Ann. Sci. Math. Québec **29** (2005), no. 1, 1–20.

SUR LA CAPITULATION DES $2-$CLASSES D'IDÉAUX DE $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$

ABDELMALEK AZIZI ET IKRAM BENHAMZA

RÉSUMÉ. Soit $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$, d étant un entier positif sans facteur carré et différent de 2. Soit C_2 le 2-groupe de classes de K. Dans le présent travail, on détermine tous les entiers d tels que C_2 soit de type $(2, 2)$. On étudie la capitulation des 2-classes d'idéaux de K (C_2 étant supposé de type $(2, 2)$) dans les sous-extensions propres du 2-corps de classes de Hilbert de K.

ABSTRACT. Let $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$, with d a square-free positive integer different from 2. Let C_2 be the 2-component of the class group of K. In this paper, we determine all the integers d such that C_2 is of type $(2, 2)$. We study the capitulation of the 2-ideal classes of K (C_2 being assumed of type $(2, 2)$) in the subfields of the Hilbert 2-class field of K.

1. Introduction. Soient $\mathbf{k}$ un corps de nombres et $\mathbf{k}^{(1)}$ le corps de classes de Hilbert de $\mathbf{k}$, c'est-à-dire l'extension abélienne maximale non ramifiée de $\mathbf{k}$. Il est connu que tout idéal de $\mathbf{k}$ devient principal (on dit encore capitule) lorsqu'on l'étend à un idéal de $\mathbf{k}^{(1)}$. Toutefois, cette propriété n'est pas toujours vérifiée dans les sous-extensions propres de $\mathbf{k}^{(1)}/\mathbf{k}$. C'est pourquoi plusieurs mathématiciens se sont penchés sur les problèmes de capitulation dans les extensions intermédiaires de $\mathbf{k}^{(1)}/\mathbf{k}$; voir par exemple [1,5,7,16,18,19].

Nous contribuons ici à cette étude par certains résultats sur la capitulation des 2-classes d'idéaux des corps biquadratiques imaginaires de la forme $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$ dont le 2-groupe de classes est de type $(2, 2)$. Puisqu'on est confronté au passage à des questions de groupes de classes et d'unités, les deux premières sections de l'article sont consacrées à ce sujet.

2. Sur le 2-groupe de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$. Dans tout ce qui suit, on désigne par K le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$, d étant un entier positif différent de 2 et sans facteur carré. Soient E_K (resp. E_d) le groupe des unités de K (resp. de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$), W le groupe des racines de l'unité contenues dans K et $\varepsilon_d = r + s\sqrt{d}$, l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$.

On rappelle que l'indice des unités Q de K est l'indice $[E_K : WE_d]$. D'après [3], on a $Q = 1$ ou 2. De plus, $Q = 2$ si et seulement si $N(\varepsilon_d) = 1$ et $r + 1$ ou $r - 1$ est un carré dans $\mathbf{N}$.

Reçu le 17 mai 2001 et, sous forme définitive, le 16 septembre 2003.

On peut se demander pour quels entiers d le 2-groupe de classes de K est de type $(2, 2)$. Une réponse à cette question est fournie par le théorème suivant, extrait de la thèse inédite du second auteur [5] et qu'on trouve aussi dans [17].

Théorème 1. *Le corps $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2})$ a un 2-groupe de classes de type $(2, 2)$ si et seulement si d prend l'une des formes suivantes :*

(i) $d = 2q_1q_2$, $\quad q_1 \equiv -1 \pmod 8$, $\quad q_2 \equiv 3 \pmod 8$ *et* $\left(\dfrac{q_1}{q_2}\right) = +1$.

(ii) $d = pq$, $\quad p \equiv 5 \pmod 8$, $\quad q \equiv -1 \pmod 4$ *et* $\left(\dfrac{2}{q}\right)$ *ou* $\left(\dfrac{p}{q}\right) = -1$.

(iii) $d = p_1p_2$, $\quad p_1 \equiv 5 \pmod 8$, $\quad p_2 \equiv 1 \pmod 8$, $\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right) = -1$.

(iv) $d = q_1q_2$, $\quad q_1 \equiv q_2 \equiv 3 \pmod 8$, $\quad \left(\dfrac{q_1}{q_2}\right) = +1$, $\quad \left(\dfrac{-2}{|k^2X + \ell Y|}\right) = -1$.

(v) $d = 2pq$, $\quad p \equiv 1 \pmod 8$, $\quad q \equiv -1 \pmod 4$ *et* $\left(\dfrac{p}{q}\right) = -1$.

Ici p, p_i, q et q_i sont des entiers premiers positifs. Dans (iv)*, X et Y sont tels que $2q_2 = k^2X^2 + 2\ell XY + 2mY^2$ et $q_1 = \ell^2 - 2mk^2$, X, Y, k, ℓ et m étant dans $\mathbf{Z}$. De plus, $\left(\dfrac{\cdot}{\cdot}\right)$ désigne le symbole de Legendre.*

Preuve. Soient C_2 le 2-groupe de classes de K, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K et K^* le corps des genres de K. Par la théorie des corps de classes, C_2 est isomorphe à $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K)$.

Supposons que C_2 est d'ordre 4. Comme $K \subseteq K^* \subseteq K_2^{(1)}$, trois cas se présentent, à savoir $K^* = K$, $K^* = K_2^{(1)}$ et $[K^* : K] = 2$. Examinons-les à tour de rôle.

Premier cas : $K^* = K$. Notons $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/\mathbf{Q})$. L'extension $K_2^{(1)}/\mathbf{Q}$ est normale ; voir par exemple [11]. On a alors $G/G' = \mathrm{Gal}(K^*/\mathbf{Q})$ et $G' = \mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K^*)$. Comme G/G' est de type $(2, 2)$, alors d'après [20] G' est cyclique et par suite C_2 est cyclique. Ce cas est donc à écarter.

Deuxième cas : $K^* = K_2^{(1)}$. Dans ce cas, si C_2 est d'ordre 4 il est alors de type $(2, 2)$. En effet, C_2 est isomorphe à $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) = \mathrm{Gal}(K^*/K)$. Or $\mathrm{Gal}(K^*/K)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(K^*/\mathbf{Q})$ de type $(2, \ldots, 2)$; voir [10]. Par ailleurs, on sait que

$$[K^* : \mathbf{Q}] = \prod_{p \mid D_K} e(p),$$

où $e(p)$ est l'indice de ramification d'un nombre premier p divisant le discriminant D_K de K ; voir [10]. Donc $K^* = K_2^{(1)}$ implique que

$$\prod_{p \mid D_K} e(p) = 16.$$

Ainsi y a-t-il au plus 4 nombres premiers qui se ramifient dans K et par suite dans $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.

Désignons par p et p_i des nombres premiers positifs congrus à 1 (mod 4) et par q et q_i des nombres premiers positifs congrus à -1 (mod 4). Les formes possibles de d sont

$$2q_1q_2, \quad 2p_1p_2, \quad pq, \quad p_1p_2p_3, \quad pq_1q_2, \quad 2q_1q_2q_3, \quad 2qp_1p_2.$$

D'après [21], on a la relation

$$h = \frac{1}{2}\, Qh(d)h(-2d)h(-2) = \frac{1}{2}\, Qh(d)h(-2d),$$

où Q est l'indice d'unités de K et h, $h(d)$, $h(-2d)$ et $h(-2)$ sont respectivement les nombres de classes de K, $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$, $\mathbf{Q}(\sqrt{-2d}\,)$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$.

Considérons le cas où $d = 2q_1q_2$, avec

$$\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = +1.$$

Soient $C_2'(\ell)$ le 2-groupe de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell}\,)$ au sens restreint et ε_ℓ l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell}\,)$. D'après [13], §10, si q_1 ou $q_2 \equiv 3 \pmod 8$, alors $C_2'(d)$ s'exprime comme le produit de deux groupes cycliques d'ordre 2. Ainsi la 2-partie de $h(d)$ est égale à 2. Dans le cas où $q_1 \equiv q_2 \equiv -1 \pmod 8$, $C_2'(d)$ est le produit de deux groupes cycliques dont un est au moins d'ordre 4, d'où 4 divise $h(d)$.

En outre, on a d'après [13] (voir §11, cas 5) que si $q_2 \equiv 3 \pmod 8$, alors la 2-partie de $h(-2d)$ est égale à 4. Sinon $C_2'(-2d) = C_2'(-q_1q_2)$ est le produit de deux groupes cycliques dont un est au moins d'ordre 4. Conséquemment, 8 divise $h(-2d)$. On en déduit que la 2-partie de h est égale à 4 si et seulement si $q_2 \equiv 3 \pmod 8$ et $Q = 1$.

Ceci est encore équivalent à $q_2 \equiv 3 \pmod 8$ et $q_1 \equiv -1 \pmod 8$. En effet, soit $Q = 1$; montrons que $q_1 \equiv -1 \pmod 8$. Écrivons $\varepsilon_d = r + s\sqrt{2q_1q_2}$, où r et $s \in \mathbf{Z}$. On a $r^2 - 2q_1q_2s^2 = 1$, c'est-à-dire $(r+1)(r-1) = 2q_1q_2s^2$. De plus, le plus grand diviseur commun de $r+1$ et $r-1$ divise 2. Par conséquent, il existe $i, j, k \in I$ tels que $2^i q_1^j q_2^k (r+1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$.

On est alors conduit aux observations suivantes :

(a) L'indice Q est égal à 1 si et seulement si $r+1$ et $2q_1q_2(r+1)$ ne sont pas des carrés dans $\mathbf{N}$. En fait $\sqrt{r-1} \in \mathbf{N} \Leftrightarrow \sqrt{2q_1q_2(r+1)} \in \mathbf{N}$, au vu de la relation $(r+1)(r-1) = 2q_1q_2s^2$.

