Ann. sc. math. Québec, **15** (2), 1991, 165–175.

QUELQUES RÉSULTATS AU SUJET DES DENSITÉS DE PREMIER PASSAGE POUR DES PROCESSUS DE DIFFUSION

MARIO LEFEBVRE

RÉSUMÉ. Dans cet article, on considère des processus de diffusion en une et deux dimensions et on prouve quelques résultats au sujet de la distribution de temps ou d'endroits de premier passage pour ces processus. Des exemples sont donnés.

ABSTRACT. In this paper, we consider diffusion processes in one and two dimensions. Some results concerning the distribution of first hitting times or places for these processes are proved. Examples are given.

1. Introduction. Le problème d'obtenir des distributions de premier passage pour des processus de diffusion a été étudié depuis plusieurs décennies maintenant. Les résultats explicites pour le cas de processus de dimension n supérieure ou égale à deux sont encore rares. Dans cet article, on s'intéresse d'abord au cas des processus unidimensionnels. Un théorème classique démontré pour le cas de processus stationnaires dans le temps est généralisé au cas où les processus ne sont pas stationnaires. Ensuite, dans la section 3, on considère la somme d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et de son intégrale. On obtient un résultat explicite pour la distribution d'un temps de premier passage pour cette somme. Finalement, dans la section 4 une expression est obtenue pour la fonction caractéristique d'un endroit de premier passage pour des processus bidimensionnels.

2. Généralisation d'un théorème de Siegert. Dans un des premiers articles au sujet des distributions de premier passage pour des processus de diffusion, Siegert (1951) a démontré le théorème classique qui suit.

THÉORÈME 2.1. *Soit $X(t)$, $t \geq 0$, un processus markovien unidimensionnel, à temps continu et stationnaire. Définissons*

$$P(x;y,t)\,dy = P[X(t) \in (y, y+dy) \mid X(0) = x]. \tag{2.1}$$

Alors, s'il existe un point z $(< x)$ tel que

$$P(z;y,t) = P(z;2z-y,t), \tag{2.2}$$

on peut écrire que

$$P[T(x,z) \leq t] = 2P[X(t) \leq z \mid X(0) = x], \tag{2.3}$$

Reçu le 28 janvier 1991.
Recherche subventionnée par le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada et par le fonds FCAR du Québec

où $T(x,z)$ est défini par

$$T(x,z) = \inf\{t : X(t) = z \mid X(0) = x\}. \tag{2.4}$$

Ici, on suppose que $X(t)$, $t \geq 0$, est un processus markovien unidimensionnel à temps continu et on définit

$$F(x,s;y,t) = P[X(t) \leq y \mid X(s) = x], \tag{2.5}$$

où $x > y$. On définit aussi

$$G(x,s;y,t) = P[T(x,y,s) \leq t], \tag{2.6}$$

où

$$T(x,y,s) = \inf\{t(\geq s) : X(t) = y \mid X(s) = x\}. \tag{2.7}$$

THÉORÈME 2.2. *S'il existe un point y ($< x$) tel que*

$$F(y,w;y,t) = \frac{1}{2} \tag{2.8}$$

pour $s \leq w < t$, alors

$$G(x,s;y,t) = 2F(x,s;y,t). \tag{2.9}$$

DÉMONSTRATION: La preuve est essentiellement la même que celle du théorème 2.1. On peut écrire que

$$F(x,s;y,t) = \int_s^t P[T(x,y,s) \in (w,w+dw)]F(y,w;y,t), \tag{2.10}$$

et en utilisant (2.8) on obtient que

$$F(x,s;y,t) = \frac{1}{2}\int_s^t P[T(x,y,s) \in (w,w+dw)]. \tag{2.11}$$

Puisque $G(x,s;y,s) = 0$, le théorème suit. □

Notons qu'il n'est pas nécessaire que la fonction F (ou P) soit symétrique, comme on le suppose dans Kannan (1979), par exemple. En effet, seule la valeur de y qui représente la frontière absorbante doit être un point de symétrie.

PROPOSITION 2.1. *Considérons le système dynamique défini par l'équation différentielle stochastique*

$$dX(t) = N^{1/2}(t)\,dW(t), \tag{2.12}$$

où $N(t) > 0$ et $W(t)$ est un mouvement brownien standard. Alors la relation (2.9), avec F et G définis par (2.5) et (2.6), est vérifiée.

