dans le premier, un trou est ajouté, et dans le deuxième $(n - 1)$ trous sont ajoutés. \square

6. Aire d'un polygone non simple. Il existe une façon de modifier la formule de Pick pour trouver l'aire de polygones non simples en utilisant les caractéristiques d'Euler.

Théorème 6.1. [25] *Soit P un polygone de réseau possédant I points intérieurs et B points frontières. Alors l'aire de P est obtenue par la formule*

$$(6.1) \quad \text{Aire}(P) = I + \frac{B}{2} - \chi(P) + \frac{\chi(\partial P)}{2}.$$

Démonstration. On construit une triangulation P' de P . Ensuite, on crée le double D de P' en collant la frontière de P' à une copie d'elle-même et en gonflant l'intérieur. L'objet D est donc un étrange ballon avec des faces triangulaires. Soit V_I , E_I et F_I le nombre de sommets, d'arêtes et de faces de l'objet $I = P$ ou D . Posons

$$(6.2) \quad \chi(D) = V_D - E_D + F_D.$$

Alors

$$(6.3) \quad \chi(D) = (2V_{P'} - V|_{\partial P'}) - (2E_{P'} - E|_{\partial P'}) + 2F_{P'}$$

$$(6.4) \quad = 2(V_{P'} - E_{P'} + F_{P'}) - (V|_{\partial P'} - E|_{\partial P'})$$

$$(6.5) \quad = 2\chi(P') - \chi(\partial P')$$

$$(6.6) \quad = 2\chi(P) - \chi(\partial P).$$

De plus, on a les relations

$$(6.7) \quad V_D = 2I + B,$$

$$(6.8) \quad 2E_D = 3F_D,$$

$$(6.9) \quad F_D = 2F_{P'},$$

et

$$(6.10) \quad \text{Aire}(P) = \frac{F_{P'}}{2}.$$

De (6.2), on tire

$$F_D = \chi(D) - V_D + E_D,$$

et de (6.6)

$$F_D = 2\chi(P) - \chi(\partial P) - V_D + E_D.$$

Puis, de (6.7) et (6.8)

$$F_D = 2\chi(P) - \chi(\partial P) - (2I + B) + \frac{3}{2}F_D,$$

et alors

$$\frac{F_D}{2} = 2I + B - 2\chi(P) + \chi(\partial P).$$

On obtient alors le résultat à l'aide de (6.10) et (6.9). \square

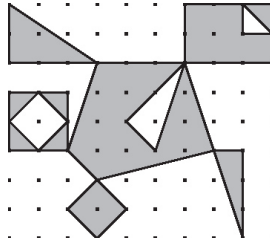


FIG. 3 POLYGONE NON SIMPLE.

La Figure 3 illustre un polygone non simple. En effet, il est possible de parcourir son périmètre en passant une et une seule fois sur chaque côté et en revenant au point de départ. Notons que ce polygone contient trois trous. On calcule les points intérieurs et frontières aisément : $I = 11$ et $B = 39$. Calculons maintenant les caractéristiques d'Euler sans faire de triangulation. On trouve $V = 27$, $E = 39$, $F = 10$ et $T = 3$. Ainsi $\chi(P) = -2$, $\chi(\partial P) = -12$, et en utilisant (6.1) on trouve

$$\text{Aire}(P) = 11 + \frac{39}{2} - (-2) + \frac{-12}{2} = \frac{53}{2}.$$

7. Polygone généralisé. Souvent dans les articles sur le théorème de Pick, il est suggéré de vérifier la formule pour des polygones plus généraux, entre autres pour des polygones contenant d'autres polygones. La preuve de cette simple formule apparaît dans [27]. Avant d'aborder celle-ci, voici quelques définitions pour les polygones généralisés qui utilisent le vocabulaire de la géographie.

On dit que plusieurs polygones dans le plan forment un *polygone généralisé* si

- 1) il n'y a aucune intersection (l'intersection de sommets est une intersection) entre polygones distincts ;
- 2) il existe un polygone, un *continent*, qui contient tous les autres polygones dans son intérieur (on nommera ces autres polygones des *lacs*) ;
- 3) aucun des polygones le composant n'est à l'intérieur de plus d'un polygone.

Lorsque tous les polygones sont simples, on dira qu'on a un *polygone généralisé simple*.

