Ann. Sci. Math. Québec **25** (2001), no. 1, 23–37.

AU SUJET DE L'ENDROIT DE PREMIER PASSAGE POUR DES PROCESSUS DE DIFFUSION BIDIMENSIONNELS

JEAN-LUC GUILBAULT ET MARIO LEFEBVRE

RÉSUMÉ. Soit un processus de diffusion bidimensionnel $X(t) := \big(X_1(t), X_2(t)\big)$ pour lequel les composantes $X_1(t)$ et $X_2(t)$ sont indépendantes. Soit aussi $T(x_1, x_2)$ l'instant de premier passage à la frontière du rectangle fini $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : c_1 \leq x_1 \leq c_2,\ d_1 \leq x_2 \leq d_2\}$, le point de départ (x_1, x_2) étant situé à l'intérieur de ce rectangle. La probabilité $p(x_1, x_2)$ que le processus heurte un côté particulier du rectangle en premier est déterminée dans le cas du processus de Bessel bidimensionnel ainsi que dans celui d'un processus trouvant applications dans différents domaines, en génétique et en mathématiques financières notamment. En cette dernière matière, ce second processus est un cas particulier du processus de Cox-Ingersoll-Ross ou réputé tel. Les résultats sont exprimés sous forme de séries de Fourier généralisées.

ABSTRACT. Let $X(t) := \big(X_1(t), X_2(t)\big)$ be a two-dimensional diffusion process, where the components $X_1(t)$ and $X_2(t)$ are independent. Let also $T(x_1, x_2)$ be the first hitting time of the process to the boundary of the rectangle $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : c_1 \leq x_1 \leq c_2,\ d_1 \leq x_2 \leq d_2\}$ assumed to be finite, the starting point (x_1, x_2) being located inside the rectangular region. The probability $p(x_1, x_2)$ that the process hit first a given side of the rectangle is explicitly computed in two cases, namely the two-dimensional Bessel process and a second process having applications in various fields, genetics and financial mathematics notably. In this latter topic, this second process can be a particular case of the Cox-Ingersoll-Ross process. The results are expressed as generalized Fourier series.

1. Introduction. Soit $X(t) := \big(X_1(t), X_2(t)\big)$ un processus de diffusion bidimensionnel défini par le système d'équations différentielles stochastiques

$$dX_i(t) = m_i(X_i)dt + \big[\nu_i(X_i)\big]^{1/2}\, dW_i(t) \tag{1}$$

pour $i = 1, 2$; $W_1(t)$ et $W_2(t)$ étant des mouvements browniens standards indépendants. L'instant de premier passage à une frontière rectangulaire ∂D est alors défini par

$$T(x_1, x_2) := \inf\{t > 0 :\ X_1(t) \notin (c_1, c_2) \text{ ou } X_2(t) \notin (d_1, d_2) \mid X_i(0) = x_i,\ i = 1, 2\}, \tag{2}$$

Reçu le 14 juillet 2000 et, sous forme définitive, le 12 avril 2001.

en supposant que le point de départ $(x_1, x_2) := (X_1(0), X_2(0))$ soit situé à l'intérieur du rectangle

$$D := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : c_1 \leq x_1 \leq c_2,\ d_1 \leq x_2 \leq d_2\right\} \tag{3}$$

sis dans le premier quadrant, c_1 et d_1 étant positifs ou égaux à zéro. L'objectif est de déterminer la probabilité que le processus de diffusion bidimensionnel $X(t)$ atteigne en premier le côté droit du rectangle. En clair, il s'agira de déterminer

$$p(x_1, x_2) := \text{Pr}\left[X_1(T) = c_2,\ X_2(T) \in (d_1, d_2) \mid X_i(0) = x_i,\ i = 1, 2\right]. \tag{4}$$

De toute évidence, le choix du côté est arbitraire et qui plus est, si

$$q(x_1, x_2) := \text{Pr}\left[X_1(T) = c_1,\ X_2(T) \in (d_1, d_2) \mid X_i(0) = x_i,\ i = 1, 2\right], \tag{5}$$

alors, par incompatibilité des événements,

$$\begin{aligned} &p(x_1, x_2) + q(x_1, x_2) \\ &\qquad = \text{Pr}\left[X_1(T) = c_1 \text{ ou } c_2,\ X_2(T) \in (d_1, d_2) \mid X_i(0) = x_i,\ i = 1, 2\right] \end{aligned} \tag{6}$$

et ainsi de suite.

Une méthode appropriée à l'étude de ce type de problème consiste à considérer la délimitation de la région comme étant absorbante et c'est par l'intermédiaire de l'équation rétrospective de Kolmogorov qu'il est possible d'obtenir une expression pour $p(x_1, x_2)$. Puisque l'équation de Kolmogorov

$$\sum_{i=1}^{2} \left\{\frac{1}{2}\nu_i(x_i)\rho_{x_i x_i} + m_i(x_i)\rho_{x_i}\right\} = \rho_t, \tag{7}$$

avec $\rho_{x_i x_i} = \partial^2 \rho / \partial x_i^2$, etc., est satisfaite par la fonction de densité de transition

$$\begin{aligned} &\rho(x_1, x_2; u, v, t) := \\ &\quad \text{Pr}\left[X_1(t) \in (u, u + du),\ X_2(t) \in (v, v + dv) \mid X_i(0) = x_i,\ i = 1, 2\right] / du dv, \end{aligned} \tag{8}$$

il ressort de cette dernière, et ce par une simple généralisation du cas unidimensionnel [2], que la fonction $p(x_1, x_2)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\sum_{i=1}^{2} \left\{\frac{1}{2}\nu_i(x_i)p_{x_i x_i} + m_i(x_i)p_{x_i}\right\} = 0. \tag{9}$$