DÉMONSTRATION: Il est bien connu (voir Bryson et Ho (1975, pages 338–339), par exemple) que si $X(t)$ est défini par

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + N^{1/2}(t)\,dW(t), \tag{2.13}$$

alors, étant donné $X(s)$,

$$X(t) \sim N(\Phi(s,t)X(s), V(s,t)) \tag{2.14}$$

où

$$V(s,t) = \int_s^t \Phi^2(w,t)N(w)\,dw \tag{2.15}$$

et $\Phi(w,t)$ est obtenu en résolvant l'équation différentielle

$$\frac{d\Phi(w,t)}{dt} = -A(w)\Phi(w,t) \tag{2.16}$$

avec la condition à la frontière

$$\Phi(t,t) = 1. \tag{2.17}$$

Alors, en utilisant (2.12), on peut écrire que

$$X(t) \mid X(s) = x \sim N(x, V(s,t)) \tag{2.18}$$

où

$$V(s,t) = \int_s^t N(w)\,dw \tag{2.19}$$

puisque $\Phi(s,t) = 1$ lorsque $A \equiv 0$. Alors, on a

$$F(y,w;y,t) = P[N(y,V(w,t)) \leq y] = \frac{1}{2}, \tag{2.20}$$

ce qui prouve la proposition. □

PROPOSITION 2.2. *Considérons le système dynamique défini par*

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + N^{1/2}(t)\,dW(t). \tag{2.21}$$

Alors la relation (2.9) est vérifiée si $y = 0$.

DÉMONSTRATION: A partir des équations (2.13) à (2.17) on déduit que

$$F(0,w;0,t) = P[N(0,V(w,t)) \leq 0] = \frac{1}{2} \tag{2.22}$$

et le résultat est établi. □

Nous avons donc généralisé le théorème de Siegert au cas où les processus ne sont pas nécessairement stationnaires. Les deux propositions donnent des exemples de systèmes pour lesquels le théorème 2.2 s'applique. Pour terminer cette section, nous allons donner un exemple d'un processus non-stationnaire qui satisfait aux hypothèses du théorème 2.2 et calculer la distribution de $T(x,y,s)$.

Considérons donc le processus unidimensionnel

$$dX(t) = (ct^2)^{1/2}\,dW(t) \tag{2.23}$$

où c est une constante positive. Pour obtenir la distribution de $T(x,y,s)$ défini par (2.7) on peut utiliser l'équation inverse de Kolmogorov:

$$\frac{cs^2}{2}G_{xx} + G_s = 0 \quad (x > y) \tag{2.24}$$

avec la condition à la frontière

$$G(y,s;y,t)=1. \tag{2.25}$$

Maintenant, il est facile de montrer (voir Lefebvre (1991)) que la solution de (2.24), (2.25) est

$$G(x,s;y,t)=1-\operatorname{erf}\left\{\left[\frac{3}{2c}\right]^{1/2}(x-y)(t^3-s^3)^{-1/2}\right\} \quad (x\geq y),$$

où $\operatorname{erf}(z)$ est défini par

$$\operatorname{erf}(z)=2\pi^{-1/2}\int_0^z e^{-t^2}\,dt. \tag{2.26}$$

Il s'ensuit que

$$G(x,s;y,t)=2P[N(0,1)\leq(\frac{3}{c})^{1/2}(y-x)(t^3-s^3)^{-1/2}]. \tag{2.27}$$

Mais, en utilisant (2.13) à (2.17) on peut écrire que

$$F(x,s;y,t)=P[N(x,\frac{c}{3}(t^3-s^3))\leq y], \tag{2.28}$$

de sorte que

$$G(x,s;y,t)=2F(x,s;y,t), \tag{2.29}$$

ce qui concorde avec le théorème 2.2. □

Donc, le processus $X(t)$ défini par l'équation différentielle stochastique (2.23) est un exemple d'un processus non-stationnaire pour lequel une formule simple peut être obtenue pour la distribution d'un temps de premier passage. Ce processus a été utilisé par Lefebvre (1991) comme approximation du mouvement brownien intégré lorsque le paramètre c est petit.