(b) $2(r+1)$ et $q_1q_2(r+1)$ ne sont pas des carrés dans $\mathbf{N}$. En effet, supposons que $\sqrt{2(r+1)}$ appartienne à $\mathbf{N}$. Il existerait alors deux entiers n et m tels que

$$\begin{cases} r+1 = 2n^2, \\ r-1 = q_1q_2m^2. \end{cases}$$

Mais ceci entraînerait que $2\varepsilon_d = (n\sqrt{2} + m\sqrt{q_1q_2}\,)^2$ et par suite

$$\sqrt{\varepsilon_d} = (2n + m\sqrt{2q_1q_2}\,)/2 \in \mathbf{Q}(\sqrt{2q_1q_2}\,),$$

ce qui contredit le fait que ε_d est l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2q_1q_2}\,)$. Il en est de même si $q_1q_2(r+1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$.

(c) $q_1(r+1)$ n'est pas un carré dans $\mathbf{N}$. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait alors $n, m \in \mathbf{N}$ tels que

$$\begin{cases} r+1 = q_1 n^2, \\ r-1 = 2q_2 m^2. \end{cases}$$

Il s'ensuivrait alors que $2 = q_1 n^2 - 2q_2 m^2$ ou encore $2q_1 \equiv (q_1 n)^2 \pmod{q}_2$, c'est -à-dire

$$\left(\frac{2q_1}{q_2}\right) = -\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = +1,$$

ce qui constitue une contradiction.

(d) $q_2(r+1)$ n'est pas un carré dans $\mathbf{N}$. En effet, dans le cas contraire on pourrait trouver $n, m \in \mathbf{N}$ tels que

$$\begin{cases} r+1 = q_2 n^2, \\ r-1 = 2q_1 m^2. \end{cases}$$

Mais alors on déduirait que $2 = q_2 n^2 - 2q_1 m^2$ et par suite $-4q_1 \equiv (2q_1 m)^2 \pmod{q}_2$, soit encore

$$\left(\frac{-4q_1}{q_2}\right) = -\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = +1,$$

ce qui est absurde.

(e) De la même façon, on montre que $2q_2(r+1)$ n'est pas un carré dans $\mathbf{N}$.

Il découle de tout ceci que $2q_1(r+1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$. Il existe donc $n, m \in \mathbf{N}$ tels que

$$\begin{cases} r+1 = 2q_1 n^2, \\ r-1 = q_2 m^2. \end{cases}$$

Il s'ensuit que $2 = 2q_1 n^2 - q_2 m^2$ ou encore

$$\left(\frac{-2q_2}{q_1}\right) = +1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{q_1}\right) = (-1)^{\frac{{q_1}^2-1}{8}} = +1.$$

On conclut alors que $q_1 \equiv -1 \pmod 8$.

Inversement, si $q_2 \equiv 3 \pmod 8$ et $q_1 \equiv -1 \pmod 8$, alors l'indice Q est égal à 1. Ceci vient du fait que sinon, $r+1$ ou $2q_1q_2(r+1)$ seraient des carrés dans $\mathbf{N}$. Dans le premier cas, il existerait alors $n, m \in \mathbf{N}$ tels que

$$\begin{cases} r+1 = n^2, \\ r-1 = 2q_1 q_2 m^2. \end{cases}$$

On aurait alors $2 = n^2 - 2q_1q_2m^2$ ou encore

$$\left(\frac{2}{q_2}\right) = +1,$$

ce qui mène à une contradiction. Dans le second cas, on pourrait trouver $n, m \in \mathbf{N}$ tels que

$$\begin{cases} r+1 = 2q_1q_2n^2, \\ r-1 = m^2. \end{cases}$$

Par conséquent, on aurait alors $-2 = m^2 - 2q_1q_2n^2$ ou encore

$$\left(\frac{2}{q_2}\right) = \left(\frac{2}{q_1}\right) = -1,$$

ce qui est également absurde.

Tel qu'énoncé au point (i) du théorème 1, il y a donc bien équivalence entre $q_2 \equiv 3 \pmod 8$ et $Q = 1$ d'une part et $q_2 \equiv 3 \pmod 8$ et $q_1 \equiv -1 \pmod 8$ d'autre part.

Par le même raisonnement, on étudie les autres formes de d. On trouve que dans ce cas la 2-partie de h est égale à 4 si et seulement si d vérifie l'une des conditions (i) et (ii) du théorème 1 ci-dessus.

Troisième cas : $[K^* : K] = 2$. Dans ce cas

$$\prod_{p|D_K} e(p) = 8.$$

Donc au plus 3 nombres premiers se ramifient dans K et par suite dans $\mathbf{Q}(\sqrt{d}\,)$. Les formes possibles de d sont

$$2pq, \quad p_1p_2, \quad q_1q_2, \quad 2p, \quad q.$$

Considérons par exemple le cas où $d = 2pq$. Nous utilisons les résultats de [12] et [13] sur la divisibilité par 4 et par 8 de $h(d)$ et de $h(-2d)$. On peut distinguer quatre cas :

(a) $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$

Dans ce cas, $|C_2'(d)| = 4$. D'une part, comme $N(\varepsilon_{2pq}) = +1$, alors $h(d) \equiv 2 \pmod 4$. D'autre part, la 2-partie de $h(-2d)$ qui est égale à $|C_2'(-2d)|$ vaut 2. Par conséquent, la 2-partie de h est égale à 4 si et seulement si l'indice $Q = 2$.

(b) $\left(\frac{p}{q}\right) = +1$, $p \equiv 5 \pmod 8$ et $\left(\frac{-q}{p}\right)_4 = -1$

Dans ce cas, $h(d)$ est congru à 2 (mod 4). En revanche, la 2-partie de $h(-2d)$ est 4. Ainsi la 2-partie de h vaut 4 si et seulement si $Q = 1$.

(c) $\left(\frac{p}{q}\right) = +1$, $p \equiv 5 \pmod 8$ et $\left(\frac{-q}{p}\right)_4 = +1$

Dans ce cas, $h(d) \equiv 2 \pmod 4$, et $8|h(-2d)$. Donc 8 divise h.

(d) $\left(\frac{p}{q}\right) = +1$, $p \equiv 1 \pmod 8$

Dans ce cas, 4 divise $h(d)$ et $h(-2d)$. Donc 8 divise h.

En résumé, la 2-partie de h vaut 4 dans ce cas si et seulement si

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -1 \quad \text{et} \quad Q = 2$$

ou

$$\left(\frac{p}{q}\right) = +1, \quad p \equiv 5 \pmod 8 \quad \text{et} \quad \left(\frac{-q}{p}\right)_4 = -1.$$

Étudions maintenant la structure de C_2 dans ce cas. Soient F un corps de nombres, h_0 le nombre de classes de F et E_F le groupe des unités de F. Soient M une extension quadratique de F, C_M le groupe de classes de M, σ un générateur du groupe de Galois de M/F et t le nombre des idéaux premiers ramifiés dans cette extension.

Théorème 2. *Soient D le sous-groupe de C_M constitué des classes stables par σ, r le rang de la partie libre de E_F, V_F l'ensemble des unités de E_F qui sont normes d'éléments de M et q^* tel que $[V_F : E_F^2] = 2^{q^*}$. Si h_0 est impair, alors l'ordre de D est égal à $h_0 2^{t+q^*-(r+2)}$.*

Preuve. Voir [6], §13 et une note de Lemmermeyer concernant cette dernière formule dans [15]. $\square$

En particulier si F est une extension quadratique imaginaire, dont le nombre de classes est impair et $C_{2,M}$ la 2-partie de C_M, alors on a :

Lemme 3.

(i) *$C_{2,M}$ est de type $(2, \ldots, 2)$ $\Leftrightarrow$ le rang de $C_{2,M} = t + q^* - 2 = r_0$ et $C_{2,M}$ est d'ordre 2^{r_0}.*

(ii) *$C_{2,M}$ est de type $(2, 2)$ $\Leftrightarrow$ $t + q^* = 4$ et $C_{2,M}$ est d'ordre 4.*

Preuve. Voir le lemme 8 dans [4]. $\square$

Remarque 4. Soient $F = \mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$ et $M = K = F(\sqrt{d}\,)$. On suppose que C_2 est d'ordre 4. Alors d'après le théorème 2, $t + q^* - 2 \leq 2$, c'est-à-dire $t + q^* \leq 4$. De plus, on a $E_F = \{-1, +1\}$ et $E_F^2 \subseteq V_F \subseteq E_F$, d'où $q^* = 0$ ou 1.

Soit donc $d = 2pq$ et supposons de plus que l'on ait soit

$$\left(\frac{p}{q}\right) = -1 \quad \text{et} \quad Q = 2$$

ou encore

$$\left(\frac{p}{q}\right) = +1, \quad p \equiv 5 \pmod 8 \quad \text{et} \quad \left(\frac{-q}{p}\right)_4 = -1.$$

On a les propriétés suivantes :

(a) Si $p \equiv 5 \pmod 8$ et $q \equiv -1 \pmod 8$, alors p et q sont inertes dans $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$. De plus, on a $e(2) = 2$. Il n'y a donc que deux idéaux premiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$ qui se ramifient dans K. Par le lemme 3, on voit que C_2 est cyclique.

(b) Si $p \equiv 1 \pmod 8$ et $q \equiv 3 \pmod 8$, alors p et q se décomposent dans $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$ et $t = 4$, d'où $q^* = 0$ et C_2 est de type $(2, 2)$.

(c) Si $p \equiv 5 \pmod 8$ et $q \equiv 3 \pmod 8$, alors p est inerte dans $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$ et q s'y décompose. Ainsi trois premiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$ se ramifient dans $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{2pq}\,)$.