Par suite de cette généralisation et pour le problème du présent article, les conditions aux frontières sont les suivantes :

$$\begin{cases} p(c_1, x_2) = 0, & \forall x_2 \in (d_1, d_2)\ ; \\ p(x_1, d_i) = 0, & \forall x_1 \in [c_1, c_2],\ \text{pour } i = 1, 2\ ; \\ p(c_2, x_2) = 1, & \forall x_2 \in (d_1, d_2). \end{cases} \tag{10}$$

Le problème de la détermination de la probabilité que le processus soit absorbé à une frontière a plutôt qu'à une frontière b (ce qui constitue le problème unidimensionnel équivalent à celui traité dans cet article) fut étudié pour différents processus de diffusion, particulièrement pour le mouvement brownien et le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, nommément par [2]. La fréquence des écrits est cependant considérablement diminuée lorsqu'il s'agit des problèmes équivalents dans des espaces de deux ou trois dimensions : [14, 15, 16, 17] ont obtenu la fonction de densité conjointe de l'instant et de l'endroit de premier passage pour des mouvements browniens avec ou sans dérive à l'intérieur de différentes régions, des cercles et des coquilles sphériques notamment. Quelques différents problèmes furent introduits entre autres par Lefebvre, co-auteur du présent article, qui a établi les fonctions caractéristiques, de densité de probabilité et génératrices des moments pour l'endroit de premier passage de divers processus dans une région semi-infinie du plan [6, 7, 8, 11]. Finalement, certains auteurs ont traité des cas similaires à ceux énoncés ci-dessus mais pour des processus discrets (voir [10, 13]).

Dans un précédent article, les solutions explicites des fonctions $p(x_1, x_2)$ pour trois processus de diffusion : le mouvement brownien, le processus d'Ornstein-Uhlenbeck ainsi que le mouvement brownien géométrique, furent introduites sous forme de séries de Fourier généralisées [9]. Seront maintenant exposés les résultats pour le processus de Bessel (section 2), processus suivi d'un second tirant ses origines de domaines d'applications diverses, notamment en génétique et en mathématiques financières (section 3). En guise de conclusion, des remarques suivront à la section 4.

2. Processus de Bessel. Un processus de diffusion est dit de Bessel si sa spécificité est rendue par la moyenne et la variance infinitésimales, $m_i(x_i)$ et $\nu_i(x_i)$ respectivement, apparaissant dans l'équation différentielle (9) :

$$m_i(x_i) = \frac{\alpha_i - 1}{2x_i} \ (\alpha_i \geq 0) \ \text{ et } \ \nu_i(x_i) \equiv \sigma_i^2 \ (> 0) \text{ pour } i = 1, 2. \tag{11}$$

Le processus de Bessel est ordinairement défini avec $\sigma_i^2 \equiv 1$. Il appert ainsi que déterminer $p(x_1, x_2)$ équivaut à résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante (se reporter à l'équation (9)) :

$$\sum_{i=1}^{2} \left\{ \frac{1}{2}\sigma_i^2 p_{x_i x_i} + \frac{\alpha_i - 1}{2x_i} p_{x_i} \right\} = 0, \tag{12}$$

sous les conditions (10). La méthode dite de la séparation des variables s'avère particulièrement bien adaptée à ce problème et ainsi, en posant

$$p(x_1, x_2) = y_1(x_1) y_2(x_2), \tag{13}$$

résoudre (12) revient à résoudre les équations différentielles ordinaires qui suivent :

$$y_1''(x_1) + \frac{(\alpha_1 - 1)}{\sigma_1^2 x_1} y_1'(x_1) - \frac{2\lambda}{\sigma_1^2} y_1(x_1) = 0 \tag{14}$$

et

$$y_2''(x_2) + \frac{(\alpha_2 - 1)}{\sigma_2^2 x_2} y_2'(x_2) + \frac{2\lambda}{\sigma_2^2} y_2(x_2) = 0, \tag{15}$$

λ étant une constante de séparation. Les fonctions $y_1(x_1)$ et $y_2(x_2)$ doivent satisfaire aux conditions aux frontières (se référer à l'équation (10))

$$y_1(c_1) = y_2(d_1) = y_2(d_2) = 0. \tag{16}$$

Une frontière est dite accessible, si la probabilité qu'elle soit atteinte par le processus en un temps fini est supérieure à zéro. Sinon, elle est dite inaccessible. Les frontières régulières et de sortie sont accessibles dans le sens entendu ci-dessus. En opposition, sont qualifiées d'inaccessibles les frontières d'entrée et naturelles.

Lemme 2.1. *Soit le processus de Bessel $X(t)$ de paramètres infinitésimaux $\frac{1}{2}(\alpha - 1)/x$ et σ^2. L'origine est frontière*

$$\begin{aligned} &\textit{régulière} \quad \textit{si} \;\; 1 - \sigma^2 < \alpha < \sigma^2 + 1, \\ &\textit{de sortie} \quad \textit{si} \;\; 0 \leq \alpha \leq 1 - \sigma^2, \\ &\textit{d'entrée} \quad \textit{si} \;\; \alpha \geq \sigma^2 + 1. \end{aligned}$$

Preuve. La classification de l'origine en tant que frontière est aisément obtenue par l'analyse d'intégrales définies telles que présentées dans [4]. □

2.1. Solution de l'équation différentielle relative à l'axe x_2. La solution générale de (15) se présente comme suit (voir [12]) :

$$y_2(x_2) = x_2^{\beta_2} \left\{ \omega_1 J_\nu \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sigma_2} x_2 \right) + \omega_2 Y_\nu \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\sigma_2} x_2 \right) \right\} \tag{17}$$

où J_ν et Y_ν sont les fonctions de Bessel de première et de seconde espèces d'ordre ν,

$$\beta_2 := \frac{\sigma_2^2 - \alpha_2 + 1}{2\sigma_2^2}, \tag{18}$$

$$v := |\beta_2| \in \mathbb{R}^+ \tag{19}$$

et ω_i, $i = 1, 2$, est une constante.