3. Somme d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et de son intégrale. Dans cette section, on considère le système dynamique bidimensionnel défini par

$$\begin{cases} dX(t)=Y(t)\,dt \\ dY(t)=-Y(t)\,dt+2^{1/2}\,dW(t), \end{cases} \tag{3.1}$$

où $W(t)$ est un mouvement brownien standard. C'est-à-dire, $Y(t)$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et $X(t)$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck intégré. Soit

$$p(x,y;u,v,t)\,du\,dv=P[X(t)\in du,Y(t)\in dv\mid X(0)=x,Y(0)=y]. \tag{3.2}$$

Alors, p satisfait à l'équation inverse de Kolmogorov (voir Cox et Miller (1965, page 247), par exemple):

$$p_{yy}+yp_x-yp_y=p_t. \tag{3.3}$$

Maintenant, supposons que $x+y>0$ et définissons

$$T(x,y)=\inf\{t:X(t)+Y(t)=0\mid X(0)=x,Y(0)=y\}. \tag{3.4}$$

On s'intéresse à la fonction de densité de T. Pour obtenir cette densité, on peut considérer le processus bidimensionnel $(X(t),Y(t))$ ou le processus $Z(t)$ défini par $Z(t)=X(t)+Y(t)$.

Nous allons faire les deux et montrer par la même occasion que $Z(t)$ est un processus gaussien avec la même moyenne et la même variance qu'un certain processus de Wiener.

Soit $q(x,y,t)$ la fonction de densité de T; c'est-à-dire,

$$q(x,y,t)dt = P[T(x,y) \in dt]. \tag{3.5}$$

Alors, on déduit de (3.3) que q satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$q_{yy} + yq_x - yq_y = q_t, \tag{3.6}$$

où $x+y > 0$ et $t > 0$. La condition initiale et la condition à la frontière sont, respectivement:

$$\lim_{t \downarrow 0} q(x,y,t) = \delta(x+y) \tag{3.7}$$

et

$$\lim_{t \downarrow -x} q(x,y,t) = \delta(t), \tag{3.8}$$

où δ est la fonction delta de Dirac. De plus, supposons que q soit une fonction de $z = x+y$; alors, il s'ensuit que $q_x = q_y$ et l'on trouve que l'équation (3.6) devient

$$q_{zz} = q_t. \tag{3.9}$$

Finalement, en utilisant les conditions (3.7) et (3.8) il est facile de montrer que

$$q(z,t) = z(4\pi t^3)^{-1/2} e^{\frac{-z^2}{4t}} \quad (z > 0). \tag{3.10}$$

PROPOSITION 3.1. *La fonction de densité de $T(x,y)$ est donnée par*

$$q(x,y,t) = (x+y)(4\pi t^3)^{-1/2} e^{\frac{-(x+y)^2}{4t}} \tag{3.11}$$

où $y > -x$ et $t > 0$.

DÉMONSTRATION: On peut vérifier que la fonction $q(x,y,t)$ définie ci-dessus satisfait à l'équation (3.6). De plus, elle a été obtenue en utilisant les conditions (3.7) et (3.8). On peut donc affirmer que c'est la fonction recherchée. □

La fonction de densité de $T(x,y)$ est la même que celle du temps de premier passage à zéro pour un mouvement brownien $W_1(t)$ parti de $W_1(0) = x+y > 0$ et avec $\mathrm{E}[W_1(t)] = x+y$ et $\mathrm{Var}[W_1(t)] = 2t$. En fait, nous allons montrer maintenant que $Z(t) = X(t)+Y(t)$ est un processus gaussien avec les mêmes moyenne et variance que $W_1(t)$.