Voyons si -1 est norme d'un élément de K. Soient $F = \mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$ et $K = F(\sqrt{d})$. D'après le théorème normique de Hasse, -1 est norme d'élément de K si et seulement si -1 est norme locale en tout idéal premier $\mathcal{P}$ de F. En d'autres termes, on a :

$$(2pq, -1)_{\mathcal{P}} = +1 \quad \text{pour tout } \mathcal{P} \text{ idéal premier de } F = \mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,).$$

Soit $(2pq, -1)_{\mathcal{P}}$ le symbole de Hilbert de $2pq$ et -1 en $\mathcal{P}$, dont les propriétés sont rappelées dans [4]. Soit $q = Q_1Q_2$, où Q_1, Q_2 sont deux idéaux premiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$. On trouve $(2pq, -1)_{Q_1} = -1$, d'où -1 n'est pas norme dans K. Par conséquent C_2 est cyclique.

(d) Si $p \equiv 1 \pmod 8$ et $q \equiv -1 \pmod 8$, alors p se décompose dans $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$ tandis que q y est inerte. Comme $e(2) = 2$ alors $t = 3$. On a encore besoin de voir si -1 est norme dans K. On trouve cette fois que

$$(2pq, -1)_{\mathcal{P}} = +1 \quad \text{pour tout } \mathcal{P} \text{ idéal premier de } F = \mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,).$$

Ainsi, -1 est norme de $K = F(\sqrt{2pq}\,)$ et par conséquent C_2 est de type $(2, 2)$.

Bref dans ce cas C_2 est de type $(2, 2)$ si et seulement si $d = 2pq$ et

$$p \equiv 1 \pmod 8, \quad q \equiv -1 \pmod 4, \quad \left(\frac{p}{q}\right) = -1 \quad \text{et} \quad Q = 2.$$

Avec le même raisonnement que pour le cas (i) du théorème 1, on vérifie qu'on a toujours $Q = 2$.

On traite de la même façon les autres formes de d. On trouve que C_2 est de type $(2, 2)$ et $[K^* : K] = 2$ si et seulement si d vérifie l'une des conditions (iii), (iv) ou (v) du théorème 1. Ceci achève la démonstration du théorème 1. $\square$

Soit L une sous-extension propre de $K_2^{(1)}/K$. D'après [7], le nombre des 2-classes d'idéaux de K qui capitulent dans L est égal à $2 \cdot [E_K : N_{L/K}(E_L)]$, E_K et E_L étant respectivement les groupes d'unités de K et de L.

Certaines sous-extensions propres de $K_2^{(1)}/K$ se présentent sous la forme

$$\mathbf{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{-m}\,).$$

Ainsi, dans le but d'étudier la capitulation des 2-classes d'idéaux de K, on détermine d'abord les groupes d'unités de ces sous-extensions.

3. Unités de certains corps de la forme $\mathbf{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{-m}\,)$. On désigne par SFU un système fondamental d'unités. On note Q l'indice des unités de K et ε_ℓ l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell})$ pour un entier positif ℓ sans facteur carré.

Proposition 5. *Soit $d = 2q_1q_2$ avec q_1 et q_2 deux nombres premiers tels que*

$$q_1 \equiv -1 \pmod 8, \quad q_2 \equiv 3 \pmod 8 \quad et \quad \left(\frac{q_1}{q_2}\right) = +1.$$

Alors

(i) $\{\sqrt{\varepsilon_{2q_1q_2}}, \sqrt{\varepsilon_{q_1}\varepsilon_{2q_2}}, \sqrt{-\varepsilon_{2q_2}}\}$ *est un SFU de* $\mathbf{Q}(\sqrt{q_1}, \sqrt{2q_2}, \sqrt{-2}\,)$.
(ii) $\{\sqrt{\varepsilon_{2q_1}\varepsilon_{q_2}}, \sqrt{\varepsilon_{q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}}, \sqrt{-\varepsilon_{2q_1}\varepsilon_{q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}}\}$ *est un SFU de* $\mathbf{Q}(\sqrt{2q_1}, \sqrt{q_2}, \sqrt{-2}\,)$.
(iii) $\{\sqrt{\varepsilon_{q_1q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}}, \varepsilon_2, \varepsilon_{q_1q_2}\}$ *est un SFU de* $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2}, \sqrt{-1}\,)$.

Preuve. Selon [21], un SFU d'un corps de nombres biquadratiques $L_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}\,)$ est constitué de trois éléments μ_1, μ_2 et μ_3 choisis parmi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, leurs produits ou leurs racines carrées appartenant à L_0, d_3 étant la partie sans facteurs carrés du produit d_1d_2.

Quant au corps $L = \mathbf{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{-m}\,)$, $m \neq 1$, si on indice d'unités vaut 1, il garde alors le même SFU que L_0. Sinon, il existe une unité ε de L_0 pour laquelle $m\varepsilon$ est un carré dans L_0 et $\{\mu_1, \mu_2, \sqrt{-\varepsilon}\}$ est un SFU de L ; voir [1].

(1) Si $L_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{q_1}, \sqrt{2q_2}\,)$, on voit que $\sqrt{2\varepsilon_{q_1}}$, $\sqrt{2\varepsilon_{2q_2}}$, $\sqrt{\varepsilon_{2q_1q_2}}$ et $\sqrt{\varepsilon_{q_1}\varepsilon_{2q_2}}$ appartiennent à $\mathbf{Q}(\sqrt{q_1}, \sqrt{2q_2}\,)$ et par suite $\{\sqrt{\varepsilon_{2q_1q_2}}, \sqrt{\varepsilon_{q_1}\varepsilon_{2q_2}}, \sqrt{-\varepsilon_{2q_2}}\,\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{q_1}, \sqrt{2q_2}, \sqrt{-2}\,)$.

(2) Si $L_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{2q_1}, \sqrt{q_2}\,)$, on montre que $\sqrt{2\varepsilon_{2q_1}}$, $\sqrt{2\varepsilon_{q_2}}$, $\sqrt{2\varepsilon_{2q_1q_2}}$ sont dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2q_1}, \sqrt{q_2}\,)$. Ainsi $\sqrt{\varepsilon_{2q_1}\varepsilon_{q_2}}$, $\sqrt{\varepsilon_{q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}}$, $\sqrt{\varepsilon_{2q_1}\varepsilon_{2q_1q_2}}$ et $\sqrt{2\varepsilon_{2q_1}\varepsilon_{q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}}$ appartiennent à $\mathbf{Q}(\sqrt{2q_1}, \sqrt{q_2}\,)$. Donc $\{\sqrt{\varepsilon_{2q_1}\varepsilon_{q_2}}, \sqrt{\varepsilon_{q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}}, \sqrt{-\varepsilon_{2q_1}\varepsilon_{q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}}\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{2q_1}, \sqrt{q_2}, \sqrt{-2}\,)$.

(3) Si $L_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2}\,)$, alors $\sqrt{\varepsilon_{q_1q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2}\,)$, et $\sqrt{\varepsilon_{q_1q_2}} \notin \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2}\,)$. L'unité ε_2 étant de norme -1, $\{\sqrt{\varepsilon_{q_1q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}}, \varepsilon_2, \varepsilon_{q_1q_2}\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2}\,)$. L'indice des unités de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2}, \sqrt{-1}\,)$ vaut 1 ; voir [5]. Ainsi $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2}, \sqrt{-1}\,)$ a le même SFU que $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2}\,)$. $\square$

Les propositions suivantes s'obtiennent par des raisonnements semblables.

Proposition 6. *Soit $d = pq$ avec p et q deux nombres premiers tels que*

$$p \equiv 5 \pmod 8, \quad q \equiv -1 \pmod 4 \quad et \quad \left(\frac{2}{q}\right) \quad ou \quad \left(\frac{p}{q}\right) = -1.$$

Alors

(i) $\{\sqrt{\varepsilon_{pq}}, \varepsilon_p, \sqrt{-\varepsilon_q}\}$ *ou* $\{\sqrt{\varepsilon_q\varepsilon_{pq}}, \varepsilon_p, \sqrt{-\varepsilon_q}\}$ *est un SFU de* $\mathbf{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{-2}\,)$.
(ii) $\{\sqrt{\varepsilon_{2p}\varepsilon_{pq}}, \varepsilon_{2p}, \sqrt{-\varepsilon_{2q}}\}$ *ou* $\{\sqrt{\varepsilon_{pq}}, \varepsilon_{2p}, \sqrt{-\varepsilon_{2q}}\}$ *est un SFU de* $\mathbf{Q}(\sqrt{2p}, \sqrt{2q}, \sqrt{-2}\,)$.
(iii) $\{\sqrt{\varepsilon_{2pq}\varepsilon_{pq}}, \varepsilon_2, \varepsilon_{2pq}\}$ *est un SFU de* $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq}, \sqrt{-1}\,)$.

Proposition 7. *Soit $d = p_1p_2$ avec p_1 et p_2 deux nombres premiers tels que*

$$p_1 \equiv 5 \pmod 8, \quad p_2 \equiv 1 \pmod 8 \quad et \quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1.$$

Alors un seul des ensembles $\{\sqrt{\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}\varepsilon_{p_1p_2}}, \varepsilon_{p_2}, \varepsilon_{p_1p_2}\}$ *ou* $\{\sqrt{-\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}\varepsilon_{p_1p_2}}, \varepsilon_{p_2}, \varepsilon_{p_1p_2}\}$ *est un SFU de* $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{-2})$.

Preuve. Soit $L_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2})$. Les unités $\varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{p_2}$ et $\varepsilon_{p_1p_2}$ sont toutes de norme -1. Donc si on note $B = \{\varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{p_2}, \varepsilon_{p_1p_2}, \varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}, \varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_1p_2}, \varepsilon_{p_2}\varepsilon_{p_1p_2}, \varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}\varepsilon_{p_1p_2}\}$, l'unique élément de B qui peut être un carré dans L_0 est $\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}\varepsilon_{p_1p_2}$.

