THÉORÈMES DU TYPE SINGER ET WERMER

M. AKKAR, E. ILLOUSSAMEN ET M. OUDADESS

RÉSUMÉ. Dans [8], I.M. Singer et J. Wermer ont montré le résultat suivant:

THÉORÈME. Soit A une algèbre de Banach commutative et soit D une dérivation continue sur A . Alors $D(A)$ est contenu dans le radical de Jacobson de A .

Nous étendons ce théorème à certains systèmes de dérivations dans les algèbres de Banach commutatives, ensuite nous donnons, dans les algèbres topologiques, un théorème analogue à celui-ci. Les techniques utilisées sont inspirées de [8].

ABSTRACT. The first result concerning derivations on commutative Banach algebras is the following theorem of I.M. Singer and J. Wermer:

THEOREM. Let A be a commutative Banach algebra and let D be a continuous derivation on A then $D(A)$ is contained in $\text{Rad } A$, the Jacobson radical of A .

We extend this result to some systems of derivations on commutative Banach algebras and give analogous theorems for some topological or bornological algebras.

Introduction. Dans tout cet article toutes les algèbres sont complexes et on note par $\text{Rad } A$ le radical de Jacobson d'une algèbre A .

Nous montrons en section I, que si $(D_0, D_1, \dots)$ est un système de dérivations dans une algèbre de Banach commutative A et si, pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble

$$\left\{ \frac{1}{\lambda^n} D_n, n \geq 0 \right\}$$

est borné dans $B(A)$, l'algèbre des opérateurs bornés de A , alors $D_n(A)$ est contenu dans $\text{Rad } A$ pour tout $n \geq 1$. Et nous donnons un exemple qui montre que la continuité des D_n ($n \geq 0$) ne suffit pas pour avoir $D_n(A)$ contenu dans $\text{Rad } A$ pour tout $n \geq 1$.

Nous rappelons en section II des exemples bien connus qui montrent que le résultat de Singer et Wermer n'est pas valable dans les algèbres de Fréchet.

Par ailleurs, en utilisant un résultat de [1], nous obtenons que si D est une dérivation fortement bornée dans une algèbre localement multiplicativement convexe commutative complète A , alors l'image de tout élément régulier au sens de L. Waelbroeck (ou élément borné au sens de G.R. Allan) appartient à $\text{Rad } A$.

Mentionnons que dans le cas d'une algèbre pseudo-Banach commutative A , on vérifie facilement que si D est une dérivation fortement bornée dans A , alors $D(A)$ est contenu dans $\text{Rad } A$. Nous remarquons aussi qu'un résultat de [6] permet de vérifier que le résultat de Singer et Wermer reste encore valable dans les algèbres localement uniformément A -convexes commutatives unitaires complètes (voir la définition dans [6]).

Signalons enfin que M.P. Thomas a montré récemment que la continuité de la dérivation dans le théorème de Singer et Wermer est superflue. Cette information nous a été communiquée par le rapporteur.

Cet article est une partie de la thèse de 3^e cycle soumise par le second auteur à l'E.N.S. de Rabat en 1987.

0. Préliminaires.

DÉFINITION. Soit A une algèbre. Une application linéaire $D: A \rightarrow A$ est dite une *dérivation* dans A si

$$D(ab) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$$

pour tous $a, b \in A$.

Algèbres topologiques. Soit (E, τ) un espace localement convexe (e.l.c.) et soit $(P_\lambda)_\lambda$ une famille de semi-normes définissant la topologie τ . Si E est muni d'une structure d'algèbre telle que

$$P_\lambda(x \cdot y) \leq P_\lambda(x)P_\lambda(y)$$

pour tous $x, y \in E$ et tous λ , on dit que (E, τ) est une *algèbre localement multiplicativement convexe* (en abrégé a.l.m.c.).

Rappelons qu'un élément d'une a.l.m.c. complète est régulier si et seulement si son spectre est borné (cf. [2]).