Remarques. 1) La constante de séparation λ est strictement positive puisque, dans le cas contraire, la valeur $\sqrt{2\lambda}$ serait purement imaginaire ; la solution ferait alors appel aux fonctions de Bessel modifiées $I_\nu(x)$ et $K_\nu(x)$, lesquelles n'admettent des zéros qu'en $x = 0$ pour $I_\nu(x)$ et qu'en $x \to \infty$ pour $K_\nu(x)$. En outre, ces fonctions n'ont pas le caractère oscillant exigé.
2) L'équation (15) (tout comme l'équation (14)) est une équation de Sturm-Liouville et peut être écrite sous la forme

$$\frac{d}{dx_2} \left[p(x_2) \frac{d}{dx_2} y_2(x_2) \right] - q(x_2) y_2(x_2) + \lambda r(x_2) y_2(x_2) = 0, \tag{20}$$

avec $p(x_2) = x_2^{(\alpha_2 - 1)/\sigma_2^2}$, $q(x_2) \equiv 0$ et $r(x_2) = \left(2/\sigma_2^2\right) x_2^{(\alpha_2 - 1)/\sigma_2^2}$. Ainsi, des solutions y_{2n} et y_{2m} correspondant à des constantes $\lambda_n \neq \lambda_m$ et satisfaisant aux conditions de

Dirichlet homogènes $y_2(d_1) = y_2(d_2) = 0$, sont orthogonales eu égard à la fonction de poids $r(x_2)$ et ceci, sur l'intervalle (d_1, d_2).

Lorsque $d_1 = 0$, situation correspondant nécessairement à un arrangement des paramètres tel que $0 \leq \alpha_2 < \sigma_2^2 + 1$ (se reporter *supra*, lemme 2.1), la solution (17) se réduit à

$$y_{2n}(x_2) = x_2^v J_\nu(k_{vn} x_2) := {}_1S_2^B(x_2) \tag{21}$$

où $k_{vn} := \sqrt{2\lambda_n}/\sigma_2 = \Omega_{vn}/d_2$ avec $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, Ω_{vn} étant la n-ième racine positive de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν, λ ayant été remplacé par λ_n. Aussi, le nombre de ces racines Ω_{vn} est infini ([1]). L'équation (21) découle des développements limites suivants valables pour des arguments se rapprochant de zéro et pour ξ réel ([1]) :

$$J_\xi(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\xi+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\xi, \text{ si } \xi \neq -1, -2, \dots \tag{22}$$

et

$$Y_\xi(x) \sim \begin{cases} \dfrac{-1}{\pi} \Gamma(\xi) \left(\dfrac{2}{x}\right)^\xi, & \text{si } \xi > 0; \\ \dfrac{2}{\pi} \ln x, & \text{si } \xi = 0; \end{cases} \tag{23}$$

le membre gauche se comportant comme le membre droit.

Au contraire, lorsque $d_1 > 0$, que l'origine soit accessible ou non, la solution $y_2(x_2)$ devient

$$y_{2n}(x_2) = x_2^{\beta_2} \left\{ \omega J_\nu \left(k_{vn}^\Delta x_2\right) + Y_\nu \left(k_{vn}^\Delta x_2\right) \right\} := x_2^{\beta_2} F_\nu \left(k_{vn}^\Delta x_2\right) := {}_2S_2^B(x_2) \tag{24}$$

où

$$\omega := \frac{-Y_\nu \left(k_{vn}^\Delta d_i\right)}{J_\nu \left(k_{vn}^\Delta d_i\right)} \text{ pour } i = 1, 2 \tag{25}$$

et $k_{vn}^\Delta := \sqrt{2\lambda_n}/\sigma_2$ est solution de l'équation

$$\Delta := \begin{vmatrix} J_\nu \left(k_{vn}^\Delta d_1\right) & Y_\nu \left(k_{vn}^\Delta d_1\right) \\ J_\nu \left(k_{vn}^\Delta d_2\right) & Y_\nu \left(k_{vn}^\Delta d_2\right) \end{vmatrix} = 0. \tag{26}$$

Ainsi, λ_n est tantôt égal à $k_{vn}^2 \sigma_2^2/2$, tantôt égal à $\left(k_{vn}^\Delta\right)^2 \sigma_2^2/2$ selon que d_1 soit égal ou supérieur à zéro.

Sachant que, lorsque d_1 est strictement positif, les fonctions $p(x_2)$, $p'(x_2)$, $q(x_2)$ et $r(x_2)$ sont continues sur l'intervalle $[d_1, d_2]$ et que $p(x_2)$ ainsi que $r(x_2)$ sont strictement positives à chaque point de ce même intervalle, le problème en est un de Sturm-Liouville régulier et admet le théorème ci-après confirmant l'existence d'une infinité de racines k_{vn}^Δ pour lesquelles

$$y_2(d_1) = y_2(d_2) = 0. \tag{27}$$

Théorème 2.1. [18]. *Un système de Sturm-Liouville régulier possède une suite infinie $(\lambda_n)_1^\infty$ de valeurs propres. Chaque valeur propre est réelle et simple et $|\lambda_n| \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Aussi, si $y_n(x_2)$ est une fonction propre associée à λ_n, alors $((r(x_2))^{1/2} y_n(x_2))_1^\infty$ forme un système orthogonal complet dans $L^2(d_1, d_2)$.*

2.2. Solution de l'équation différentielle relative à l'axe x_1. La solution de l'équation (14) peut être rendue par :

$$y_{1n}(x_1) = x_1^{\beta_1} \left\{ A_n I_\gamma \left(\frac{\sigma_2 k}{\sigma_1} x_1 \right) + B_n K_\gamma \left(\frac{\sigma_2 k}{\sigma_1} x_1 \right) \right\} \tag{28}$$