Supposons d'abord que $\sqrt{\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}\varepsilon_{p_1p_2}} \in L_0$. Dans ce cas, $\{\sqrt{\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}\varepsilon_{p_1p_2}}, \varepsilon_{p_2}, \varepsilon_{p_1p_2}\}$ est un SFU de L_0. Soit Q_L l'indice des unités de $L = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{-2})$. On a $Q_L = 1$ ou 2 et $Q_L = 2$ si et seulement s'il existe une unité ε de L_0 telle que $\sqrt{2\varepsilon} \in L_0$; voir [3]. Pour calculer l'indice Q_L on se ramène à résoudre l'équation

$$(-1)^t d\sqrt{\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}\varepsilon_{p_1p_2}}^{i_1}\varepsilon_{p_2}^{i_2}\varepsilon_{p_1p_2}^{i_3} = \alpha^2, \quad i_j,\, t \in \{0,1\}, \quad \alpha \in L_0. \tag{1}$$

D'une part, la positivité des ε_{p_i} exige que t soit nul. D'autre part, on a :

(a) Si $i_1 = 1$, alors on aura

$$(N_{L_0/\mathbf{Q}(\sqrt{p_1})}(\alpha))^2 = \pm 2^2\varepsilon_{p_1}.$$

Autrement dit, $\sqrt{\varepsilon_{p_1}}$ ou $\sqrt{-\varepsilon_{p_1}}$ appartiendra à $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1})$, ce qui est impossible.

(b) Si $i_1 = 0$, on doit alors résoudre l'équation

$$2\varepsilon_{p_2}^{i_2}\varepsilon_{p_1p_2}^{i_3} = \alpha^2, \quad i_j \in \{0,1\}, \quad \alpha \in L_0. \tag{2}$$

Or si $i_2 = 1$, alors en appliquant la norme de L_0 sur $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1p_2})$, on obtient

$$-2^2\varepsilon_{p_1p_2}^{2i_3} = (N_{L_0/\mathbf{Q}(\sqrt{p_1p_2})}(\alpha))^2,$$

ce qui entraîne que $\sqrt{-1} \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1p_2})$. On en déduit qu'il faut alors avoir $i_2 = 0$. Mais dans ce cas $2\varepsilon_{p_1p_2}^{i_3} = \alpha^2$ implique que $\sqrt{2} \in L_0$ ou $\sqrt{-1} \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1})$, ce qui n'est pas vrai sous nos conditions. Par conséquent l'équation (1) n'est pas résoluble, et l'indice Q_L est égal à 1. On conclut que $\{\sqrt{\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}\varepsilon_{p_1p_2}}, \varepsilon_{p_2}, \varepsilon_{p_1p_2}\}$ est un SFU de L aussi.

Supposons maintenant que $\sqrt{\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}\varepsilon_{p_1p_2}} \notin L_0$. Dans ce cas, $\sqrt{2\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}\varepsilon_{p_1p_2}} \in L_0$; voir [1]. De plus, $\{\varepsilon_{p_1}, \varepsilon_{p_2}, \varepsilon_{p_1p_2}\}$ est un SFU de L_0 et l'indice des unités Q_L est égal à 2. Par conséquent, $\{\sqrt{-\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}\varepsilon_{p_1p_2}}, \varepsilon_{p_2}, \varepsilon_{p_1p_2}\}$ est un SFU de L. □

Proposition 8. *Soit* $d = q_1q_2$ *avec* q_1 *et* q_2 *deux nombres premiers tels que*

$$q_1 \equiv q_2 \equiv 3 \pmod 8, \qquad \left(\frac{q_1}{q_2}\right) = +1 \quad et \quad \left(\frac{-2}{|k^2X + \ell Y|}\right) = -1,$$

où $2q_2 = k^2X^2 + 2\ell XY + 2mY^2$ *et* $q_1 = \ell^2 - 2mk^2$, X, Y, k, ℓ *et* m *étant dans* $\mathbf{Z}$. *Alors* $\{\sqrt{\varepsilon_{2q_1}\varepsilon_{2q_2}}, \sqrt{\varepsilon_{2q_2}\varepsilon_{q_1q_2}}, \sqrt{-\varepsilon_{2q_2}}\}$ *ou* $\{\sqrt{\varepsilon_{2q_1}\varepsilon_{2q_2}}, \sqrt{\varepsilon_{q_1q_2}}, \sqrt{-\varepsilon_{2q_2}}\}$ *est un SFU de* $\mathbf{Q}(\sqrt{2q_1}, \sqrt{2q_2}, \sqrt{-2})$.

Proposition 9. *Soit $d = 2pq$ avec p et q deux nombres premiers tels que*

$$p \equiv 1 \pmod 8, \quad q \equiv -1 \pmod 4 \quad \textit{et} \quad \left(\frac{p}{q}\right) = -1.$$

Alors $\{\sqrt{\varepsilon_{2q}\varepsilon_{2pq}}, \varepsilon_p, \sqrt{-\varepsilon_{2q}}\,\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2q}, \sqrt{-2}\,)$.

Remarque 10. Pour les preuves détaillées de ces propositions, ainsi que d'autres résultats sur les unités des corps $\mathbf{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{-m}\,\}$, nous référons à [5]. On trouve en [3] et [2] d'autres travaux du premier auteur, utilisant la même méthode.

4. Capitulation des 2-classes d'idéaux de $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$.

4.1. Préliminaires. Soient $\mathbf{k}$ un corps de nombres, $\mathbf{k}_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{k}$ (c'est-à-dire l'extension abélienne maximale non ramifiée pour tous les premiers finis et infinis de $\mathbf{k}$ et dont le degré est une puissance de 2 sur $\mathbf{k}$), $\mathbf{k}_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbf{k}_2^{(1)}$ et $G_2 = \mathrm{Gal}(\mathbf{k}_2^{(2)}/\mathbf{k})$.

On définit le groupe des quaternions Q_m, le groupe diédral D_m, et le groupe semi-diédral S_m, tous d'ordre 2^m, $m > 1$, par

$$\begin{aligned} Q_m &= \langle x, y\rangle, \text{ où } x^{2^{m-2}} = y^2 = a,\ a^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1}, \\ D_m &= \langle x, y\rangle, \text{ où } x^{2^{m-1}} = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1}, \\ S_m &= \langle x, y\rangle, \text{ où } x^{2^{m-1}} = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{2^{m-2}-1}. \end{aligned}$$

D'après [14], on a le résultat suivant.

Théorème 11. *Supposons que G_2 est d'ordre 2^m, $m > 1$ et que $G_2/G_2' \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Si $G_2' \neq 1$, alors G_2 est isomorphe au groupe des quaternions Q_m, au groupe diédral D_m, ou au groupe semi-diédral S_m.*

Supposons que $G_2/G_2' \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, et soient $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ et $\mathbf{k}_3$ les trois sous-extensions propres de $\mathbf{k}_2^{(1)}/\mathbf{k}$. On note $j_i : C_{\mathbf{k}} \to C_{\mathbf{k}_i}$, l'application du groupe de classes de $\mathbf{k}$ dans celui de $\mathbf{k}_i$, $i = 1, 2, 3$ qui est induite par extension d'idéaux. Rappelons qu'une extension $\mathbf{k}_i$ est dite

de type (A) $\Leftrightarrow |\ker j_i \cap N_{\mathbf{k}_i/\mathbf{k}}(C_{\mathbf{k}_i})| > 1$,
de type (B) $\Leftrightarrow |\ker j_i \cap N_{\mathbf{k}_i/\mathbf{k}}(C_{\mathbf{k}_i})| = 1$,

où $N_{\mathbf{k}_i/\mathbf{k}}(C_{\mathbf{k}_i})$ est le sous-groupe du groupe de classes de $\mathbf{k}$ engendré par les normes des classes d'idéaux de $\mathbf{k}_i$. En fait c'est le sous-groupe de $C_{\mathbf{k}}$ qui correspond à $\mathbf{k}_i$ par la théorie des corps de classes. Par conséquent :

(i) Si $G_2' = 1$, alors $\mathbf{k}_2^{(2)} = \mathbf{k}_2^{(1)}$ et $G_2 \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

(ii) Si $G_2' \neq 1$, alors il existe une sous-extension quadratique F de $\mathbf{k}_2^{(2)}$ sur $\mathbf{k}_2^{(1)}$. Le corps F est de degré 8 sur $\mathbf{k}$ et on a :

Théorème 12. *Soient $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{k}_i \subseteq \mathbf{k}_2^{(1)} \subseteq F \subseteq \mathbf{k}_2^{(2)}$, comme ci-dessus.*

(i) *Si $\mathbf{k}_2^{(2)} = \mathbf{k}_2^{(1)}$, alors les $\mathbf{k}_i$ sont de* type (A)*, $|\ker j_i| = 4$, $i = 1, 2, 3$ et $G_2 \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.*

(ii) *Si* $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{k}) \simeq Q_3$, *alors* $\mathbf{k}_i$ *est de* type (A), $|\ker j_i| = 2$, *pour* $i = 1, 2, 3$ *et* $G_2 \simeq Q_3$.

(iii) *Si* $\mathrm{Gal}(F/\mathbf{k}) \simeq D_3$, *alors* $\mathbf{k}_2$ *et* $\mathbf{k}_3$ *sont de* type (B) *et* $|\ker j_2| = |\ker j_3| = 2$. *De plus, si* $\mathbf{k}_1$ *est de* type (B), *alors* $|\ker j_1| = 2$ *et* $G_2 \simeq S_m$. *Si* $\mathbf{k}_1$ *est de* type (A) *et* $|\ker j_1| = 2$, *alors* $G_2 \simeq Q_m$. *Enfin si* $\mathbf{k}_1$ *est de* type (A) *et* $|\ker j_1| = 4$, *alors* $G_2 \simeq D_m$.