On définit alors le *périmètre* d'un polygone généralisé comme étant l'union des périmètres de tous les polygones le composant ou comme la rive du continent et celle de tous ses lacs.

L'*intérieur* d'un polygone généralisé est la région qui peut être accédée à partir de l'extérieur du continent par un nombre impair de croisements du périmètre du polygone. En fait, c'est la partie commune à l'intérieur du continent et à l'extérieur des lacs. De même, l'*extérieur* d'un polygone généralisé est composé de l'extérieur du continent et de l'intérieur des lacs.

Plusieurs polygones généralisés dans le plan forment une *union de polygones généralisés* si chacun est situé dans l'extérieur des autres. Sa *région intérieure* et son *périmètre* sont l'union respectivement des régions intérieures et des périmètres de chacun des polygones généralisés la composant. On peut ainsi dire qu'une union de polygones généralisés permet la présence d'autres *continents* et d'*îles* dans les lacs.

On définit l'*aire* d'un polygone généralisé P comme étant la somme des aires de ses régions intérieures de P , autrement dit c'est la surface de la terre ferme. De même l'aire d'une union de polygones généralisés est la somme des aires de chacun des polygones généralisés qui la composent.

On admet qu'il est possible d'obtenir une décomposition d'un polygone généralisé en triangles en adaptant la démonstration du Lemme 3.1 et ensuite d'obtenir une triangulation comme au Lemme 3.3.

8. Aire d'un polygone généralisé simple. Le premier résultat concernant la généralisation de la formule de Pick pour des polygones plus généraux composés de polygones simples peut s'écrire sans utiliser explicitement les caractéristiques d'Euler.

Théorème 8.1. [27] *L'aire d'un polygone généralisé simple de réseau P contenant L lacs est*

$$(8.1) \quad \text{Aire}(P) = I + B/2 - 1 + L,$$

où I est le nombre de points intérieurs et B celui des points frontières du polygone généralisé simple.

Démonstration. Soit A_0 l'aire du continent (ce qui comprend les lacs) et A_l l'aire du l -ième lac. Soit I_l le nombre de points intérieurs et B_l le nombre de points frontières du l -ième lac. Alors

$$\begin{aligned} \text{Aire}(P) &= A_0 - \sum_{l=1}^L A_l \\ &= \left(I_0 + \frac{B_0}{2} - 1\right) - \sum_{l=1}^L \left(I_l + \frac{B_l}{2} - 1\right) \\ &= \left(I + \sum_{l=1}^L (I_l + B_l)\right) + \frac{B_0}{2} - 1 - \sum_{l=1}^L \left(I_l + \frac{B_l}{2}\right) + \sum_{l=1}^L 1 \\ &= I + \frac{B_0}{2} + \sum_{l=1}^L \frac{B_l}{2} - 1 + L \\ &= I + \frac{B}{2} - 1 + L. \quad \square \end{aligned}$$

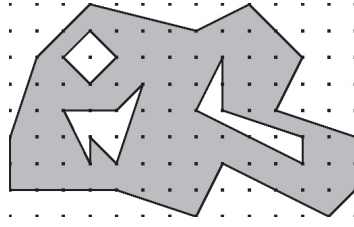


FIG. 4 POLYGONE GÉNÉRALISÉ SIMPLE.

À la Figure 4, trois lacs sont dans un continent et l'aire de la région grise peut être calculée en utilisant (8.1). On a $I = 41$, $B = 40$ et $L = 3$, ainsi

$$\text{Aire}(P) = 41 + \frac{40}{2} - 1 + 3 = 63.$$

9. Caractéristiques d'Euler revisitées. Pour un polygone généralisé les formules (5.1) et (5.3) ne coïncident pas. À partir d'une triangulation et en procédant selon la démonstration du Théorème 5.1, il est aisé de voir, qu'à un moment donné, on déconnectera les périmètres de deux polygones (un continent et un lac ou bien deux lacs d'une même face). Dans ce cas, en enlevant une arête (E devient $E_0 - 1$), le nombre de sommets reste inchangé ($V = V_0$) ainsi que le nombre de faces ($F = F_0$). Alors la valeur de $\chi(P)$ augmente de 1. Elle augmentera de 1 à chaque fois qu'on déconnectera une partie du périmètre en enlevant une arête. Pour remédier à cet effet et garder une valeur constante pour la caractéristique, on considère plutôt la caractéristique