(voir [12]) où I_γ et K_γ sont les fonctions de Bessel modifiées de première et de seconde espèces d'ordre γ et où A_n et B_n sont des constantes. Aussi,

$$\beta_1 := \frac{\sigma_1^2 - \alpha_1 + 1}{2\sigma_1^2} \; ; \tag{29}$$

$$\gamma := |\beta_1| \in \mathbb{R}^+ \; ; \tag{30}$$

et

$$k = \begin{cases} k_{vn}, & \text{si } d_1 = 0 \; ; \\ k_{vn}^\Delta, & \text{si } d_1 > 0 \, . \end{cases} \tag{31}$$

En conséquence des formes limites qui suivent, où l'argument x se rapproche de zéro, ξ étant réel et fixe ([1]) :

$$I_\xi(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\xi + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^\xi, \; \text{ si } \xi \neq -1, -2, \ldots \tag{32}$$

et

$$K_\xi(x) \sim \begin{cases} -\ln x, & \text{si } \xi = 0 \; ; \\ \dfrac{1}{2} \Gamma(\xi) \left(\dfrac{2}{x} \right)^\xi, & \text{si } \xi > 0; \end{cases} \tag{33}$$

la solution y_{1n} est donnée, lorsque $c_1 = 0$, par (β_1 et γ étant égaux dans cette situation précise) :

$$y_{1n}(x_1) = A_n x_1^\gamma I_\gamma \left(\frac{\sigma_2 k}{\sigma_1} x_1 \right) := A_n \, {}_1S_1^B(x_1). \tag{34}$$

Dans le cas où $c_1 > 0$, il suit que

$$\begin{aligned} y_{1n}(x_1) = B_n x_1^{\beta_1} \left\{ \psi I_\gamma \left(\frac{\sigma_2 k}{\sigma_1} x_1 \right) + K_\gamma \left(\frac{\sigma_2 k}{\sigma_1} x_1 \right) \right\} &:= B_n x_1^{\beta_1} G_\gamma \left(\frac{\sigma_2 k}{\sigma_1} x_1 \right) \\ &:= B_n \, {}_2S_1^B(x_1) \end{aligned} \tag{35}$$

où

$$\psi := \frac{-K_\gamma \left(\dfrac{\sigma_2 k}{\sigma_1} c_1 \right)}{I_\gamma \left(\dfrac{\sigma_2 k}{\sigma_1} c_1 \right)}. \tag{36}$$

2.3. Solution générale pour le processus de Bessel. La fonction $p(x_1, x_2)$ sera ici établie par l'entremise de la proposition et du lemme qui suivent, lesquels concernent l'orthogonalité des fonctions ainsi que l'évaluation d'intégrales indéfinies.

Proposition 2.1. *(Orthogonalité des fonctions de Bessel et de Hankel) Soit U_ξ une combinaison linéaire de fonctions de Bessel de première et de seconde espèces ainsi que de fonctions de Hankel d'ordre ξ. Si $U_\xi(k_\xi\zeta_1) = U_\xi(k_\xi\zeta_2) = 0$, alors*

$$\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} xU_\xi\left(k_{\xi_i}x\right)U_\xi\left(k_{\xi_j}x\right)\,dx = \frac{1}{2}\left[\sum_{r=1}^{2}(-1)^r\zeta_r^2\left\{U_{\xi+1}\left(k_{\xi_i}\zeta_r\right)\right\}^2\right]\delta_{ij}, \tag{37}$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & si\ i \neq j\ ; \\ 1, & si\ i = j. \end{cases} \tag{38}$$

Preuve. La fonction $U_\xi(k_\xi x)$ satisfait à l'équation de Bessel

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}y(x) + x\frac{d}{dx}y(x) + \left\{(k_\xi)^2x^2 - \xi^2\right\}y(x) = 0 \tag{39}$$

qui, exprimée sous forme d'une équation de Sturm-Liouville, devient

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}y(x)\right] + (k_\xi)^2x\,y(x) - \frac{\xi^2}{x}y(x) = 0. \tag{40}$$

Il en ressort que l'orthogonalité est par rapport à la fonction de poids x. La seconde étape de la démonstration consiste essentiellement en l'évaluation de l'intégrale $\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} x\left[U_\xi\left(k_{\xi_i}x\right)\right]^2 dx$. Or, le résultat découle de l'intégrale indéfinie suivante ([3]) :

$$\int x\left[U_\xi\left(k_{\xi_i}x\right)\right]^2 dx = \frac{x^2}{2}\left\{\left[U_\xi\left(k_{\xi_i}x\right)\right]^2 - U_{\xi-1}\left(k_{\xi_i}x\right)U_{\xi+1}\left(k_{\xi_i}x\right)\right\} \tag{41}$$

ainsi que de la relation de récurrence ci-dessous ([1]) :

$$U_{\xi-1}(z) + U_{\xi+1}(z) = \frac{2\xi}{z}U_\xi(z). \quad \square \tag{42}$$

Corollaire 2.1. *(Orthogonalité des fonctions de Bessel de première espèce)*

$$\int_0^{\zeta_2} xJ_\xi\left(k_{\xi_i}x\right)J_\xi\left(k_{\xi_j}x\right)\,dx = \frac{\zeta_2^2}{2}\left\{J_{\xi+1}\left(k_{\xi_i}\zeta_2\right)\right\}^2\delta_{ij} = \frac{\zeta_2^2}{2}\left\{J_{\xi+1}\left(\Omega_{\xi_i}\right)\right\}^2\delta_{ij} \tag{43}$$

k_{ξ_i} et k_{ξ_j} étant des racines de l'équation $J_\xi\left(k_\xi\zeta_2\right) = J_\xi\left(\Omega_\xi\right) = 0$.