Preuve. Voir [14]. □

Soient $\mathbf{k}$ un corps de nombres et $R_\mathbf{k}$ l'ensemble des nombres α de $\mathbf{k}$ premiers avec 2 tels que

(i) il existe un idéal I de $\mathbf{k}$ tel que $I^2 = (\alpha)$,

(ii) il existe x de $\mathbf{k}$ tel que $\alpha \equiv x^2 \pmod 4$ dans $\mathbf{k}$.

Cette dernière condition est satisfaite si et seulement si $\alpha = x^2 + 4r/s$, où r et s sont des entiers algébriques de $\mathbf{k}$ et s est premier avec 2.

On note $\overline{R_\mathbf{k}} = R_\mathbf{k}/(R_\mathbf{k} \cap (\mathbf{k}^\times)^2)$, $E_\mathbf{k}$ le groupe des unités de $\mathbf{k}$ et $U_\mathbf{k} = E_\mathbf{k} \cap R_\mathbf{k}$.

Soit L une extension quadratique non ramifiée de $\mathbf{k}$. Alors il existe un élément $\alpha \in R_\mathbf{k}$ tel que $L = \mathbf{k}(\sqrt{\alpha}\,)$; voir entre autres [1].

Définition 13. *Le corps* $\mathbf{k}$ *est dit de type classe si et seulement si* $U_\mathbf{k} = {E_\mathbf{k}}^2$. *Dans le cas contraire* $\mathbf{k}$ *est dit de type unité.*

Remarque 14. Soit φ l'homomorphisme de $\overline{R_\mathbf{k}}$ dans le 2-groupe de classes de $\mathbf{k}$ qui à la classe d'un élément α de $\overline{R_\mathbf{k}}$ fait correspondre la classe de l'idéal I tel que $I^2 = (\alpha)$. Alors on a $\ker \varphi = U_\mathbf{k}/{E_\mathbf{k}}^2$ et $\mathbf{k}$ est de type classe si et seulement si $\mathrm{Im}\,\varphi$ coïncide avec le sous-groupe de classes au sens restreint engendré par les éléments d'ordre 2 ; voir par exemple [1]. Noter par ailleurs que si $\mathbf{k}$ est de type classe, alors il n'y a pas d'extension quadratique non ramifiée de $\mathbf{k}$ de la forme $\mathbf{k}(\sqrt{\varepsilon}\,)$ avec ε une unité de $\mathbf{k}$.

4.2. Capitulation des 2-classes d'idéaux de $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$. Supposons $d \neq 2$. On note $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, K^* le corps des genres de K, C_2 le 2-groupe de classes de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et $G_2 = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$. On désigne toujours par ε_ℓ l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell}\,)$, par p et p_i des nombres premiers congrus à 1 (mod 4) et par q et q_i des nombres premiers congrus à -1 (mod 4).

Théorème 15. *Soit* $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$, $d \neq 2$. *Supposons que* C_2 *est de type* $(2, 2)$ *et que* $K_2^{(1)} = K^*$. *Alors il y a exactement deux classes de* C_2 *qui capitulent dans chaque sous-extension propre de* $K_2^{(1)}/K$.

La démonstration de ce résultat repose sur le lemme suivant.

Lemme 16. *Soit* d_1 *(resp.* d_2*) un entier positif de la forme* q_1 *ou* $2q_1$ *(resp.* q_2 *ou* $2q_2$*) avec* q_1 *et* q_2 *sont des nombres premiers distincts congrus à* $-1 \pmod 4$. *Soient* ε_{d_1} *et* ε_{d_2} *les unités fondamentales de* $\mathbf{Q}(\sqrt{d_1}\,)$ *et* $\mathbf{Q}(\sqrt{d_2}\,)$. *Alors*

$\sqrt{\varepsilon_{d_1}\varepsilon_{d_2}} \in \mathbf{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}\,)$ *et*

$$N_{\mathbf{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2}\,)/\mathbf{Q}(\sqrt{d_1 d_2}\,)}(\sqrt{\varepsilon_{d_1}\varepsilon_{d_2}}\,) = \begin{cases} +1 & \text{si } q_1 \equiv q_2 \pmod 8, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve du lemme 16. Examinons d'abord $\varepsilon_q = r + s\sqrt{q}$, l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{q}\,)$, $q \equiv -1 \pmod 4$. D'après [2], soit $r + 1$ ou $r - 1$ est un carré dans $\mathbf{N}$ et par suite $\sqrt{2\varepsilon_q} \in \mathbf{Q}(\sqrt{q}\,)$. On doit donc envisager deux cas :

(a) Supposons que $q \equiv -1 \pmod 8$. Alors $r + 1$ est un carré dans $\mathbf{N}$ car sinon il existerait des entiers $n, m \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\begin{cases} r - 1 = n^2, \\ r + 1 = qm^2. \end{cases}$$

Mais alors on aurait $2 = qm^2 - n^2$ ou encore $-2 \equiv n^2 \pmod q$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{-2}{q}\right) = +1,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse sur q. De plus, comme $r + 1$ est un carré dans $\mathbf{N}$, $r + 1$ et $r - 1$ sont respectivement de la forme n^2 et qm^2. Par conséquent, $\sqrt{2\varepsilon_q} = n + m\sqrt{q}$ et $N(\sqrt{2\varepsilon_q}\,) = n^2 - qm^2 = +2$.

(b) Supposons que $q \equiv 3 \pmod 8$. Alors de la même façon, on trouve que $r - 1$ est un carré dans $\mathbf{N}$ et $N(\sqrt{2\varepsilon_q}\,) = -2$.

Examinons maintenant $\varepsilon_{2q} = r + s\sqrt{2q}$, l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2q}\,)$, $q \equiv -1 \pmod 4$. D'après [2], soit $r + 1$ ou $r - 1$ est un carré dans $\mathbf{N}$ et $\sqrt{2\varepsilon} \in \mathbf{Q}(\sqrt{2q}\,)$. En procédant comme dans le premier cas, on trouve :

(a) Si $q \equiv -1 \pmod 8$, alors $N(\sqrt{2\varepsilon_{2q}}\,) = +2$.
(b) Si $q \equiv 3 \pmod 8$, alors $N(\sqrt{2\varepsilon_{2q}}\,) = -2$.

Le résultat découle des informations ci-dessus et du fait que

$$N_{\mathbf{Q}(\sqrt{d_1},\sqrt{d_2}\,)/\mathbf{Q}(\sqrt{d_1 d_2}\,)}(\sqrt{\varepsilon_{d_1}\varepsilon_{d_2}}\,) = \frac{1}{4}N(\sqrt{2\varepsilon_{d_1}}\,)N(\sqrt{2\varepsilon_{d_2}}\,). \quad \square$$

Preuve du théorème 15. On a vu au théorème 1 que sous les conditions énoncées, d ne peut prendre que l'une des deux formes suivantes :

(a) $d = 2q_1q_2$, $q_1 \equiv -1 \pmod 8$, $q_2 \equiv 3 \pmod 8$ et $\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = +1$.
(b) $d = pq$, $p \equiv 5 \pmod 8$, $q \equiv -1 \pmod 4$, et $\left(\frac{2}{q}\right)$ ou $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$.

Dans le cas (a),

$$K_2^{(1)} = \mathbf{Q}(\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2}, \sqrt{2}, \sqrt{-1}\,)$$

et il y a trois sous-extensions quadratiques possibles de $K_2^{(1)}/K$. Considérons-les tour à tour.

(i) Si $K_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{q_1}, \sqrt{2q_2}, \sqrt{-2}\,)$, la proposition 5 entraîne que le groupe E_{K_1} des unités de K_1 est engendré par

$$\{-1, \sqrt{-\varepsilon_{2q_2}}, \sqrt{\varepsilon_{2q_1q_2}}, \sqrt{\varepsilon_{q_1}\varepsilon_{2q_2}}\,\}.$$

Soit N la norme de K_1 sur K. On a $q_1 \equiv -1 \pmod 8$ et $q_2 \equiv 3 \pmod 8$. D'après le lemme 16, on a donc $N(\sqrt{\varepsilon_{q_1}\varepsilon_{2q_2}}\,) = -1$. De plus, $N(\sqrt{\varepsilon_{2q_1q_2}}\,) =$

$\pm\varepsilon_{2q_1q_2}$. Il s'ensuit que $[E_K : N(E_{K_1})] = 1$. Il y a donc exactement deux classes de C_2 qui capitulent dans K_1.

(ii) Si $K_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{q_2}, \sqrt{2q_1}, \sqrt{-2}\,)$, la proposition 5 entraîne que le groupe E_{K_2} des unités de K_2 est engendré par

$$\{-1, \sqrt{\varepsilon_{2q_1}\varepsilon_{q_2}}, \sqrt{\varepsilon_{q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}}, \sqrt{-\varepsilon_{2q_1}\varepsilon_{q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}}\,\}.$$

Soit N la norme de K_2 sur K. Par le lemme 16, la norme de $\sqrt{\varepsilon_{2q_1}\varepsilon_{q_2}}$ est égale à -1. En outre, $\sqrt{\varepsilon_{q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}}$ est de norme $\pm\varepsilon_{2q_1q_2}$. Il s'ensuit que $[E_K : N(E_{K_2})] = 1$. Il y a donc exactement deux classes de C_2 qui capitulent dans K_2.

