Ann. sc. math. Québec, 1981, vol. V, no 2, pp. 137-145

LE NOMBRE DE RÉALISATIONS POSSIBLES D'UN PROCESSUS DE GALTON-WATSON

Alain Latour

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous introduisons une suite définie par récurrence afin de calculer la cardinalité de l'espace échantillonnal d'un processus de Galton-Watson. De plus, nous fournissons une interprétation combinatoire de celle-ci.

0. INTRODUCTION

Pour expliquer certains processus biologiques et physiques, le modèle du processus de Galton-Watson est parfois utilisé. Définissons-le en termes simples. Un individu a, à la fin de sa vie, un nombre aléatoire X de descendants suivant une loi de probabilité donnée par $P[X = k] = p_k$, $k \geq 0$. On suppose que les individus de la population agissent indépendamment les uns des autres et que leur progéniture respective est identiquement distribuée comme X . De plus, on admet que tous les individus ont la même durée de vie. En dénotant par Z_n , $n \geq 0$, la taille de la $n^{\text{ième}}$ génération, on définit un processus Markovien $(Z_0 \equiv 1)$. Une étude élémentaire d'un tel processus est présentée dans Karlin et Taylor [3].

Dans certaines situations, il est parfois essentiel de connaître le nombre de réalisations possibles d'un tel processus. Pensons, par exemple, au cas où nous voudrions faire une étude exhaustive et exacte d'une méthode d'estimation de la loi initiale d'un tel processus (Latour [5]). La connaissance de ce nombre peut alors s'avérer utile pour évaluer l'ordre de grandeur des calculs impliqués dans une telle recherche. Nous ajouterons comme hypothèse qu'un individu de la population ne peut générer plus de K descendants. Dans ce contexte, nous nous proposons de déterminer la cardinalité de l'ensemble suivant:

$$R(u,K) = \{(Z_o,Z_1,\ldots,Z_u) : Z_o = 1 , \quad Z_{i+1} \le KZ_i , \quad i = 0,1,\ldots,u-1\} .$$

On reconnaît là, l'ensemble de toutes les réalisations possibles d'un processus de Galton-Watson où $p_i \neq 0$, $0 \le i \le K$, et $p_i = 0$, $i > K$. Si jamais $p_i = 0$ pour $0 \le i \le K$, nous nous intéresserions uniquement à des sous-ensembles de $R(u,K)$. Nous démontrerons que la cardinalité de $R(u,K)$ est $s(K^u,K) - 1$ où $s(\cdot,\cdot)$ est défini par:

1) $s(0,K) = 1$, $K \ge 1$,

2) $s(n,K) = s(n-1,K) + s([n/K],K)$, $n \ge 1$, $K \ge 1$,

où $[x]$ est la partie entière de x .

Si nous posons $K = 2$ dans la définition de $s(\cdot,\cdot)$, on reconnaît la suite $\phi_n = \langle s(n,2)\rangle$ donnant le nombre de partages du nombre $2n$ en puissances de 2 . Cette suite particulière fut étudiée par Knuth [4] et Churchhouse [1], [2]. De son côté, Knuth s'est surtout intéressé à la "vitesse de croissance" de la suite et a explicité la fonction génératrice de celle-ci. Pour sa part, Churchhouse a étudié les propriétés congruentielles des éléments de la suite.

Nous montrerons donc comment intervient de façon naturelle la suite des $s(n,K)$, généralisation de la suite étudiée par Knuth et Churchhouse, dans ce contexte de dénombrement. Nous fournirons aussi une interprétation combinatoire de celle-ci.

1. LA SUITE DES $s(n,K)$

Dénotons par $n(u,j,K)$ le nombre d'éléments de $R(u,K)$ ayant $Z_u = j$, $0 \le j \le K^u$. Nous aurons alors

$$\#R(u,K) = \sum_{j=0}^{K^u} n(u,j,K) .$$

1.1. PROPOSITION. Les $n(u,j,K)$ satisfont les relations suivantes:

i) $n(0,j,K) = \delta^{1,j}$, le delta de Kronecker,

ii) $n(u,0,K) = \sum_{i=0}^{K^{u-1}} n(u-1,i,K) = \#R(u-1,K)$,

iii) $$n(u,j,K) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=\left[\frac{j+K-1}{K}\right]}^{K^{u-1}} n(u-1,i,K) , & 0 < j \leq K , \\ 0 , & \text{autrement,} \end{cases}$$

où $[x]$ est la partie entière de x .