Lemme 2.2. *(Intégrales indéfinies, [3]) Soit U_ξ une combinaison linéaire de fonctions de Bessel de première et de seconde espèces ainsi que de fonctions de Hankel d'ordre ξ.*

a)
$$\int z^{1-\xi} U_\xi(z)\, dz = -z^{1-\xi} U_{\xi-1}(z) \tag{44}$$

b)
$$\int z^{\xi+1} U_\xi(z)\, dz = z^{\xi+1} U_{\xi+1}(z) \tag{45}$$

Proposition 2.2. *Lorsque $X(t)$ est un processus de Bessel bidimensionnel ayant pour premier et second moments infinitésimaux $\frac{1}{2}(\alpha_i - 1)/x_i$ et σ_i^2, la fonction $p(x_1, x_2)$ s'exprime comme suit :*

$$p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, {}_iS_1^B(x_1) \, {}_jS_2^B(x_2), \quad i, j = 1, 2 \tag{46}$$

où les fonctions ${}_iS_1^B(x_1)$ et ${}_jS_2^B(x_2)$ furent définies aux sections 2.1 et 2.2 de façon telle que

$$\begin{cases} i = 1, & si \;\; c_1 = 0\,; \\ i = 2, & si \;\; c_1 > 0\,; \\ j = 1, & si \;\; d_1 = 0\,; \\ j = 2, & si \;\; d_1 > 0. \end{cases} \tag{47}$$

Les coefficients B_n sont les suivants :

$$B_n = \begin{cases} \dfrac{\left\{1 - 2^{v-1}\Gamma(v)\Omega_{vn}^{1-v} J_{v-1}\left(\Omega_{vn}\right)\right\}}{2^{v-2}\Gamma(v)\Omega_{vn}^{2-v} d_2^v \left\{J_{v+1}\left(\Omega_{vn}\right)\right\}^2 \, {}_iS_1^B(c_2)}, & si\; j = 1\,; \\ \dfrac{2\, {}_B\Xi_n}{k_{vn}^\Delta \, {}_B\Lambda_n \, {}_iS_1^B(c_2)}, & si\; j = 2. \end{cases} \tag{48}$$

Aussi,

$${}_B\Lambda_n = \sum_{r=1}^{2} (-1)^r d_r^2 \left\{F_{v+1}\left(k_{vn}^\Delta d_r\right)\right\}^2 \tag{49}$$

et

$${}_B\Xi_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} d_r^{1-v} F_{v-1}\left(k_{vn}^\Delta d_r\right), & si\; \beta_2 = v\,; \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{2} (-1)^r d_r^{1+v} F_{v+1}\left(k_{vn}^\Delta d_r\right), & si\; \beta_2 = -v. \end{cases} \tag{50}$$

Preuve. Soit la série infinie

$$p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, {}_iS_1^B(x_1) \, {}_jS_2^B(x_2), \quad i, j = 1, 2 \tag{51}$$

où B_n est une constante. Du fait que $p(c_2, x_2) = 1$, il suit que

a) si $d_1 = 0$, alors $p(c_2, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, {}_iS_1^B(c_2) x_2^v J_\nu (k_{vn} x_2) = 1$ et de la série peut être extrait le terme x_2^v en raison de son indépendance évidente du facteur n de sorte que, en multipliant les deux côtés de l'égalité par $x_2 J_\nu (k_{vm} x_2)$ et en les intégrant entre zéro et d_2, il vient que

$$\begin{aligned}\int_0^{d_2} x_2^{1-v} J_\nu (k_{vm} x_2) \, dx_2 \\ = \int_0^{d_2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, {}_iS_1^B(c_2) x_2 J_\nu (k_{vm} x_2) \, J_\nu (k_{vn} x_2) \, dx_2, \end{aligned} \tag{52}$$

si bien qu'en considérant l'orthogonalité des fonctions de Bessel telle qu'introduite par le corollaire 2.1,

$$B_m = \frac{2 \int_0^{d_2} x_2^{1-v} J_\nu (k_{vm} x_2) \, dx_2}{{}_iS_1^B(c_2) d_2^2 \left\{ J_{v+1} \left(\Omega_{vm} \right) \right\}^2}, \tag{53}$$

cela en ayant préalablement vérifié l'interchangeabilité de l'intégrale et de la sommation. La partie a) du lemme 2.2 permet d'obtenir une expression analytique pour l'intégrale du numérateur, en considérant que par les développements limites,

$$\lim_{x \to 0} \left[x^{1-v} J_{v-1}(x) \right] = \lim_{x \to 0} \left[x^{1-v} \frac{x^{v-1}}{2^{v-1} \Gamma(v)} \right] = \frac{1}{2^{v-1} \Gamma(v)}. \tag{54}$$

b) Similairement à la partie a) de la présente preuve, si $d_1 > 0$ il faut dès lors considérer la série

$$p(c_2, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, {}_iS_1^B(c_2) x_2^{\beta_2} F_\nu \left(k_{vn}^{\Delta} x_2 \right) = 1. \tag{55}$$

En transférant maintenant de l'autre côté de l'égalité le terme $x_2^{\beta_2}$ et en intégrant entre d_1 et d_2 l'équation ainsi obtenue, après l'avoir multipliée par $x_2 F_\nu (k_{vm}^{\Delta} x_2)$, l'expression de B_n est facilement déduite. Soit donc :

$$\begin{aligned}\int_{d_1}^{d_2} x_2^{1-\beta_2} F_\nu \left(k_{vm}^{\Delta} x_2 \right) \, dx_2 \\ &= \int_{d_1}^{d_2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, {}_iS_1^B(c_2) x_2 F_\nu \left(k_{vn}^{\Delta} x_2 \right) F_\nu \left(k_{vm}^{\Delta} x_2 \right) \, dx_2 \\ &= B_m \, {}_iS_1^B(c_2) \int_{d_1}^{d_2} x_2 \left\{ F_\nu \left(k_{vm}^{\Delta} x_2 \right) \right\}^2 \, dx_2 \\ &= B_m \, {}_iS_1^B(c_2) \frac{{}_B\Lambda_m}{2}, \end{aligned} \tag{56}$$

cela en ayant utilisé les relations d'orthogonalité de la proposition 2.1 pour les fonctions cylindriques et en ayant substitué ${}_B\Lambda_m$ à

$$\sum_{r=1}^{2}(-1)^r d_r^2\{F_{v+1}(k_{vm}^{\Delta}d_r)\}^2,$$

fut-il justifiée la permutation de l'intégrale et de la sommation. L'intégrale du membre gauche se résout avec les résultats du lemme 2.2. □