(iii) Si $K_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q_1q_2}, \sqrt{-1}\,)$, la proposition 5 entraîne que le groupe E_{K_3} des unités de K_3 est engendré par

$$\{\sqrt{i}, \varepsilon_2, \varepsilon_{q_1q_2}, \sqrt{\varepsilon_{q_1q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}}\,\}.$$

Soit N la norme de K_3 sur K. On a $N(\varepsilon_2) = -1$ et $N(\sqrt{\varepsilon_{q_1q_2}\varepsilon_{2q_1q_2}}\,) = \pm\varepsilon_{2q_1q_2}$. Par conséquent, l'indice $[E_K : N(E_{K_3})]$ vaut 1. Il y a donc exactement deux classes de C_2 qui capitulent dans K_3.

Dans le cas (b),

$$K_2^{(1)} = \mathbf{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{2}, \sqrt{-1}\,)$$

et il y a de nouveau trois sous-extensions quadratiques possibles de $K_2^{(1)}/K$. Considérons-les tour à tour, en se rappelant que l'indice Q des unités de K est égal à 1, de sorte que E_K est engendré par $\{-1, \varepsilon_{pq}\}$.

(i) Si $K_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{-2}\,)$, la proposition 6 entraîne que le groupe E_{K_1} des unités de K_1 est engendré par

$$\{-1, \sqrt{\varepsilon_{pq}}, \varepsilon_p, \sqrt{-\varepsilon_q}\,\} \quad \text{ou} \quad \{-1, \sqrt{\varepsilon_q\varepsilon_{pq}}, \varepsilon_p, \sqrt{-\varepsilon_q}\,\}.$$

Dans les deux cas, $N(E_{K_1})$ est engendré par $\{-1, \varepsilon_{pq}\}$. Donc $[E_K : N(E_{K_1})] = 1$. Il y a donc exactement deux classes de C_2 qui capitulent dans K_1.

(ii) Si $K_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{2p}, \sqrt{2q}, \sqrt{-2}\,)$, la proposition 6 entraîne que le groupe E_{K_2} des unités de K_2 est engendré par

$$\{-1, \sqrt{\varepsilon_{2p}\varepsilon_{pq}}, \varepsilon_{2p}, \sqrt{-\varepsilon_{2q}}\,\} \quad \text{ou} \quad \{-1, \sqrt{\varepsilon_{pq}}, \varepsilon_{2p}, \sqrt{-\varepsilon_{2q}}\,\}.$$

On a $N(\varepsilon_{2p}) = -1$, $N(\sqrt{\varepsilon_{2q}\varepsilon_{pq}}\,) = \pm\varepsilon_{pq}$ et $N(\sqrt{\varepsilon_{pq}}\,) = \pm\varepsilon_{pq}$. On en déduit que $[E_K : N(E_{K_2})] = 1$. Il y a donc exactement deux classes de C_2 qui capitulent dans K_2.

(iii) Si $K_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{pq}, \sqrt{-1}\,)$, la proposition 6 entraîne que E_{K_3} est engendré par

$$\{\sqrt{i}, \sqrt{\varepsilon_{2pq}\varepsilon_{pq}}, \varepsilon_2, \varepsilon_{2pq}\}.$$

Comme $N(\varepsilon_2) = -1$ et $N(\sqrt{\varepsilon_{2pq}\varepsilon_{pq}}\,) = \pm\varepsilon_{pq}$, alors $E_K = N(E_{K_3})$. Il y a donc exactement deux classes de C_2 qui capitulent dans K_3.

Ceci conclut la démonstration du théorème 15. $\square$

Corollaire 17. *Soit $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$, $d \neq 2$. Supposons que C_2 est de type $(2,2)$ et que $K_2^{(1)} = K^*$.*

(i) *Si $d = 2q_1q_2$, alors G_2 est quaternionique.*

(ii) *Si $d = pq$ avec $q \equiv 3 \pmod 8$, alors G_2 est quaternionique.*

(iii) *Si $d = pq$ avec $q \equiv -1 \pmod 8$, alors G_2 est quaternionique ou semi-diédral.*

Preuve. (i) Soit $d = 2q_1q_2$ avec

$$q_1 \equiv -1 \pmod 8, q_2 \equiv 3 \pmod 8 \quad \text{et} \quad \left(\frac{q_1}{q_2}\right) = +1.$$

Puisque

$$\left(\frac{-2}{q_2}\right) = +1,$$

alors q_2 se décompose complétement dans $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$. Soient a et b deux entiers tels que $q_2 = (a + b\sqrt{-2}\,)(a - b\sqrt{-2}\,) = a^2 + 2b^2$. Soit en outre I_1l'idéal premier de K tel que

$$(a + b\sqrt{-2}\,)O_K = {I_1}^2,$$

où O_K est l'anneau des entiers de K. Soit enfin I_0 l'idéal premier de K au-dessus de 2. On montre que les classes de I_0 et de I_1 engendrent C_2 et que I_1 capitule dans K_1. Puisque

$$\left(\frac{q_1}{q_2}\right) = +1 = \left(\frac{-2}{q_2}\right),$$

alors I_1 se décompose complètement dans K_1. Ainsi, $\overline{I_1} \in \ker j_1 \cap N_{K_1/K}(C_{K_1})$, c'est-à-dire que K_1 est de type (A). D'après les théorèmes 12 et 15, on déduit que G_2 est quaternionique.

(ii) Soit $d = pq$, avec $p \equiv 5 \pmod 8$ et $q \equiv 3 \pmod 8$. Soit aussi I_0 l'idéal premier de K au-dessus de 2. Le premier q se décompose complètement dans $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$. Soient β_1 et β_2 les idéaux premiers de $\mathbf{Z}[\sqrt{-2}\,]$ au-dessus de q, alors $q\mathbf{Z}[\sqrt{-2}\,] = \beta_1\beta_2$. Soit I_1 l'idéal premier de K au-dessus de β_1 ; alors $\beta_1 O_K = I_1^2$. On montre que les classes de I_0 et de I_1 engendrent C_2 et que I_0 capitule dans K_3. On a $-pq \equiv 1 \pmod 8$. Par conséquent, 2 se décompose complètement dans $\mathbf{Q}(\sqrt{-pq}\,)$, ce qui implique que I_0 se décompose complètement dans K_3. Par conséquent, K_3 est de type (A). D'après les théorèmes 12 et 15, on déduit que G_2 est quaternionique.

(iii) Soit $d = pq$, avec $p \equiv 5 \pmod 8$ et $q \equiv -1 \pmod 8$. Soit aussi I_0 l'idéal premier de K au-dessus de 2. On montre que I_0 capitule dans K_3 et que K_3 est de type (B). On montre aussi que I_0 ne capitule pas dans K_1 ni dans K_2.

Ici le 2-groupe de classes de K n'est pas déterminé à l'aide des idéaux premiers ramifiés dans K. Soit ℓ un entier premier tel que

$$\left(\frac{p}{\ell}\right) = \left(\frac{q}{\ell}\right) = +1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{2}{\ell}\right) = \left(\frac{-1}{\ell}\right) = -1.$$

Le premier ℓ se décompose complètement dans K. Écrivons $\ell O_K = I_1I_2I_3I_4$. Comme

$$\left(\frac{2p}{\ell}\right) = -1,$$

alors I_1 est inerte dans K_2 et $\Phi_{K_2/K}(I_1) \neq 1$, où $\Phi_{K_2/K}$ est l'application d'Artin de K_2 sur K. Par conséquent, I_1 n'est pas principal. Soit m la partie impaire du nombre de classes de K. On a $\overline{I_1{}^m} \neq 1$. De plus, $\Phi_{K_2/K}(I_0 I_1{}^m) \neq 1$, de sorte que C_2 est engendré par les classes de I_0 et de $I_1{}^m$. Comme I_0 se décompose complètement dans K_2, on voit bien que K_2 est de type (B), puisque $\Phi_{K_2/K}(I_1{}^m) = \Phi_{K_2/K}(I_0 I_1{}^m) \neq 1$. Par ailleurs, on a que I_0 est inerte dans K_1 et I_1 se décompose dans K_1. Par conséquent, si $I_1{}^m$ capitule dans K_1, alors K_1 est de type (A) et G_2 est quaternionique. En revanche, si $I_0 I_1{}^m$ capitule dans K_1, alors K_1 est de type (B) et G_2 est semi-diédral. □

Théorème 18. *Soit $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$, $d \neq 2$. Supposons que C_2 est de type $(2,2)$ et que $K_2^{(1)} \neq K^*$. Alors*

(i) *Si $d = q_1 q_2$, alors toutes les classes de C_2 capitulent dans toutes les sous-extensions propres de $K_2^{(1)}/K$.*

(ii) *Si $d = 2pq$, alors toutes les classes de C_2 capitulent dans K^*, tandis que seules deux classes de C_2 capitulent dans chacune des deux autres sous-extensions propres de $K_2^{(1)}/K$.*

(iii) *Si $d = p_1 p_2$, alors exactement deux classes de C_2 capitulent dans chaque sous-extension propre de $K_2^{(1)}/K$.*

Preuve. On sait déjà du théorème 1 que d ne peut prendre que l'une des formes suivantes :

(a) $d = q_1 q_2, q_1 \equiv q_2 \equiv 3 \pmod 8$, $\left(\dfrac{q_1}{q_2}\right) = +1$ et $\left(\dfrac{-2}{|k^2X + \ell Y|}\right) = -1$.

(b) $d = 2pq, p \equiv 1 \pmod 8$, $q \equiv -1 \pmod 4$ et $\left(\dfrac{p}{q}\right) = -1$.

(c) $d = p_1 p_2, p_1 \equiv 5 \pmod 8$, $p_2 \equiv 1 \pmod 8$, $\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right) = -1$.