$$(9.1) \quad \widehat{\chi}(P) = V' - E' + \sum_{f=1}^{F'} (2 - C_f),$$

où C_f est le nombre de composantes connexes du périmètre de la face f . On conserve inchangée toutefois la caractéristique du périmètre en posant $\widehat{\chi}(\partial P) = \chi(\partial P)$. Notons que pour une triangulation on a $\widehat{\chi}(P) = \chi(P)$, car pour chaque triangle $C_f = 1$ et ainsi

$$(9.2) \quad \sum_{f=1}^{F'} (2 - C_f) = \sum_{f=1}^{F'} (1) = F'.$$

Théorème 9.1. Soit P un polygone généralisé. Alors on peut calculer $\widehat{\chi}(P)$ et $\widehat{\chi}(\partial P)$ à partir des nombres de sommets V , côtés E , régions intérieures F et lacs L du polygone généralisé P de la façon suivante :

$$(9.3) \quad \widehat{\chi}(P) = V - E + F - L,$$

$$(9.4) \quad \widehat{\chi}(\partial P) = V - E.$$

Démonstration. Comme au Théorème 5.1, partons d'une triangulation de P et éliminons les arêtes et sommets situés à l'intérieur du polygone généralisé en ne déconnectant jamais le périmètre (de la triangulation). Ainsi (9.1) reste valide et à valeur constante, car elle est essentiellement identique à (5.1) puisque dans ce cas $2 - C_f = 1$ pour

chaque face. Ensuite, à chaque fois qu'on enlève une arête, le nombre de sommets V et le nombre de face F restent inchangés et un lac est créé. Ainsi la valeur de la caractéristique reste constante selon la formule (9.3). \square

Notons que pour un polygone généralisé simple ayant L lacs, on aura $V = E$ et $F = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\widehat{\chi}(P) &= V - E + F - L = 1 - L, \\ \widehat{\chi}(\partial P) &= V - E = 0\end{aligned}$$

et (8.1) peut se réécrire sous une forme semblable à (6.1)

$$(9.5) \quad \text{Aire}(P) = I + \frac{B}{2} - \widehat{\chi}(P) + \frac{\widehat{\chi}(\partial P)}{2}.$$

C'est cette formule que nous généraliserons par la suite.

Si on observe que les trous d'un polygone généralisé sont en fait les trous du continent et les faces des lacs, on obtient l'équivalent du Théorème 5.2 pour $\widehat{\chi}(P)$.

Théorème 9.2. *Soit P un polygone généralisé constitué d'un continent ayant T_C trous et de L lacs ayant chacun F_l faces et T_l trous ($l = 1, \dots, L$). Alors les nombres de faces F_P et de trous T_P de P sont*

$$(9.6) \quad F_P = F_C + \sum_{l=1}^L T_l,$$

$$(9.7) \quad T_P = T_C + \sum_{l=1}^L F_l$$

et on a

$$(9.8) \quad \widehat{\chi}(P) = 1 - T_P.$$

Démonstration. On utilise (5.3) et (5.5) pour le continent et chacun des lacs, ainsi on a

$$V_C - E_C + F_C = 1 - T_C,$$

et pour $l = 1, \dots, L$

$$V_l - E_l + F_l = 1 - T_l.$$

Mais

$$V_P = V_C + \sum_{l=1}^L V_l,$$

$$E_P = E_C + \sum_{l=1}^L E_l,$$

$$F_P = F_C + \sum_{l=1}^L T_l,$$

$$T_P = T_C + \sum_{l=1}^L F_l,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi}(P) &= V_P - E_P + F_P - L \\
&= (V_C + \sum_{l=1}^L V_l) - (E_C + \sum_{l=1}^L E_l) + (F_C + \sum_{l=1}^L T_l) - L \\
&= (V_C - E_C + F_C) + \sum_{l=1}^L (V_l - E_l + T_l) - L \\
&= (1 - T_C) + \sum_{l=1}^L (1 - F_l) - L \\
&= 1 - (T_C + \sum_{l=1}^L F_l) \\
&= 1 - T_P.
\end{aligned}$$

De là, le résultat. \square

10. Aire d'un polygone généralisé. La formule (9.5) est également valide pour les polygones généralisés.

Théorème 10.1. *Soit P un polygone généralisé de réseau. L'aire de P peut être calculée par la formule*

$$(10.1) \quad \text{Aire}(P) = I + \frac{B}{2} - \widehat{\chi}(P) + \frac{\widehat{\chi}(\partial P)}{2},$$

où I est le nombre de points intérieurs dans P , et B celui des points frontières sur le périmètre de P . $\widehat{\chi}(P)$ et $\widehat{\chi}(\partial P)$ sont calculées à partir de V , E , F et L . V est le nombre de sommets des polygones composants P , E celui des côtés des polygones composants P , F celui des régions intérieures de P , L celui des lacs dans le continent de P .