Remarques. 1) La fonction $p(x_1, x_2)$ est une série de Fourier généralisée.
2) Le processus de Bessel n'a, pour espace des états, que la partie positive des réels et l'inclusion de l'origine au sein de cet espace est conditionnelle à son accessibilité. Il est pourtant une généralisation qui soit concevable, sans égard à cette contrainte, en faisant que le domaine de définition inclue aussi la partie négative des réels. Il n'y aurait alors aucune contrainte quant aux valeurs pouvant être prises par les constantes c_i et d_i. Il importe cependant de souligner que la possibilité pour la région D de chevaucher les axes dépend de l'accessibilité de l'origine.

3. Un processus aléatoire utilisé en génétique et en mathématiques financières. Il est convenable de représenter certains phénomènes génétiques ou certains systèmes de mathématiques financières par des processus de diffusion pour lesquels l'équation différentielle stochastique (1) est telle que

$$m_i(X_i) \equiv \mu_i \quad (\mu_i \in \mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \nu_i(X_i) = \sigma_i^2 X_i \quad (\sigma_i^2 > 0). \tag{57}$$

En génétique par exemple, si une population est constituée des espèces A et a et que la taille N de cette population est supposée constante, alors ce processus est approprié à l'étude des fluctuations du nombre d'individus A si ces fluctuations sont d'ordre $\sqrt{N}$ (se référer à [5]). Ce processus est un cas limite du processus de Laguerre où $m_i(X_i) = \mu_i - \vartheta X_i$, ($\mu_i \in \mathbb{R}$, $\vartheta > 0$) et $\nu_i(X_i) = \sigma_i^2 X_i$, ($\sigma_i^2 > 0$).

En mathématiques financières, si μ est strictement positif, le processus considéré est un cas particulier du processus de Cox-Ingersoll-Ross.

Lemme 3.1. *Dans le cas du processus $X(t)$ considéré dans cette section et ayant les paramètres infinitésimaux $m_i(x_i) \equiv \mu_i$ ($\mu_i \in \mathbb{R}$) et $\nu_i(x_i) = \sigma_i^2 x_i$ ($\sigma_i^2 > 0$), l'origine est frontière*

$$\begin{aligned} &\textit{de sortie} \quad \textit{si} \ \ \mu \in (-\infty, 0], \\ &\textit{régulière} \quad \textit{si} \ \ \mu \in (0, \sigma^2/2), \\ &\textit{d'entrée} \quad \textit{si} \ \ \mu \in [\sigma^2/2, \infty). \end{aligned}$$

Preuve. À l'instar du processus de Bessel, la classification de l'origine en tant que frontière est aisément obtenue par l'analyse d'intégrales définies telles que présentées dans [4]. □

Les équations différentielles ordinaires

$$\frac{\sigma_1^2 x_1}{2} y_1'' + \mu_1 y_1' - \lambda y_1 = 0 \tag{58}$$

et

$$\frac{\sigma_2^2 x_2}{2} y_2'' + \mu_2 y_2' + \lambda y_2 = 0 \tag{59}$$

sont celles obtenues de la séparation des variables. Noter que l'équation (59) est une équation de Sturm-Liouville avec

$$p(x_2) = x_2^{2\mu_2/\sigma_2^2}, \quad q(x_2) \equiv 0 \quad \text{et} \quad r(x_2) = \frac{2}{\sigma_2^2} x_2^{(2\mu_2-\sigma_2^2)/\sigma_2^2}. \tag{60}$$

De toute évidence, la démarche adoptée lors de la résolution de l'équation rétrospective de Kolmogorov relative au processus de Bessel est en tout point transposable à ce second processus. Il appert cependant qu'en considérant les résultats antérieurs, il est possible de procéder de façon plus directe.

Proposition 3.1. *Lorsque $X(t)$ est un processus de diffusion bidimensionnel ayant pour paramètres infinitésimaux μ_i et $\sigma_i^2 x_i$, la fonction $p(x_1, x_2)$ est telle que*

$$p(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \, {}_iS_1^G(x_1) \, {}_jS_2^G(x_2), \quad i, j = 1, 2 \tag{61}$$

avec

$$B_n = \begin{cases} \dfrac{\left\{1 - 2^{v-1}\Gamma(v)\Omega_{vn}^{1-v} J_{v-1}(\Omega_{vn})\right\}}{2^{v-2}\Gamma(v)\Omega_{vn}^{2-v} d_2^{v/2} \left\{J_{v+1}(\Omega_{vn})\right\}^2 \, {}_iS_1^G(c_2)}, & si\ j = 1\ ; \\ \dfrac{2\, {}_G\Xi_n}{k_{vn}^{\Delta}\, {}_G\Lambda_n \, {}_iS_1^G(c_2)}, & si\ j = 2\ ; \end{cases} \tag{62}$$

$${}_G\Lambda_n = \sum_{r=1}^{2} (-1)^r d_r \left\{ F_{v+1}\left(k_{vn}^{\Delta}\sqrt{d_r}\right)\right\}^2 \ ; \tag{63}$$

et

$${}_G\Xi_n = \begin{cases} \displaystyle\sum_{r=1}^{2} (-1)^{r+1} (d_r)^{\frac{1-v}{2}} F_{v-1}\left(k_{vn}^{\Delta}\sqrt{d_r}\right), & si\ \beta_2 = v/2\ ; \\ \displaystyle\sum_{r=1}^{2} (-1)^{r} (d_r)^{\frac{1+v}{2}} F_{v+1}\left(k_{vn}^{\Delta}\sqrt{d_r}\right), & si\ \beta_2 = -v/2. \end{cases} \tag{64}$$