Algèbres bornologiques. Les algèbres pseudo-Banach ont été introduites et étudiées par G.R. Allan, H.G. Dales et J.P. McClure dans [3] sous le nom de Pseudo-Banach algebras. Ces algèbres ont été aussi introduites par H. Hogbé-Nlend dans [5] sous le nom d'*algèbres bornologiques multiplicativement convexes complètes* (a.b.m.c. complètes).

Ces algèbres sont des limites inductives bornologiques d'algèbres de Banach (cf. [5]).

Opérateurs fortement bornés. Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques (e.v.t.). Une application linéaire $f: E \rightarrow F$ est dite *fortement bornée* s'il existe un voisinage V de zéro dans E tel que $f(V)$ est borné dans F (i.e. absorbé par tout voisinage de zéro).

De même si E et F sont deux espaces vectoriels bornologiques (e.v.b., voir la définition dans [4]) on peut aussi définir un opérateur fortement borné de E dans F (cf. [1]).

Signalons enfin que si (E, τ) est un espace vectoriel topologique alors l'ensemble des bornés de E forme une bornologie appelée bornologie de Von-Neumann qui sera notée $B\tau$ (cf. [4]).

I. Un théorème du type Singer et Wermer pour les systèmes de dérivations.

Dans la plupart des travaux sur les systèmes de dérivations, on ne traite que des questions de continuité automatique. Ici on se propose de donner un théorème du type Singer et Wermer pour ces systèmes dans les algèbres de Banach commutatives.

DÉFINITION. On appelle *système de dérivations* dans l'algèbre A toute suite $(D_0, D_1, D_2, \dots)$ d'applications linéaires de A dans A vérifiant

$$D_k(ab) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} D_i(a)D_{k-i}(b) \quad (a, b \in A)$$

Le système est dit d'ordre fini (resp. infini) si la suite $(D_0, D_1, D_2, \dots)$ est finie (resp. infinie).

Signalons que D_0 est un morphisme d'algèbres et que si $D_0 = I$ (l'identité), alors D_1 est une dérivation.

En exploitant la technique utilisée dans [8], on obtient le:

THÉORÈME I.1. *Soit A une algèbre de Banach commutative et soit $(D_0, D_1, D_2, \dots)$ un système de dérivations d'ordre infini tel que $\{\frac{1}{\alpha^n} D_n \mid n \geq 0\}$ est borné dans $B(A)$ pour un*

certain $\alpha \in \mathbb{C}$, ($B(A)$ étant l'algèbre des opérateurs bornés de A). Alors $D_n(A) \subset \text{Rad } A$ ($\forall n \geq 1$).

PREUVE: Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, ($D_0, \lambda D_1, \lambda^2 D_2, \dots$) est un système de dérivations d'ordre infini. Comme l'ensemble $\{\frac{1}{\alpha^n} D_n \mid n \geq 0\}$ est borné dans $B(A)$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} D_n$ converge dans $B(A)$. De plus $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} D_n$ est un morphisme d'algèbre, pour cela, il suffit d'utiliser la propriété suivante:

$$\lambda^k D_k(ab) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^i D_i(a) \lambda^{k-i} D_{k-i}(b) \quad (a, b \in A, k \in \mathbb{N}).$$

Soit ϕ un caractère de A , alors $\phi \circ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} D_n$ est aussi un caractère de A . Ainsi, si $a \in A$ on a:

$$\left| \left(\phi \circ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} D_n \right) (a) \right| \leq \|a\| \quad (*)$$

et ceci pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Or $(\phi \circ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} D_n)(a) = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \phi \circ D_n)(a)$ car ϕ est continu. D'après (*) la série entière

$$\lambda \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \phi \circ D_n(a)$$

est bornée, donc constante d'après le théorème de Liouville. D'où $\phi \circ D_n(a) = 0$, pour tout $n \geq 1$. Ceci donne $D_n(A) \subset \text{Rad } A$ pour tout $n \geq 1$, ce qui termine la preuve. $\square$

Considérons ($D_0, D_1, \dots$) un système de dérivations d'ordre infini dans une algèbre de Banach commutative A . On sait que D_0 est un morphisme d'algèbre; dans le cas où $D_0 = I$, (opérateur identité) il suffit que les D_n ($n \geq 1$) soient continues pour avoir $D_n(A) \subset \text{Rad } A$ ($n \geq 1$). Ceci est dû en fait au résultat suivant:

PROPOSITION (SADI ABU-SAYMEH [7]). Soit ($I, D_1, D_2, \dots$) un système de dérivations d'ordre infini dans un algèbre commutative A , (I est l'opérateur identité). Soit, pour tout $n \geq 1$, d_n l'application de A dans A définie par:

$$d_n = \sum_{r=0}^n (-1)^{r+1} \frac{1}{r} \sum_{(n_1, \dots, n_r) \in P_{n,r}} D_{n_1} D_{n_2} \dots D_{n_r}$$

où $P_{n,r} = \{(n_1, \dots, n_r) \mid \sum_{i=1}^r n_i = n, n_i \in \mathbb{N}\}$. Alors

- (i) d_n ($n = 1, 2, \dots$) est une dérivation dans A .
- (ii) $D_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} \sum_{(n_1, \dots, n_r) \in P_{n,r}} d_{n_1} d_{n_2} \dots d_{n_r}$

Remarquons que si les D_n sont continues, alors les d_n le seront aussi, et comme chaque d_n est une dérivation, son image sera contenue dans le radical. Or D_n est une combinaison des d_n , donc son image sera contenue aussi dans le radical.

Une question qui se pose maintenant est de savoir, si dans le théorème I.1, la continuité des D_i ($i \geq 0$) est suffisante. À l'aide d'un exemple, nous répondons négativement à cette question. Ceci en fait montre aussi que le résultat de Sadi-Abu-Saymeh (proposition précédente) ne reste plus vrai si on supprime la condition $D_0 = I$.

EXEMPLE. Soit $\mathbb{C}[[t]]$ l'algèbre des séries formelles sur $\mathbb{C}$ à une indéterminée t . Soit $W = (W_n)$ une suite de réels strictement positifs vérifiant

$$W_0 = 1, W_{n+m} \leq W_n \cdot W_m \text{ et } \lim_n W_n^{1/n} > 0.$$

Alors $l^1(\mathbb{N}, W) = \{x = \sum x_n t^n : \|x\| = \sum |x_n W_n| < \infty\}$ est une algèbre de Banach commutative semi-simple.

Pour tout $i \geq 0$, soit $P_i : l^1(\mathbb{N}, W) \rightarrow l^1(\mathbb{N}, W)$ l'application définie par $P_i(\sum x_n t^n) = x_i t^i$. Montrons que $(P_0, !P_1, \dots, n!P_n, \dots)$ est un système de dérivations d'ordre infini dans $l^1(\mathbb{N}, W)$. En effet, pour tout $k \geq 0$, on a :

$$k!P_k \left(\left(\sum x_n t^n \right) \left(\sum y_n t^n \right) \right) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} i! P_i \left(\sum x_n t^n \right) (k-i)! P_{k-i} \left(\sum y_n t^n \right)$$

car

$$\begin{aligned} k!P_k \left(\left(\sum x_n t^n \right) \left(\sum y_n t^n \right) \right) &= k! \left(\sum_{i=0}^k x_i y_{k-i} \right) t^k \\ &= k! \sum_{i=0}^k P_i \left(\sum x_n t^n \right) P_{k-i} \left(\sum y_n t^n \right) \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} i! P_i \left(\sum x_n t^n \right) (k-i)! P_{k-i} \left(\sum y_n t^n \right). \end{aligned}$$

Remarquons que chaque P_i ($i \geq 0$) est continue vu que

$$\left\| P_i \left(\sum x_n t^n \right) \right\| = |x_i| W_i \leq \left\| \sum x_n t^n \right\|.$$

Maintenant, pour avoir $P_i(l^1(\mathbb{N}, W)) \subset \text{Rad}(l^1(\mathbb{N}, W)) = \{0\}$ ($i \geq 1$), il faut avoir $P_i(l^1(\mathbb{N}, W)) = \{0\}$ $i \geq 1$, or ceci est inexact.