Démonstration. Pour $L = 0$, (10.1) est identique à (6.1). Supposons que c'est vrai pour un polygone généralisé P à L lacs et montrons que c'est encore vrai si on ajoute un $(L + 1)$ -ième lac Q pour former le polygone généralisé R . On a

$$\begin{aligned}
\text{Aire}(R) &= \text{Aire}(P) - \text{Aire}(Q) \\
&= \left(I_P + \frac{B_P}{2} - \widehat{\chi}(P) + \frac{\widehat{\chi}(\partial P)}{2} \right) - \left(I_Q + \frac{B_Q}{2} - \widehat{\chi}(Q) + \frac{\widehat{\chi}(\partial Q)}{2} \right) \\
&= (I_P - I_Q - B_Q) + \left(\frac{B_P}{2} + \frac{B_Q}{2} \right) \\
&\quad - \left(\frac{V_P}{2} - \frac{E_P}{2} + F_P - L \right) + \widehat{\chi}(Q) - \left(\frac{V_Q}{2} - \frac{E_Q}{2} \right) \\
&= \left(I_R + \frac{B_R}{2} \right) - \left(\frac{V_P + V_Q}{2} - \frac{E_P + E_Q}{2} + F_P \right) + \widehat{\chi}(Q) + L \\
&= \left(I_R + \frac{B_R}{2} \right) - \left(\frac{V_R}{2} - \frac{E_R}{2} + F_P \right) + \widehat{\chi}(Q) + L.
\end{aligned}$$

Si Q possède T_Q trous dans son périmètre, alors ces T_Q régions seront considérées intérieures pour le polygone généralisé R . Or, on sait que $\hat{\chi}(Q) = 1 - T_Q$. On pourra donc ajouter ces T_Q régions à F_P pour former ainsi les $F_R = (F_P + T_Q)$ régions intérieures qui contribueront à l'aire de R . Alors

$$\begin{aligned} \text{Aire}(R) &= \left(I_R + \frac{B_R}{2} \right) - \left(\frac{V_R}{2} - \frac{E_R}{2} + F_P \right) + (1 - T_Q) + L \\ &= I_R + \frac{B_R}{2} - \left(\frac{V_R}{2} - \frac{E_R}{2} + (F_P + T_Q) - (L + 1) \right) \\ &= I_R + \frac{B_R}{2} - \hat{\chi}(R) + \frac{\hat{\chi}(\partial R)}{2}. \end{aligned}$$

La formule est donc vérifiée pour $(L + 1)$ lacs. Ce qui démontre le résultat dans tous les cas.

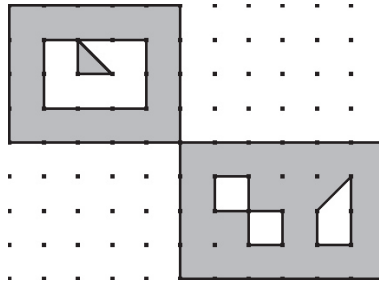


FIG. 5 POLYGONE GÉNÉRALISÉ.

À la Figure 5 nous avons un polygone généralisé pour lequel $I = 3$, $B = 61$, $V = 25$, $E = 28$, $F = 3$, $L = 3$ et $T = 4$. Alors

$$\hat{\chi}(P) = 25 - 28 + 3 - 3 = -3 \quad \text{et} \quad \hat{\chi}(\partial P) = 25 - 28 = -3,$$

ainsi

$$\text{Aire}(P) = 3 + \frac{61}{2} - (-3) + \frac{(-3)}{2} = 35.$$

11. Aire d'une union de polygones généralisés. Notons que (10.1) peut être utilisée pour calculer l'aire des unions de polygones généralisés. Il suffira de faire la somme des lacs dans chacun des continents et dans chacune des îles pour le paramètre L . La signification des autres paramètres est évidente.