Les fonctions apparaissant dans la série infinie sont les suivantes (se reporter aussi à l'équation (47)) :

$${}_1S_1^G(x_1) = x_1^{\gamma/2} I_\gamma\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} k\sqrt{x_1}\right), \quad si\ c_1 = 0\ ; \tag{65}$$

$${}_2S_1^G(x_1) = x_1^{\beta_1} G_\gamma\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} k\sqrt{x_1}\right), \quad si\ c_1 > 0\ ; \tag{66}$$

$${}_1S_2^G(x_2) = x_2^{v/2} J_\nu\left(k_{vn}\sqrt{x_2}\right), \quad si\ d_1 = 0\ ; \tag{67}$$

$${}_2S_2^G(x_2) = x_2^{\beta_2} F_\nu\left(k_{vn}^{\Delta}\sqrt{x_2}\right), \quad si\ d_1 > 0. \tag{68}$$

Aussi,

$$\beta_i = \frac{\sigma_i^2 - 2\mu_i}{2\sigma_i^2}, \quad i = 1, 2 \; ; \tag{69}$$

$$v = 2|\beta_2| \in \mathbb{R}^+ \; ; \tag{70}$$

$$\gamma = 2|\beta_1| \in \mathbb{R}^+ \; ; \tag{71}$$

$$k_{vn} = \frac{\Omega_{vn}}{\sqrt{d_2}} \; ; \tag{72}$$

et k_{vn}^{Δ} est solution de l'équation

$$\Delta := \begin{vmatrix} J_\nu\left(k_{vn}^{\Delta}\sqrt{d_1}\right) & Y_\nu\left(k_{vn}^{\Delta}\sqrt{d_1}\right) \\ J_\nu\left(k_{vn}^{\Delta}\sqrt{d_2}\right) & Y_\nu\left(k_{vn}^{\Delta}\sqrt{d_2}\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{73}$$

et

$$k = \begin{cases} k_{vn} & si\ d_1 = 0 \\ k_{vn}^{\Delta} & si\ d_1 > 0\,. \end{cases} \tag{74}$$

Preuve. La correspondance entre les équations différentielles issues de la séparation des variables dans le cas du processus de Bessel (se référer aux équations (14) et (15)) et le présent cas est telle que, si est posé, d'une part, le changement de variable $z_i^2 = x_i$ pour $i = 1, 2$ dans les équation (58) et (59) et, d'autre part, l'égalité entre $1 - \alpha_i$ et $\sigma_i^2 - 4\mu_i$ (sans égard au domaine de définition des paramètres α_i et μ_i), les équations différentielles (58) et (59), maintenant dépendantes des variables z_1 et z_2, se ramènent aux équations (14) et (15) respectivement, la constante de séparation λ étant multipliée par quatre. Ainsi la solution se déduit-elle du processus de Bessel en remplaçant les valeurs x_i, c_i et d_i par leur racine carrée. □

Remarques. 1) Si $Y_i(t)$ est un processus de Bessel de paramètres infinitésimaux $\frac{1}{2}(4\mu_i - \sigma_i^2)/x_i$ et σ_i^2, alors la variable aléatoire $T(x_1, x_2)$, pour le processus traité dans cette présente section, peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) := \inf\Big\{t > 0 :\ & Y_1(t) \notin \left(\sqrt{c_1}, \sqrt{c_2}\right) \text{ ou } Y_2(t) \notin \left(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}\right) \mid \\ & Y_i(0) = \sqrt{x_i},\ i = 1, 2\Big\} \end{aligned} \tag{75}$$

tandis que la fonction $p(x_1, x_2)$ deviendrait

$$p(x_1, x_2) := P\Big[Y_1(T) = \sqrt{c_2},\ Y_2(T) \in \left(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}\right) \mid Y_i(0) = \sqrt{x_i},\ i = 1, 2\Big]. \tag{76}$$

2) Ce processus, aussi défini pour la partie positive des réels, est de généralisation plus complexe que le processus de Bessel. Cette complexité supplémentaire vient du fait que les variables qui apparaissent dans les fonctions de Bessel sont mises sous une racine carrée.

4. Conclusion. Dans cet article, la probabilité qu'un processus de diffusion bidimensionnel atteigne un côté particulier d'un rectangle en premier fut déterminée et ceci, pour deux cas dont le processus de Bessel. Dans un souci de simplicité, seules les occurrences où les deux composantes du processus $\big(X_1(t), X_2(t)\big)$ étaient de même type furent analysées. Cependant, reprenant les résultats exposés, il est simple de généraliser les solutions et d'obtenir l'expression de la fonction $p(x_1, x_2)$ lorsque ces deux composantes sont de familles différentes.

Ce type de problème peut aisément être étendu à des situations différant de celles décrites dans cet article. Premièrement, la méthode de résolution retenue pourrait être utilisée avec succès pour des processus autres que ceux considérés ici, les processus intégrés en étant de bons exemples. Toutefois, chercher à obtenir la primitive de certaines intégrales pourrait s'avérer une entreprise infructueuse. Deuxièmement, des régions circonscrites par des contours divers, régions à l'intérieur desquelles se cantonne le déplacement du processus, seraient tout aussi convenables. Un cercle par exemple, où le calcul pourrait être lié à la probabilité d'atteindre un arc quelconque. Il est cependant évident que le niveau de régularité de la forme donnée à cette région a une incidence directe sur le degré de difficulté que présente la résolution du problème.

Troisièmement, les développements ayant porté essentiellement sur la probabilité que le processus soit absorbé sur un côté particulier de la frontière rectangulaire, rien ne fut observé ou affirmé quant à l'endroit d'absorption de ce processus sur ce côté. Pour cela, il s'agirait de déterminer la distribution de $X_1(t)$.