II. Théorème de Singer et Wermer dans les algèbres localement m -convexes.

Les exemples suivants montrent que le théorème de Singer et Wermer n'est pas valable dans les a.l.m.c. de Fréchet.

EXEMPLE 1. Soit $E = D_K(\Omega)$ l'a.l.m.c. de Fréchet des fonctions définies sur Ω , ouvert de $\mathbb{R}$, de classe C^∞ à support dans le compact K . L'application $f \rightarrow f'$ est une dérivation, dans E continue et non-nulle, donc son image n'est pas contenue dans $\text{Rad } E = \{0\}$.

EXEMPLE 2. Soit $E = C^\infty[0, 1]$ l'algèbre des fonctions complexes qui sont indéfiniment dérivables sur $[0, 1]$. C'est une a.l.m.c. de Fréchet commutative et $D : f \rightarrow f'$ est une dérivation, dans E , continue et non nulle donc $D(E)$ n'est pas contenue dans $\text{Rad } E = \{0\}$.

Nous allons montrer maintenant que sous certaines conditions supplémentaires, l'image de la dérivation sera contenue dans le radical.

Nous commençons par un lemme.

LEMME II.1. Soit E un e.v.t. et soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $B(E)$ qui converge bornologiquement vers 0, ($B(E)$ étant l'algèbre des opérateurs fortement bornés de E). Alors pour tout $x \in E$, $(f_n(x))_n$ converge bornologiquement vers 0 dans E .

PREUVE: $(f_n)_n$ converge bornologiquement vers 0 dans $B(E)$, signifie qu'il existe H un borné de $B(E)$ et $(\lambda_n)_n$ une suite décroissante de réels strictement positifs tels que $\lambda_n \rightarrow 0$ et

$$f_n \in \lambda_n H \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (*)$$

Par définition de H , il existe V , un voisinage de 0 dans E tel que

$$H(V) = \bigcup_{f \in H} f(V)$$

soit borné dans E . Soit maintenant $x \in E$, comme V absorbe x , il existe un réel α tel que $x \in \alpha V$. Soit

$$H(\alpha V) = \bigcup_{f \in H} f(\alpha V).$$

$H(\alpha V)$ est contenu dans $\alpha H(V)$, donc borné dans E . D'après (*), $\frac{1}{\lambda_n} f_n \in H$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et puisque $x \in \alpha V$, $\frac{1}{\lambda_n} f_n(x) \in H(\alpha V)$ par suite $f_n(x) \in \lambda_n H(\alpha V)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme E est un e.v.b., l'enveloppe équilibrée de $H(\alpha V)$ qui est bornée, est un borné de E noté $\Gamma H(\alpha V)$. Alors $f_n(x) \in \lambda_n \Gamma H(\alpha V)$. D'où $(f_n(x))_n$ converge bornologiquement vers 0 dans E . $\square$

On a maintenant le:

THÉORÈME II.2. Soit E une a.l.m.c. commutative complète et soit D une dérivation fortement bornée dans E . Alors $D(a) \in \text{Rad } E$ pour tout élément régulier $a \in E$.

PREUVE: Soit τ la topologie de E . (E, τ) étant un e.l.c. complet, alors $(E, \mathbf{B}\tau)$ est un c.b.c. complet, de plus τ et $\mathbf{B}\tau$ sont compatibles. Donc $B(E)$, l'algèbre des opérateurs fortement bornés de E , muni de l'équibornologie forte est une a.b.m.c. complète ([1]). $B(E)$ n'est pas unitaire. Soit $B_1(E)$ l'algèbre engendrée par $B(E)$ et $\mathbf{C}I$ où I est l'opérateur identité. Alors $B_1(E)$ munie de la bornologie produit de celles de $B(E)$ et de $\mathbf{C}$ devient une a.b.m.c. complète unitaire ([5]). On a bien $D \in B_1(E)$, de même $\lambda I \in B_1(E)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et puisque les fonctions entières opèrent dans les a.b.m.c. complètes unitaires ([5]), on a $\exp(\lambda D) = e^{\lambda D} \in B_1(E)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. Donc

$$\left(\sum_{n=0}^N \frac{\lambda^n}{n!} D^n \right)_N$$

converge bornologiquement dans $B_1(E)$ vers $e^{\lambda D}$ et puisque la projection de $B_1(E)$ sur $B(E)$ est bornée,