Théorème 11.1. *Soit P une union de polygones généralisés de réseau. L'aire de P peut être calculée par la formule*

$$(11.1) \quad \text{Aire}(P) = I + \frac{B}{2} - \hat{\chi}(P) + \frac{\hat{\chi}(\partial P)}{2},$$

où I est le nombre de points intérieurs dans P , et B celui des points frontières sur le périmètre de P . $\hat{\chi}(P)$ et $\hat{\chi}(\partial P)$ sont calculées à partir de V , E , F et L . V est le nombre de sommets des polygones composants P , E celui des côtés des polygones composants

P , F celui des régions intérieures de P , L celui des lacs dans les continents et les îles de P .

Démonstration. Chacun des 4 paramètres est simplement sommé sur chaque polygone généralisé. \square

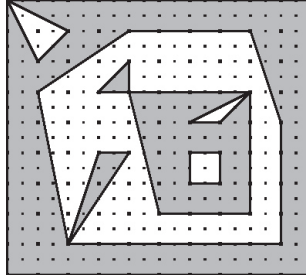


FIG. 6 UNION DE POLYGOUES GÉNÉRALISÉS

À la Figure 6 nous avons une union de polygones généralisés avec un continent, une île et deux lacs (un dans le continent et l'autre dans l'île). Sur le réseau le moins fin, on a $I = 14$, $B = 80$, $V = 26$, $E = 30$, $F = 4$ et $L = 2$, d'où

$$\hat{\chi}(P) = 26 - 30 + 4 - 2 = -2 \quad \text{et} \quad \hat{\chi}(\partial P) = 26 - 30 = -4,$$

et ainsi

$$\text{Aire}(P) = 14 + \frac{80}{2} - (-2) + \frac{(-4)}{2} = 54.$$

Il existe une formule apparaissant dans un article de Varbeg [31] ainsi que dans *Journal fur mathematik* [11] qui ressemble à la formule (11.1) et qui permet de calculer l'aire des unions de polygones généralisés. Toutefois, on doit construire une triangulation pour évaluer la caractéristique d'Euler utilisée dans cette formule. On pourrait toutefois la modifier comme nous avons procédé ici pour ne pas avoir recours à une triangulation.

On peut se débarrasser des caractéristiques d'Euler dans nos formules, il suffit d'utiliser les quantités I , B , V , E , F et L d'un polygone généralisé. On obtient

$$(11.2) \quad \text{Aire}(P) = I + \frac{B - V + E}{2} - F + L.$$

Une autre façon de récrire (11.1) sans les caractéristiques d'Euler est d'introduire la fréquence associée à un point frontière. On remarque qu'une conséquence de notre définition de polygone est qu'il y a toujours un nombre pair de segments qui émergent d'un point frontière. On définit alors la **fréquence** d'un point frontière b , notée $\text{freq}(b)$, comme étant le nombre de segments qui émergent de ce point frontière divisé par deux. Cela représente le nombre de fois que le périmètre passe par ce point. Par exemple, les points frontières des polygones simples sont de fréquence 1.

Théorème 11.2. *Soit P une union de polygones généralisés de réseau. L'aire de P peut être calculée par la formule*

$$(11.3) \quad \text{Aire}(P) = I + \frac{1}{2} \sum_{b=1}^B \text{freq}(b) - F + L,$$

où I est le nombre de points intérieurs de P , B le nombre de points frontières sur le périmètre de P , F le nombre de régions intérieures de P , et L le nombre de lacs dans les continents et les îles de P .

Démonstration. On démontre le résultat pour un polygone généralisé et ensuite on passe à l'union en sommant sur chacun des polygone généralisé composant l'union. Il suffit de démontrer que

$$\sum_{b=1}^B \text{freq}(b) = B - V + E,$$

où V et E sont respectivement le nombre de sommets et de côtés de chacun des polygones composant P . D'abord, remarquons qu'un polygone généralisé est constitué d'un ou de plusieurs polygones non simples et qu'un polygone non simple est constitué de polygones simples liés par leurs sommets. Nous savons que $E - V = 0$ pour les polygones simples et que la valeur de $E - V$ augmente d'autant de fois que deux sommets sont joints, car V ne compte qu'une seule fois chaque sommet. De sorte que