Dans le cas (a), $K^* = \mathbf{Q}(\sqrt{2q_1}, \sqrt{2q_2}, \sqrt{-2}\,)$, et l'indice $[E_K : N_{K^*/K}(E_{K^*})]$ vaut 2. Soit $h(K^*)$ le nombre de classes de K^* et $h(\ell)$ le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{\ell}\,)$ pour un entier ℓ sans facteur carré. On a

$$h(K^*) = \frac{1}{2^5} Q' h(2q_1) h(2q_2) h(q_1 q_2) h(-2) h(-q_1) h(-q_2) h(-2q_1 q_2),$$

où $Q' = [E_{K^*} : E']$, E' étant le sous-groupe de E_{K^*} engendré par ε_{2q_1}, ε_{2q_2} et $\varepsilon_{q_1 q_2}$; voir [21]. On a $Q' = 2^3$, les nombres $h(2q_1)$, $h(2q_2)$, $h(q_1 q_2)$, $h(-2)$, $h(-q_1)$ et $h(-q_2)$ sont impairs et la 2-partie de $h(-2q_1 q_2)$ vaut 2^3 ; voir [5]. Par conséquent, 4 ne divise pas $h(K^*)$. Il s'ensuit qu'il n'y a pas d'extension abélienne non ramifiée de degré 4 sur K^*. Comme $K \subseteq K^* \subseteq K_2^{(1)} \subseteq K_2^{(2)}$, alors $K_2^{(2)}$ coïncide avec $K_2^{(1)}$. Par conséquent on a une capitulation totale des 2-classes de C_2 dans chaque sous-extension propre de $K_2^{(1)}/K$ (voir théorème 12).

Dans le cas (b), $K^* = \mathbf{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2q}, \sqrt{-2}\,)$ et l'indice $[E_K : N_{K^*/K}(E_{K^*})]$ vaut 2. C'est donc dire que quatre classes de C_2 capitulent dans K^*. Par ailleurs, en calculant $h(K^*)$ comme dans le cas (a), on trouve que 4 divise $h(K^*)$ et par suite $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$.

D'après le théorème 12, ceci entraîne que dans chacune des deux autres sous-extensions propres de $K_2^{(1)}/K$, seules deux classes de C_2 capitulent.

Dans le cas (c), $K^* = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{-2}\,)$ et $[E_K : N_{K^*/K}(E_{K^*})] = 1$. C'est le cas le plus difficile car le fait que $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$ ne nous donne pas d'informations précises sur les deux autres sous-extensions de $K_2^{(1)}/K$. Soient π_1 et π_2 les deux nombres de $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$ qui engendrent les idéaux premiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-2}\,)$ au-dessus de p_2. Ils sont respectivement de la forme $a + b\sqrt{-2}$ et $a - b\sqrt{-2}$, a et b étant des entiers naturels.

Montrons d'abord que K est de type classe. Supposons pour ce faire que K soit de type unité. Soit $\varepsilon in E_K$ tel que l'extension $K(\sqrt{\varepsilon}\,)$ soit distincte de K et non ramifiée sur K. Puisque

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1,$$

alors d'après [9], l'unité $\varepsilon_{p_1p_2}$ est de norme -1 et par suite l'indice d'unités $Q = 1$. Donc on peut écrire ε sous la forme $\pm\varepsilon_{p_1p_2}^e$, avec $e \in \{0, 1\}$. Il faut alors discuter quatre cas :

(i) Si $\varepsilon = +1$, alors $K(\sqrt{\varepsilon}\,) = K$, ce qui est faux.

(ii) Si $\varepsilon = -1$, alors $K(\sqrt{\varepsilon}\,) = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1p_2}, \sqrt{2}, \sqrt{-1}\,)$ est non ramifiée sur K. Or $K^* = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{-2}\,)$ est aussi non ramifiée sur K. Donc $K(\sqrt{\varepsilon}\,) \vee K^* = K(\sqrt{p_1}, \sqrt{2}\,)$ est non ramifiée sur K. De plus $[K(\sqrt{p_1}, \sqrt{2}\,) : K] = 4$ et $K(\sqrt{p_1}, \sqrt{2}\,)$ est abélien sur K. Par conséquent, $K(\sqrt{p_1}, \sqrt{2}\,)$ est exactement le 2-corps de classes de Hilbert de K. Or $K(\sqrt{p_1}, \sqrt{2}\,)$ est aussi abélien sur $\mathbf{Q}$. Il coïncide donc avec le corps de genres de K, ce qui est en contradiction avec les hypothèses.

(iii) Si $\varepsilon = \varepsilon_{p_1p_2}$, alors $K(\sqrt{\varepsilon}\,)$ est non ramifiée sur K et $\varepsilon = x^2 + 4r/s$ où $x \in K$, r et s sont des entiers algébriques de K et s est premier avec 2. Soit $\tau \in \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ défini par :

$$\tau : \quad K \to K, \ell \quad \sqrt{-2} \to \sqrt{-2}, \quad \sqrt{d} \to -\sqrt{d}.$$

On a

$$\tau(\varepsilon) = (\tau(x))^2 + 4\frac{\tau(r)}{\tau(s)} = \tau(\varepsilon_{p_1p_2}) = \varepsilon'_{p_1p_2},$$

le conjugué de $\varepsilon_{p_1p_2}$ dans $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1p_2}\,)$. On en déduit que $K(\sqrt{\tau(\varepsilon)}\,)$ est non ramifiée sur K. Par ailleurs, $\varepsilon\tau(\varepsilon) = -1$ n'est pas un carré dans K. Par conséquent, $K(\sqrt{\varepsilon}\,) \neq K(\sqrt{\tau(\varepsilon)}\,) \subseteq K_2^{(1)}$. Autrement dit,

$$K_2^{(1)} = K(\sqrt{\varepsilon}\,) \vee K(\sqrt{\tau(\varepsilon)}\,) = K(\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{-1}\,).$$

Puisque $K^* = K(\sqrt{p_1}\,) \subseteq K_2^{(1)}$, on conclut que $K(\sqrt{p_1}, \sqrt{-1}\,) = K_2^{(1)}$ ou encore $K_2^{(1)} = K^*$, ce qui n'est pas le cas.

(iv) Si $\varepsilon = -\varepsilon_{p_1p_2}$, on trouve la même contradiction.

Une fois établi que K est de type classe, on sait qu'il existe une unité ε de K telle que $K_1 = K(\sqrt{\pi_1\varepsilon}\,)$ et $K_2 = K(\sqrt{\pi_2\varepsilon}\,)$ sont les deux autres extensions abéliennes non ramifiées et quadratiques de K. On note $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les idéaux premiers de K au-dessus de π_1 et π_2 respectivement. On note A_1 et A_2 les anneaux d'entiers de K_1 et K_2. Les classes de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ engendrent C_2. De plus, on a :

$$\mathcal{P}_1{}^2 = \pi_1 A_1 = (\sqrt{\pi_1\varepsilon}A_1)^2, \quad \mathcal{P}_2{}^2 = \pi_2 A_2 = (\sqrt{\pi_2\varepsilon}A_2)^2.$$

Autrement dit, $\mathcal{P}_1$ capitule dans K_1 et $\mathcal{P}_1 = \sqrt{\pi_1\varepsilon}A_1$. De plus, $\mathcal{P}_2$ capitule dans K_2 et $\mathcal{P}_2 = \sqrt{\pi_2\varepsilon}A_2$. Par ailleurs, soient $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ défini par

$$\sigma : \quad K \to K, \quad \sqrt{-2} \to -\sqrt{-2}, \quad \sqrt{d} \to \sqrt{d},$$

et $\overline{\sigma}$ son prolongement à $K_2^{(1)}$. On a $\overline{\sigma}(K_1) = K_2$ et $\overline{\sigma}(A_1) = A_2$. Supposons que $\mathcal{P}_2$ capitule dans K_1 et soit $\alpha \in K_1$ tel que $\mathcal{P}_2 A_1 = \alpha A_1$. On a $\overline{\sigma}(\pi_2 A_1) = \pi_1 A_2$. Or $\pi_2 A_1 = (\mathcal{P}_2 A_1)^2$ et $\pi_1 A_2 = (\mathcal{P}_1 A_2)^2$. Donc

$$\overline{\sigma}(\mathcal{P}_2 A_1) = \overline{\sigma}(\alpha A_1) = \overline{\sigma}(\alpha) A_2 = \mathcal{P}_1 A_2.$$

Ceci veut dire que $\mathcal{P}_1$ capitule dans K_2. Or un tel type de capitulation (c'est-à-dire une capitulation totale des 2-classes d'idéaux de K dans exactement deux sous-extensions propres de $K_2^{(1)}/K$) ne peut exister d'après le théorème 12. Ainsi $\mathcal{P}_2$ ne capitule pas dans K_1 et de même $\mathcal{P}_1$ ne capitule pas dans K_2. Ceci permet de conclure. $\square$

Corollaire 19. *Sous les hypothèses du théorème 18, on a :*

(i) *Si $d = q_1 q_2$, alors G_2 est de type $(2,2)$.*
(ii) *Si $d = 2pq$, alors G_2 est diédral.*
(iii) *Si $d = p_1 p_2$, alors G_2 est quaternionique.*

Preuve. Les deux premiers résultats découlent immédiatement des théorèmes 12 et 18.
Soit $d = p_1 p_2$, $p_1 \equiv 5 \pmod 8$, $p_2 \equiv 1 \pmod 8$,

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1 \quad \text{et} \quad K^* = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{-2}\,).$$

On garde les notations et les hypothèses de la démonstration du théorème 18. On a $\ker j_3 = \{\overline{1}, \overline{\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2}\}$, avec j_3 est l'application de C_K dans C_{K^*} induite par extension d'idéaux. D'autre part, $\mathcal{P}_1$ est inerte dans K^*. En effet, on a

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1,$$

de sorte que p_2 est inerte dans $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}\,)$. Soit β l'idéal de $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}\,)$ au-dessus de p_2 et β' l'idéal de K^* au-dessus de $\mathcal{P}_1$. On désigne par $f(I_1/I_2)$ le degré résiduel d'un idéal I_1 au-dessus de I_2. On a :

$$f(\beta'/p_2) = f(\beta'/\mathcal{P}_1) \cdot f(\mathcal{P}_1/\pi_1) \cdot f(\pi_1/p_2) = f(\beta'/\beta) \cdot f(\beta/p_2).$$

Or $f(\mathcal{P}_1/\pi_1) = f(\pi_1/p_2) = 1$ et $f(\beta/p_2) = 2$. Donc 2 divise $f(\beta'/\mathcal{P}_1)$ qui est inférieur ou égal à 2. Ce qui veut dire que $f(\beta'/\mathcal{P}_1) = 2$, ou encore $\mathcal{P}_1$ est inerte dans K^*. De même, $\mathcal{P}_2$ est inerte dans K^*. Posons :

$P(K)$,le groupe des idéaux principaux de K.