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{\lambda^n}{n!} D^n \right)_N$$

converge bornologiquement dans $B(E)$ vers $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} D^n$ et d'après le lemme II.1

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{\lambda^n}{n!} D^n(x) \right)_N$$

converge bornologiquement dans E vers

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} D^n \right) (x)$$

pour tout $x \in E$, donc aussi topologiquement puisque la bornologie de E est la bornologie de Von-Neumann $\mathbf{B}\tau$, par suite

$$\sum_{n=0}^N \frac{\lambda^n}{n!} D^n(x) = x + \sum_{n=1}^N \frac{\lambda^n}{n!} D^n(x)$$

tend vers $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} D^n(x) = e^{\lambda D}(x)$, quand $n \rightarrow \infty$. On a montré que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} D^n(x)$ converge (topologiquement) dans E vers l'élément $e^{\lambda D}(x)$, pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$. D'autre part, toute dérivation vérifie la formule de Leibnitz, donc on a

$$\lambda^n D^n(x \cdot y) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \lambda^p D^p(x) \lambda^{n-p} D^{n-p}(y) \quad (x, y \in E, \lambda \in \mathbb{C}).$$

Ceci permet de montrer comme dans les algèbres de Banach que $e^{\lambda D}$ est un morphisme d'algèbre. Alors pour tout caractère continu h de E , $h \circ e^{\lambda D}$ est aussi un caractère de E . Soit a un élément régulier de E , donc son spectre est borné ([2]), cela implique qu'il existe un réel M tel que

$$|h \circ e^{\lambda D}(a)| \leq M \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}) \quad (*)$$

On a maintenant

$$\begin{aligned} h \circ e^{\lambda D}(a) &= h \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} D^n \right) (a) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} h \circ D^n(a) \end{aligned}$$

car h est continu. Donc l'application $\lambda \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} h \circ D^n(a)$ définie sur $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est une série entière bornée d'après (*). On conclut à l'aide du théorème de Liouville que cette série est constante d'où $h \circ D^n(a) = 0$ pour tout $n \geq 1$. donc en particulier, $h(D(a)) = 0$. Ceci montre que $D(a)$ appartient à l'intersection des noyaux des caractères continus de E qui est égale à $\text{Rad } E$. $\square$

COROLLAIRE II.3. *Soit E une a.l.m.c. commutative complète dont tout élément est régulier et soit D une dérivation fortement bornée dans E . Alors $D(E) \subset \text{Rad } E$.*

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Akkar, *Sur la théorie spectrale des opérateurs fortement bornés dans les espaces vectoriels topologiques ou bornologiques*, C.R. Acad. Sc. Paris **274** (1972), 1805–1808.
2. G.R. Allan, *A spectral theory for locally convex algebras*, Proc. London Math. Soc. **3** (1965), 399–421.
3. G.R. Allan, H.G. Dales J.P. McClure, *Pseudo-Banach algebras*, Studia Math. **XL** (1971), 55–69.
4. H. Hogbe-Nlend, "Bornologies and functional analysis," North-Holland, 1977.
5. H. Hogbe-Nlend, *Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques*, Bol. Soc. Brasil Math. **3** (1972), 19–56.

6. M. Oudadess, *Une norme d'algèbre de Banach dans les algèbres localement uniformément A -convexes*, Afrika Matematika **IX** (1987), 15-22.
7. S.A. Saymeh, *On Hasse-Schmidt higher derivations*, Osaka J. Math. **23** (1986), 503-508.
8. I.M. Singer, J. Wermer, *Derivations on commutative normed algebras*, Math. Ann. **129** (1955), 260-264.

M. Akkar

U.F.R de Math-Info

Université de Bordeaux I

33405 Talence Cedex (France)

E. Illoussamen et M. Oudadess

École Normale Supérieure Takadoum

Avenue Oued Akreuch

B.P. 5118, Rabat, Maroc