$$E - V = \sum_{b=1}^B \text{freq}(b) - B,$$

ce qui démontre le résultat. \square

Pour le polygone généralisé de la Figure 5, nous avons

$$\sum_{b=1}^B \text{freq}(b) = \frac{128}{2} = 64$$

et donc

$$\text{Aire}(P) = 3 + \frac{64}{2} - 3 + 3 = 35.$$

Pour l'union de polygones généralisés de la Figure 6, nous avons

$$\sum_{b=1}^B \text{freq}(b) = \frac{168}{2} = 84$$

et donc

$$\text{Aire}(P) = 14 + \frac{84}{2} - 4 + 2 = 54.$$

Pour terminer, nous présentons une méthode du calcul de l'aire introduite en [23] et qui s'apparente à la méthode d'extrapolation de Richardson. Elle est basée essentiellement sur le fait que les caractéristiques $\hat{\chi}(P)$ et $\hat{\chi}(\partial P)$ sont indépendantes du réseau. Ainsi, en prenant deux mesures des paramètres I et B sur deux réseaux différents, par exemple en utilisant un second réseau plus fin que le premier, on a

$$\text{Aire}(P) = I_0 + \frac{B_0}{2} - \hat{\chi}(P) + \frac{\hat{\chi}(\partial P)}{2}$$

et

$$\text{Aire}(P) = \frac{1}{m^2} \left[I_m + \frac{B_m}{2} - \widehat{\chi}(P) + \frac{\widehat{\chi}(\partial P)}{2} \right].$$

Nous en déduisons alors

$$(11.4) \quad \text{Aire}(P) = \frac{1}{m^2 - 1} \left[(I_m - I_0) + \frac{(B_m - B_0)}{2} \right].$$

Par exemple, en utilisant le réseau initial et le réseau deux fois plus fin ($m = 2$) pour l'union de polygones généralisés de la Figure 6, nous obtenons

$$I_0 = 14 \text{ et } B_0 = 80,$$

$$I_m = 134 \text{ et } B_m = 164,$$

d'où

$$\text{Aire}(P) = \frac{1}{3} \left[(134 - 14) + \frac{(164 - 80)}{2} \right] = 54.$$

12. Conclusion. Nous avons fait le tour des idées publiées sur le théorème de Pick. D'abord, nous avons démontré le théorème de Pick par étapes successives. Après, nous avons proposé une généralisation aux polygones généralisés en modifiant la caractéristique d'Euler d'un polygone. Les résultats ont été finalement unifiés à la section 11. Notons finalement que des généralisations de ce théorème aux dimensions supérieures à 2 pourraient être explorées.

Remerciements. Ce travail a été rendu possible grâce au soutien financier provenant du CRSNG (Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada) via une bourse de recherche de premier cycle du second auteur et une subvention de recherche individuelle du premier auteur. Les auteurs remercient M. Christian Boucher pour la production des figures.

English extended abstract. The area of a simple lattice polygon P is given by the expression

$$\text{Area}(P) = I + \frac{B}{2} - 1$$

where I is the number of lattice points interior of P , and B the number of lattice points on the boundary of P .

Let $\chi(P)$ and $\chi(\partial P)$ be the Euler's characteristics for a polygon P and its boundary ∂P defined from a triangulation of P :

$$\chi(P) = V - E + F,$$

$$\chi(\partial P) = V - E,$$

where V is the number of vertices of P , E the number of edge of P , and F the number of faces of P . We obtain the following formula for the area of a non simple lattice polygon P :

$$\text{Area}(P) = I + \frac{B}{2} - \chi(P) + \frac{\chi(\partial P)}{2}.$$

A generalized polygon is defined as polygon which contains others polygons in some of its faces. The larger polygon is called a *continent* and the polygons inside are called the *lakes*.

For the area of a simple generalized lattice polygon P , a polygon for which the continent and the lakes are simple polygons, we obtain the formula

$$\text{Area}(P) = I + B/2 - 1 + L,$$

where L is the number of lakes in the faces of P .