PROPOSITION 3.2. *Le processus unidimensionnel $Z(t) = X(t)+Y(t)$, où $X(t)$ et $Y(t)$ sont définis par (3.1), est un processus gaussien avec (étant donné que $X(0) = x$ et $Y(0) = y$)*

$$\mathrm{E}[Z(t)] = x+y \tag{3.12}$$

et

$$\mathrm{Var}[Z(t)] = 2t. \tag{3.13}$$

DÉMONSTRATION: On peut réécrire le système dynamique (3.1) comme suit:

$$dR(t) = AR(t)\,dt + dB(t) \tag{3.14}$$

où

$$R(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

et $B(t)$ est un processus de Wiener bidimensionnel de moyenne nulle et de matrice de covariance Nt, où N est donné par

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Alors, étant donné $R(0)$, on a (voir Bryson et Ho (1975, pages 338–339))

$$R(t) \sim N(e^{At}R(0), V(t)), \tag{3.18}$$

où

$$V(t) = \int_0^t e^{As} N e^{A's}\, ds.$$

Maintenant, on a

$$e^{As} = I + As + \frac{A^2 s^2}{2!} + \frac{A^3 s^3}{3!} + \dots \tag{3.19}$$

où I est la matrice identité d'ordre deux. On trouve que

$$A^{2k-1} = A \tag{3.20}$$

pour $k = 1, 2, \dots$ et

$$A^{2k} = -A \tag{3.21}$$

pour $k = 1, 2, \dots$ Il s'ensuit que

$$e^{As} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-s} \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

De là, puisque $R(0) = (X(0), Y(0))' = (x, y)'$, on peut écrire que

$$R(t) \sim N(M(t), V(t)), \tag{3.23}$$

où

$$M(t) = \begin{pmatrix} x + y(1 - e^{-t}) \\ ye^{-t} \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

et

$$V(t) = \begin{pmatrix} 2t + 4(e^{-t} - 1) + (1 - e^{-2t}) & 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} & 1 - e^{-2t} \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

En utilisant (3.23), (3.24) et (3.25) on trouve que, étant donné $Z(0) = x + y$, le processus $Z(t) = X(t) + Y(t)$ est un processus gaussien (puisque c'est la somme de deux processus gaussiens) avec moyenne

$$\mathrm{E}[Z(t)] = x + y \tag{3.26}$$

et variance

$$\mathrm{Var}[Z(t)] = \mathrm{Var}[X(t)] + \mathrm{Var}[Y(t)] + 2\,\mathrm{Cov}[X(t), Y(t)] = 2t. \quad \square \tag{3.27}$$

Donc, on aurait pu utiliser la proposition 3.2 pour obtenir la fonction de densité de $T(x, y)$, plutôt que considérer le processus bidimensionnel $(X(t), Y(t))$ comme on l'a fait précédemment. En effet, comme il est bien connu, dans le cas d'un mouvement brownien $W_1(t)$ de moyenne nulle et dont le paramètre de variance σ^2 est égal à 2, la fonction de densité q_1 de $T_1 = \inf\{t : W_1(t) = 0 \mid W_1(0) = x+y\}$ est donnée par la formule (3.11) (voir Cox et Miller (1965, page 221)). Or, la fonction de densité de T et celle de T_1 satisfont à la même équation inverse de Kolmogorov, avec les mêmes conditions initiale et à la frontière. Donc, les densités q et q_1 sont identiques.

4. Fonctions caractéristiques d'endroits de premier passage. Dans cette section, on considère des processus bidimensionnels définis par

$$\begin{cases} dX(t) = m[X(t)]\,dt + (2v[X(t)])^{1/2}\,dW_1(t) \\ dY(t) = \sqrt{2}\,dW_2(t), \end{cases} \tag{4.1}$$

où $v[X(t)] > 0$ et $W_1(t)$ et $W_2(t)$ sont deux mouvements browniens standards indépendants, de sorte que $Y(t)$ est un processus de Wiener de moyenne nulle et dont le paramètre de variance σ^2 est égal à 2. Soit

$$T \quad (= T_x(a)) = \inf\{t : X(t) = a \mid X(0) = x \geq a\}. \tag{4.2}$$

On s'intéresse à la distribution de $Y(T)$. Il est bien connu (voir Feller (1971, page 175)) que si $X(t)$ est un mouvement brownien, alors $Y(T)$ présente une distribution de Cauchy. Ici, on obtient une expression, en fonction de la fonction génératrice des moments (f.g.m.) de T, pour la fonction caractéristique (f.c.) de $Y(T)$ pour tous les processus bidimensionnels $(X(t), Y(t))$ définis par (4.1) et pour lesquels $P[T < \infty] = 1$.