Finalement, dans un espace de dimension supérieure à deux, les mêmes travaux ne seraient certes pas dénués d'intérêt.

English extended abstract. Let $X(t) := \big(X_1(t), X_2(t)\big)$ be a two-dimensional diffusion process defined by the system of stochastic differential Equations (1), the components $X_1(t)$ and $X_2(t)$ being independent. Let also $T(x_1, x_2)$ be the random variable defined in (2) and associated with the first hitting time of the process to a border that circumscribes a rectangular area assumed to be finite (see (3)), the starting point (x_1, x_2) being located inside the rectangle. Considering that the process could ever be absorbed at the boundary ∂D, the design is to establish the probability $p(x_1, x_2)$ that this absorption occur at a given side of the surrounding region. The achievement of this aim involves solving the Kolmogorov backward Equation (9) subject to the boundary conditions (10). The solution, which follows from the method of separation of variables, is expressed as a generalized Fourier series.

Section 2 is devoted to the Bessel process, for which the first and second infinitesimal moments appearing in (9) are $m_i(x_i) = \frac{1}{2}(\alpha_i - 1)/x_i$, ($\alpha_i \geq 0$) and $\nu_i(x_i) \equiv \sigma_i^2$ (> 0) for $i = 1, 2$. Notice that in the classic definition of the Bessel process, σ_i^2 is equal to 1. In order to compute $p(x_1, x_2)$ in all cases, it is shown first that for a Bessel process, the origin is a regular boundary if $1 - \sigma^2 < \alpha < \sigma^2 + 1$, an exit boundary if $0 \leq \alpha \leq 1 - \sigma^2$ and an entrance boundary if $\alpha \geq \sigma^2 + 1$ (refer to Lemma 2.1). The explicit expression of $p(x_1, x_2)$ is given in Proposition 2.2, in which the cases where the origin is accessible and where it is not lead to different expressions for $p(x_1, x_2)$.

In Section 3, similar results are obtained for a process with infinitesimal mean and variance given by $m_i(x_i) \equiv \mu_i$ ($\mu_i \in \mathbb{R}$) and $\nu_i(x_i) = \sigma_i^2 x_i$ ($\sigma_i^2 > 0$) for $i = 1, 2$.

In fact, this process is a limiting case of the Laguerre process or a particular case of the Cox-Ingersoll-Ross process depending on whether the context of application is in genetics or in financial mathematics. For this process, the origin is an exit boundary if $\mu \in (-\infty, 0]$, a regular boundary if $\mu \in (0, \sigma^2/2)$ and an entrance boundary if $\mu \in [\sigma^2/2, \infty)$ (refer to Lemma 3.1). Although it would have been possible to proceed in the same manner as in the previous section, the results have been obtained in a more direct way. Equations (58) and (59) were transformed into Equations (14) and (15) by the change of variable $z_i^2 = x_i$ for $i = 1, 2$ in (58) and (59) and by letting $1 - \alpha_i$ be equal to $\sigma_i^2 - 4\mu_i$. So the solution presented in Proposition 3.1 was deduced from Proposition 2.2 by replacing x_i, c_i and d_i by their respective square roots.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Abramowitz et I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Dover, New York, 1965.
2. D. R. Cox et H. D. Miller, *The Theory of Stochastic Processes*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965.
3. I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.
4. D. Kannan, *An Introduction to Stochastic Processes*, North Holland Series in Probability and Applied Mathematics, North Holland, New York-Oxford, 1979.
5. S. Karlin et H. Taylor, *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, Inc., New York-London, 1981.
6. M. Lefebvre, *Moment generating function of a first hitting place for the integrated Ornstein-Uhlenbeck process*, Stochastic Process. Appl. **32** (1989); no. 2, 281–287.
7. M. Lefebvre, *First hitting place distributions for the Ornstein-Uhlenbeck process*, Statist. Probab. Lett. **34** (1997); no. 3, 309–312.
8. M. Lefebvre et E. Léonard, *On the first hitting place of the integrated Wiener process*, Adv. in Appl. Probab. **21** (1989); no. 4, 945–948.
9. M. Lefebvre et J.-L. Guilbault, *Hitting place probabilities for two-dimensional diffusion processes* (2000) (Soumis pour publication).
10. T. Nakajima, *Joint distribution of the first hitting time and first hitting place for a random walk*, Kodai Math. J. **21** (1998); no. 2, 192–200.
11. K. Nishioka, *The first hitting time and place of a half-line by a biharmonic pseudo process*, Japan J. Math. (N.S.) **23** (1997); no. 2, 235–280.
12. A. D. Polyanin et V. F. Zaitsev, *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
13. E. Seneta, *Another look at independence of hitting place and time for the simple random walk*, Stochastic Process. Appl. **10** (1980); no. 1, 101–104.
14. X. Shao et C. Yin, *The joint distribution of the hitting time and hitting place for a Brownian motion with drift*, J. Eng. Math., Xi'an **14** (1997), 123–126.
15. F. Xiao et C. Yin, *On the first hitting place and the first hitting time for a conditioned Brownian motion to a hyperplan*, J. Eng. Math., Xi'an **15** (1998); no. 4, 81–86.
16. C. Yin, X. Shao et H. Cheng, *The joint density of the hitting time and place to a circle for planar Brownian motion*, J. Qufu Norm. Univ., Nat. Sci. **25** (1999); no. 1, 7–9.
17. C. Yin et R. Wu, *Hitting time and place to a sphere or spherical shell for Brownian motion*, Chinese Ann. Math. Ser. B **20** (1999); no. 2, 205–214.

18. N. Young, *An Introduction to Hilbert Space*, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

J.-L. Guilbault et M. Lefebvre
Département de mathématiques et de génie industriel
École Polytechnique de Montréal
C.P. 6079, Succursale Centre-Ville
Montréal (Québec) H3C 3A7
Canada