For more general polygons, we have to reconsider the Euler's characteristics and obtain a new definition equivalent to the formulas

$$\begin{aligned}\widehat{\chi}(P) &= V - E + F - L, \\ \widehat{\chi}(\partial P) &= V - E.\end{aligned}$$

Then, it follows that the area of a generalized polygon, and also a sum of generalized polygons, is given by

$$\text{Area}(P) = I + \frac{B}{2} - \widehat{\chi}(P) + \frac{\widehat{\chi}(\partial P)}{2}.$$

Finally a formula is given which uses the degree of adjacency of a lattice point with respect to the polygon. A final remark concern a process which looks like the Richardson extrapolation process.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. A. Armstrong, *Basic topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.
2. C. Blatter, *Another proof of Pick's area theorem*, Math. Mag. **70** (1997), 200.
3. W. E. Boykin, *A middle school extension of Pick's theorem to areas of nonsimple closed polygonal regions*, School Science and Math. **95** (1995), 78–82.
4. H. S. M. Coxeter, *Introduction to geometry, Second edition*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969, pp. 208–212.
5. D. DeTemple, *Pick's formula: a retrospective*, Mathematics Notes from Washington State University **32** (novembre 1989); no. 3-4.
6. D. DeTemple and J. M. Robertson, *The equivalence of Euler's and Pick's theorems*, Math. Teacher **67** (1974), 222–226.
7. H. G. Flegg, *From geometry to topology*, Crane, Russak & Co., Inc., New York, 1974.
8. W. W. Funkenbusch, *From Euler's Formula to Pick's formula using an edge theorem*, Amer. Math. Monthly **81** (1974), 647–648.
9. R. W. Gaskell, M. S. Klamkin and P. Watson, *Triangulations and Pick's theorem*, Math. Mag. **49** (1976), 35–37.
10. B. Grünbaum et G. C. Shephard, *Pick's theorem*, Amer. Math. Monthly **100** (1993), 150–161.
11. H. Hadwiger et J. M. Wills, *Neuere Studien über Gitterpolygone*, J. Reine Angew. Math. **280** (1976), 61–69.
12. G. Haig, *A 'natural' approach to Pick's theorem*, Math. Gaz. **64** (1980), 173–177.
13. R. Honsberger, *Ingenuity in Mathematics*, New Mathematical Library, vol. 23, Math. Association of America, Washington, D.C., 1970, pp. 24–37.

14. K. Kolodziejczyk, *Hadwiger-Wills-type higher-dimensional generalizations of Pick's theorem*, Discrete Comput. Geom. **24** (2000), 355–364.
15. N. J. Lennes, *Theorems on the Simple Finite Polygon and Polyhedron*, Amer. J. Math. **33** (1911), 37–62.
16. A. C. F. Liu, *Lattice points and Pick's theorem*, Math. Mag. **52** (1979), 232–235.
17. I. Niven et H. S. Zuckerman, *Lattice points and polygonal area*, Amer. Math. Monthly **74** (1967), 1195–1200.
18. J. O'Rourke, *Computational Geometry in C*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
19. G. Pick, *Geometrisches zur Zahlenlehre*, Sitzungber. Lotos (Prague) **19** (1899), 311–319.
20. C. Polis, *Pick's theorem extended and generalized*, Math. Teacher **84** (1991), 399–401.
21. H. W. Pullman, *An Elementary Proof of Pick's Theorem*, School Science and Mathematics (1979), 7–12.
22. J. E. Reeve, *A further note on the volume of lattice polyhedra*, J. London Math. Soc. **34** (1959), 57–62.
23. J. E. Reeve, *On the volume of lattice polyhedra*, Proc. London Math. Soc. (3) **7** (1957), 378–395.
24. D. Ren et J. R. Reay, *The boundary characteristic and Pick's theorem in the Archimedean planar tilings*, J. Combin. Theory Ser. A **44** (1987), 110–119.
25. I. Rosenholtz, *Calculating surface areas from a blueprint*, Math. Mag. **52** (1979), 252–256.
26. P. R. Scott, *The fascination of the elementary*, Amer. Math. Monthly **94** (1987), 759–768.
27. R. Skevington, *Extending Pic's theorem*, Math. Gaz. **74** (1990), 136–138.
28. H. Steinhaus, *Mathematical Snapshots*, Oxford University Press, New York, 1960.
29. H. Steinhaus, *Mathématiques en instantanés*, Flammarion, Paris, 1964, pp. 92–96.
30. I. Stewart, *Combien de chèvre dans le verger ?*, Pour la science **149** (1990), 108–113.
31. D. E. Varberg, *Pick's theorem revisited*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 584–587.

F. DUBEAU ET S. LABBÉ

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

SHERBROOKE QC J1K 2R1

CANADA

COURRIEL : francois.dubeau@usherbrooke.ca