Soit $p(x, y; u, t)$ la fonction de densité conjointe de $Y(T)$ et T; c'est-à-dire,

$$p(x, y; u, t)\,du\,dt = P[Y(T) \in du, T \in dt \mid X(0) = x, Y(0) = y]. \tag{4.3}$$

Alors la fonction p satisfait à l'équation inverse de Kolmogorov

$$vp_{xx} + mp_x + p_{yy} = p_t \tag{4.4}$$

pour $x > a$, $-\infty < y < \infty$, $t > 0$. Les conditions initiale et à la frontière sont

$$\begin{cases} p(x, y; u, 0) = \delta(x - a, y - u) \\ p(a, y; u, t) = \delta(y - u, t), \end{cases} \tag{4.5}$$

respectivement, où δ est la fonction delta de Dirac. Posons

$$L(x, y; u, \alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\,p dt, \tag{4.6}$$

où la partie réelle de α est non négative. On déduit de l'équation (4.4) que L satisfait à

$$vL_{xx} + mL_x + L_{yy} = \alpha L \tag{4.7}$$

pour $x > a$ et $-\infty < y < \infty$. Finalement, on définit

$$F(x, \beta; u, \alpha) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\beta y}\,L\,dy, \tag{4.8}$$

où β est un paramètre réel.

LEMME 4.1. *On a* $\lim_{y\to\pm\infty} L(x,y;u,\alpha) = \lim_{y\to\pm\infty} L_y(x,y;u,\alpha) = 0$.

DÉMONSTRATION: En utilisant le fait que $X(t)$ et $Y(t)$ sont indépendants, on peut écrire que

$$p(x,y;u,t) = f(y;u,t)g(x;t), \tag{4.9}$$

où

$$f(y;u,t)\,du = P[Y(t) \in du \mid Y(0) = y] \tag{4.10}$$

et

$$g(x;t)\,dt = P[T \in dt \mid X(0) = x] \tag{4.11}$$

sont les fonctions de densité de $Y(t)$ et de T, respectivement. Maintenant, on sait que $Y(t) \sim N(y, 2t)$, de sorte que

$$f(y;u,t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{\frac{-[u-y]^2}{4t}}. \tag{4.12}$$

Le lemme suit alors de (4.9), (4.12) et de la définition de la fonction L. □

En utilisant le lemme 4.1 et l'équation (4.7), on trouve que la fonction F satisfait à l'équation différentielle ordinaire

$$vF_{xx} + mF_x - \beta^2 F = \alpha F. \tag{4.13}$$

On déduit de (4.5) que la condition à la frontière est

$$F(a,\beta;u,\alpha) = e^{-i\beta u}. \tag{4.14}$$

Mais l'équation (4.13) est la même que l'équation à laquelle satisfait la f.g.m. de T, c'est-à-dire,

$$M(x;\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta t} g(x;t)\,dt, \tag{4.15}$$

avec $\theta = \alpha + \beta^2$. De plus, la condition à la frontière est

$$M(a;\theta) = 1. \tag{4.16}$$

On peut maintenant prouver le théorème qui suit.

THÉORÈME 4.1. *Soit $M(x;\theta)$ la fonction génératrice des moments de T; alors, si $P[T < \infty] = 1$, la fonction caractéristique de $Y(T)$, définie par*

$$C(x,y;\beta) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\beta u} P[Y(T) \in du \mid X(0) = x, Y(0) = y], \tag{4.17}$$

où β est un paramètre réel, est donnée par

$$C(x,y;\beta) = e^{i\beta y} M(x;\beta^2). \tag{4.18}$$

DÉMONSTRATION: On déduit de (4.13) à (4.16) que

$$F(x,\beta;u,0) = e^{-i\beta y} M(x;\beta^2). \tag{4.19}$$

De plus, puisque $P[T < \infty] = 1$, on a

$$F(x, \beta; u, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta y} q(x, y; u)\, dy, \tag{4.20}$$

où

$$q(x, y; u)\, du = P[Y(T) \in du \mid X(0) = x, Y(0) = y]. \tag{4.21}$$

Mais, puisque $Y(t)$ est un mouvement brownien, on peut écrire que

$$q(x, y; u) = q(x, y - u; 0) \tag{4.22}$$

et il s'ensuit que

$$F(x, \beta; u, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta(w+u)} q(x, w; 0)\, dw. \tag{4.23}$$

Finalement, on a aussi

$$C(x, y; \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta(y-w)} q(x, w; 0)\, dw. \tag{4.24}$$

De là, on a

$$C(x, y; \beta) = e^{i\beta(y+u)} F(x, \beta; u, 0) \tag{4.25}$$

et le résultat est démontré. □

Nous avons donc obtenu une formule pour la fonction caractéristique de $Y(T)$ en fonction de la fonction génératrice des moments de T. Pour conclure cette section, nous allons considérer deux cas particuliers.