I_{K^*},le groupe des idéaux fractionnaires de K^*.

$N_{K^*/K}(I_{K^*})$,le sous-groupe de I_K engendré par les normes d'idéaux de K^*.

$\phi_{K^*/K}$,l'application d'Artin de K^*/K.

$\langle\sigma\rangle$,le groupe Gal(K^*/K).

On a $\phi_{K^*/K}(\mathcal{P}_1) = \phi_{K^*/K}(\mathcal{P}_2) = \sigma$, d'où $\phi_{K^*/K}(\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2) = (\sigma)^2 = 1$. Ainsi $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 \in \ker\phi_{K^*/K} = N_{K^*/K}(I_{K^*})P(K)$. D'où $\overline{\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2} \in N_{K^*/K}(C_{K^*})$. On en déduit que K^* est de type (A). Comme exactement deux classes de C_2 capitulent dans les deux autres sous-extensions de $K_2{}^{(1)}/K$, on déduit, d'après le théorème 12, que G_2 est quaternionique. $\square$

English extended abstract. Let $\mathbf{k}$ be an algebraic number field and let $\mathbf{k}^{(1)}$ be the Hilbert class field of $\mathbf{k}$ (i.e., the maximal Abelian unramified extension of $\mathbf{k}$). It is well known that any ideal of $\mathbf{k}$, once extended to $\mathbf{k}^{(1)}$, becomes principal (or capitules) in $\mathbf{k}^{(1)}$. If K is a field between $\mathbf{k}$ and $\mathbf{k}^{(1)}$, one may wonder whether or not an ideal in $\mathbf{k}$ becomes principal in K. Much work has been devoted to this issue; see, e.g., [1], [5], [7], [16], [18], [19].

In this paper, we study the problem of the capitulation of the 2-classes of ideals of imaginary biquadratic fields of the form $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$, whose 2-class group is of type $(2, 2)$. Properties of units and class groups come into play in the study of this question.

Let $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$, where d is a positive square-free integer with $d \neq 2$. Let E_K be the unit group of K and let W be the group of roots of unity of K. Define Q to be the unit index $[E_K : WE_d]$. Our first result is as follows.

Theorem 1. *The 2-class field of $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$ is of type $(2, 2)$ if and only if d has one of the following forms:*

(i) $d = 2q_1q_2, \quad q_1 \equiv -1 \pmod 8, \quad q_2 \equiv 3 \pmod 8$ *and* $\left(\dfrac{q_1}{q_2}\right) = +1$.

(ii) $d = pq, \quad p \equiv 5 \pmod 8, \quad q \equiv -1 \pmod 4$ *and* $\left(\dfrac{2}{q}\right)$ *or* $\left(\dfrac{p}{q}\right) = -1$.

(iii) $d = p_1p_2, \quad p_1 \equiv 5 \pmod 8, \quad p_2 \equiv 1 \pmod 8, \quad \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right) = -1$.

(iv) $d = q_1q_2, \quad q_1 \equiv q_2 \equiv 3 \pmod 8, \quad \left(\dfrac{q_1}{q_2}\right) = +1, \quad \left(\dfrac{-2}{|k^2X + \ell Y|}\right) = -1$.

(v) $d = 2pq, \quad p \equiv 1 \pmod 8, \quad q \equiv -1 \pmod 4$ *and* $\left(\dfrac{p}{q}\right) = -1$.

Here p, p_i, q and q_i are positive prime integers. Moreover, X and Y in (iv) *verify* $2q_2 = k^2X^2 + 2\ell XY + 2mY^2$ *and* $q_1 = \ell^2 - 2mk^2$ *with X, Y, k, ℓ and $m \in \mathbf{Z}$.*

Let us denote the Hilbert 2-class field of K by $K_2^{(1)}$, the genus field of K by K^*, the 2-class group of K by C_2, the Hilbert 2-class field of $K_2^{(1)}$ by $K_2^{(2)}$, and Gal$(K_2^{(2)}/K)$

by G_2. Here p and p_i are always prime numbers congruent to 1 (mod 4) and q and q_i are prime numbers congruent to -1 (mod 4). Our results are as follows.

Theorem 18. *Let $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$, $d \neq 2$. Suppose that C_2 is of type $(2,2)$ and that $K_2^{(1)} \neq K^*$. Then we have:*

(i) *If $d = q_1q_2$, then all the classes of C_2 capitulate in all proper sub-extensions of $K_2^{(1)}/K$. In this case, G_2 is of type $(2,2)$.*
(ii) *If $d = 2pq$, then all the classes of C_2 capitulate in K^*, while two classes of C_2 capitulate in each of the two other proper sub-extensions of $K_2^{(1)}/K$. In this case, G_2 is dihedral.*
(iii) *If $d = p_1p_2$, then exactly two classes of C_2 capitulate in each proper sub-extension of $K_2^{(1)}/K$. In this case, G_2 is quaternionic.*

Corollary 19. *Let $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$, $d \neq 2$. Suppose C_2 is of type $(2,2)$ and assume $K_2^{(1)} \neq K^*$. Then there are exactly two classes of C_2 which capitulate in each proper sub-extension of $K_2^{(1)}/K$.*

(i) *If $d = 2q_1q_2$, then G_2 is quaternionic.*
(ii) *If $d = pq$ with $q \equiv 3 \pmod 8$, then G_2 is quaternionic.*
(iii) *If $d = pq$ with $q \equiv -1 \pmod 8$, then G_2 is quaternionic or semi-dihedral.*

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Azizi, *Capitulation des* 2*-classes d'idéaux de* $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$, Thèse de doctorat; Québec, Université Laval, 1993.
2. A. Azizi, *Sur la capitulation des* 2*-classes d'idéaux de* $k = \mathbf{Q}(\sqrt{2pq}, i)$ *où* $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$, Acta Arith. **94** (2000), 383–399.
3. A. Azizi, *Unités de certains corps de nombres imaginaires et abéliens sur* **Q**, Ann. Sci. Math. Québec **23** (1999), 15–21.
4. A. Azizi, *Sur le* 2*-groupe de classes d'idéaux de* $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **48** (1999), 71–92.
5. I. Benhamza, *Unités des corps* $\mathbf{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{-d}\,)$ *et application au problème de capitulation sur le corps* $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2}\,)$, Thèse, Université Mohamed I, Oujda, Maroc (1997).
6. H. Hasse, *Zahlbericht*, vol. 3, Birkhäuser, 1970.
7. F. P. Heider & B. Schmithals, *Zur Kapitulation der Idealklassen in unverzweigten primzyklischen Erweiterungen*, J. Reine Angew. Math. **336** (1982), 1–25.
8. M. Hirabayashi & K. Yoshino, *Unit indices of imaginary Abelian numbers fields of type* $(2,2,2)$, J. Number Theory **34** (1990), 346–361.
9. J. Hurrellbrink, *On the norm of the fundamental unit*, At Baton Rouge, LA, 1992.
10. M. Ishida, *The Genus Fields of Algebraic Number Fields*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 555, Springer, Berlin, 1976.
11. G. J. Janusz, *Algebraic Number Fields*, Pure Appl. Math., vol. 55, Academic Press, New York, 1973.
12. P. Kaplan, *Divisibilité par* 8 *du nombre des classes des corps quadratiques dont le* 2*-groupe des classes est cyclique, et réciprocité biquadratique*, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 596–608.
13. P. Kaplan, *Sur le* 2*-groupe des classes d'idéaux des corps quadratiques*, J. Reine. Angew. Math. **283/284** (1976), 313–363.

14. H. Kisilevsky, *Number fields with class number congruent to* 4 *mod* 8 *and Hilbert's theorem 94*, J. Number Theory **8** (1976), 271–279.
15. F. Lemmermeyer, *On* 2*-class field towers of imaginary quadratic number fields*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 261–272.
16. K. Miyake, *Algebraic investigations of Hilbert's Theorem 94, the principal ideal theorem and the capitulation problem*, Exposition. Math. **7** (1989), 289–346.
17. T. M. McCall, C. J. Parry & R. R. Ranalli, *The* 2*-rank of the class group of imaginary bicyclic biquadratic fields*, Canad. J. Math. **49** (1997), 283–300.
18. H. Suzuki, *A generalization of Hilbert's theorem 94*, Nagoya Math. J. **121** (1991), 161–169.
19. H. Suzuki, *On the capitulation problem*, Class field theory — its centenary and prospect (Tokyo, 1998), pp. 483–507; Adv. Stud. Pure Math., Math. Soc. Japan, Tokyo, 2001.
20. O. Tassky, *A remark on the class field tower*, J. London Math. Soc. **12** (1937), 82–85.
21. H. Wada, *On the class number and the unit group of certain algebraic number fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966), 201–209.

A. Azizi et I. Benhamza
Département de mathématiques
Faculté des sciences
Université Mohammed I
Oujda, Maroc