Supposons d'abord que $m[X(t)] = -X(t)$ et que $v[X(t)] = 1$ dans (4.1). Alors le processus $X(t)$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et on sait que dans ce cas la f.g.m. de T est donnée par (voir Prabhu (1965, page 107), par exemple)

$$M(x; \theta) = e^{\frac{x^2 - a^2}{4}} \frac{D_{-\theta}(x)}{D_{-\theta}(a)} \tag{4.26}$$

pour $x \geq a$, où $D_{-\theta}(x)$ (ou $U(\theta - \frac{1}{2}, x)$) est une fonction parabolique cylindrique (voir Abramowitz et Stegun (1965, page 687)). En utilisant le théorème 4.1, on peut écrire que la f.c. de $Y(T)$ est donnée par

$$C(x, y; \theta) = e^{i\beta y} e^{\frac{x^2 - a^2}{4}} \frac{U(\beta^2 - \frac{1}{2}, x)}{U(\beta^2 - \frac{1}{2}, a)}. \tag{4.27}$$

De plus, la fonction $U(c, z)$ est définie par

$$U(c, z) = \cos[\pi(\frac{1}{4} + \frac{c}{2})] Y_1 - \sin[\pi(\frac{1}{4} + \frac{c}{2})] Y_2, \tag{4.28}$$

où

$$Y_1 = \pi^{-1/2} \Gamma(\frac{1}{4} - \frac{c}{2}) 2^{-\frac{c}{2} - \frac{1}{4}} e^{z^2/4} \left\{ 1 + (c - \frac{1}{2}) \frac{z^2}{2!} + (c - \frac{1}{2})(c - \frac{5}{2}) \frac{z^4}{4!} + \ldots \right\} \tag{4.29}$$

et

$$Y_2 = \pi^{-1/2}\Gamma(\frac{3}{4} - \frac{c}{2})2^{-\frac{c}{2}+\frac{1}{4}}e^{z^2/4}\left\{z + (c - \frac{3}{2})\frac{z^3}{3!} + (c - \frac{3}{2})(c - \frac{7}{2})\frac{z^5}{5!} + \dots\right\} \tag{4.30}$$

Par conséquent, en utilisant le fait que $\Gamma'(\frac{1}{2})$ et $\Gamma'(1)$ sont finis, on déduit de (4.27) à (4.30) que

$$E[Y(T) \mid X(0) = x, Y(0) = y] = y. \tag{4.31}$$

Donc, l'espérance mathématique de $Y(T)$, étant donné que $X(0) = x$ et $Y(0) = y$, est la même que celle de $Y(t)$ et est indépendante de $X(0)$. Notons que ceci n'est pas le cas lorsque $X(t)$ est un mouvement brownien. En effet, comme nous l'avons mentionné au début de la section 4, $Y(T)$ présente une distribution de Cauchy, de sorte que les moments de $Y(T)$ n'existent pas.

Finalement, la formule (4.27) nous dit que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\beta u} P[Y(T) \in du | X(0) = x, Y(0) = y] = e^{i\beta y} e^{\frac{x^2-a^2}{4}} \frac{U(\beta^2 - \frac{1}{2}, x)}{U(\beta^2 - \frac{1}{2}, a)} \tag{4.32}$$

et, par indépendance, on peut écrire que

$$\begin{aligned} &P[Y(T) \in du \mid X(0) = x, Y(0) = y]/du \\ &\qquad = \int_0^{\infty} P[Y(t) \in du \mid Y(0) = y]/du P[T \in dt \mid X(0) = x] \\ &\qquad = \int_0^{\infty} (4\pi t)^{-1/2} e^{\frac{-[u-y]^2}{4t}} P[T \in dt \mid X(0) = x]. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Maintenant, dans le cas où $a = 0$, Wang et Uhlenbeck (1945) ont montré que

$$P[T \in dt \mid X(0) = x] = -\frac{2x}{(2\pi)^{1/2}} e^{\frac{-x^2 z^2}{2}} dz \tag{4.34}$$

où

$$z = e^{-t}(1 - e^{-2t})^{-1/2}. \tag{4.35}$$

De là, on déduit que la transformée de Fourier inverse de

$$(2\pi)^{-1/2} e^{i\beta y} e^{\frac{x^2}{4}} \frac{U(\beta^2 - \frac{1}{2}, x)}{U(\beta^2 - \frac{1}{2}, 0)}$$

est donnée par

$$\int_0^{\infty} -x(2\pi^2 t)^{-1/2} e^{\frac{-[u-y]^2}{4t}} e^{\frac{-x^2 z^2}{2}} dz,$$

où z est défini ci-dessus.

Supposons maintenant que $m[X(t)] = X(t)$ et que $v[X(t)] = X^2(t)$ dans (4.1). Alors $X(t)$ est un processus avec fonction de densité lognormale (voir Kannan (1979, page 282)). La f.g.m. de T est donnée par (Kannan (1979, page 281))

$$M(x; \theta) = (\frac{a}{x})^{\gamma} \tag{4.36}$$

pour $x \geq a > 0$, où

$$\gamma = \theta^{1/2}. \tag{4.37}$$

Il suit du théorème 4.1 que la f.c. de $Y(T)$ est

$$C(x, y; \beta) = e^{i\beta y}(\frac{a}{x})^{|\beta|} = e^{i\beta y - |\beta| \ln(\frac{x}{a})}, \tag{4.38}$$

ce qui est en fait la f.c. d'une variable aléatoire de Cauchy avec paramètres y et $\ln(\frac{x}{a})$, telle que définie dans Ferguson (1967, page 102). Par conséquent, on peut écrire que

$$P[Y(T) \in du \mid X(0) = x, Y(0) = y] = \ln(\frac{x}{a}) \left\{\pi[(u-y)^2 + \ln^2(\frac{x}{a})]\right\}^{-1} du. \tag{4.39}$$

Donc, comme dans le cas où $X(t)$ est un mouvement brownien, $Y(T)$ présente une distribution de Cauchy, de sorte que ses moments n'existent pas.

En conclusion, dans cette section nous avons obtenu une expression pour la fonction caractéristique de $Y(T)$ en fonction de la f.g.m. de

$$T = \inf\{t : X(t) = a \mid X(0) = x\}.$$

Nous avons considéré deux cas particuliers pour le processus $X(t)$: un processus d'Ornstein-Uhlenbeck et un processus ayant une fonction de densité lognormale. Notons aussi que le théorème que nous avons démontré nous a permis d'obtenir une formule pour la transformée de Fourier inverse d'une fonction parabolique cylindrique.

BIBLIOGRAPHIE

1. Abramovitz W. et Stegun I.A., "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables," Dover, New York, 1965.
2. Bryson A.E. et Ho Y.C., "Applied Optimal Control," Wiley, New York, 1975.
3. Cox D.R. et Miller H.D., "The Theory of Stochastic Processes," Methuen, London, 1965.
4. Feller W., "An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume II," Wiley, New York, 1971.
5. Ferguson T.S., "Mathematical Statistics, A Decision Theoretic Approach," Academic Press, New York, 1967.
6. Kannan D., "An Introduction to Stochastic Processes," North Holland, New York, 1979.
7. Lefebvre M., *A note on the survival time of a dynamic system in an interval*, à paraître, IEEE Transactions on Automatic Control.
8. Prabhu N.U., "Stochastic Processes: Basic Theory and its Applications," Macmillan, New York, 1965.
9. Siegert A.J.F., *On the first passage time probability problem*, Phys. Rev. **81** (1951), 617–623.
10. Wang M.C. et Uhlenbeck G.E., *On the theory of Brownian motion II*, Rev. Modern Phys. **17** (1945), 323–342.

M. Lefebvre
Département de mathématiques appliquées
Ecole Polytechnique
Campus de l'Université de Montréal
Case Postale 6079, succursale "A"
Montréal, Québec, Canada
H3C 3A7