PREUVE. Les relations i) et ii) sont évidentes. Pour se convaincre de la validité de la troisième, il suffit de voir que pour générer $mK+1$, $mK+2$, ... , $mK+K$ descendants, il doit y avoir au moins $m + 1$ pères. Mais puisque $[(mK+j+K-1)/K] = m + 1$, pour $j = 1,2,\ldots,K$, la proposition est démontrée.

Dans les tableaux suivants, on retrouve quelques-uns des $n(u,j,K)$ pour $K = 2,3$ et $u = 0,1,2,3$ ou 4 .

u \ j	K = 2																
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	1																
1	1	1	1														
2	3	2	2	1	1												
3	9	6	6	4	4	2	2	1	1								
4	35	26	26	20	20	14	14	10	10	6	6	4	4	2	2	1	1

Tableau 1

u \ j	K = 3 0	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15	16-18	19-21	22-24	25-27
0	1									
1	1	1								
2	4	3	2	1						
3	22	18	15	12	9	7	5	3	2	1

Tableau 2

Nous supposerons toujours que $K \geq 2$. Les cas où $K = 0$ ou 1 sont sans intérêt. On peut toujours considérer les lignes des Tableaux 1 et 2 comme des suites finies. Ainsi, si nous laissons de côté les $n(u,0,K)$, nous voyons que tout élément de ces suites se répète successivement K fois. Ceci se vérifie aisément en utilisant la troisième relation de la Proposition 1.1. Pour un K fixé, si on écrit les termes de ces suites en faisant varier l'indice j de K^u à 1 , la suite correspondant à un u est tout simplement une troncation de la suite correspondant à $u+1$. Ainsi, pour $K = 2$ et $u = 3$, nous avons la suite $<1,1,2,2,4,4,6,6>$ (les symboles "$<$" et "$>$" étant utilisés pour délimiter les suites) de sorte qu'en laissant tomber les quatres derniers termes, nous retrouvons la suite $<1,1,2,2>$ correspondant au cas où $K = 2$ et $u = 2$.

L'étude des suites ainsi construites peut donc se résumer aux termes dont l'indice est un multiple de K . Mais puisque pour K fixé, les suites obtenues ne sont à toutes fins pratiques que des troncations d'une même suite infinie, nous restreindrons notre étude en laissant tomber l'indice u . Nous considérerons des suites doublement indicées que nous dénoterons par $s(j,K)$. Le lien entre $s(j,K)$ et $n(u,i,K)$ est donné par:

$$s(j,K) = n(u,K^u-jK,K) \ , \quad j = 0,1,\dots,K^{u-1}-1 \ .$$

Par exemple, la suite $<s(n,2)>$ sera $<1,2,4,6,10,14,20,\dots>$, tandis que $<s(n,3)>$ sera $<1,2,3,5,7,9,12,15,\dots>$, comme on peut le vérifier facilement à l'aide des Tableaux 1 et 2.

1.2. LEMME. Soit m un entier quelconque tel que $0 \le m < K^u$. Alors, $n(u,K^u-m,K) = n(u,K^u-[m/K]K,K)$.

PREUVE. Soit m un entier satisfaisant l'hypothèse. Alors, il existe un entier i , $0 \le i < K^{u-1}$, tel que $m = iK + r$ et $0 \le r < K$. D'une part, $[(K^u-iK-r+K-1)/K] = K^{u-1} - i$ et, $[(K^u - [(iK+r)/K]K+K-1)/K] = K^{u-1} - i$. D'autre part, en utilisant la troisième relation de la Proposition 1.1, on voit que $n(u,K^u-m,K) = n(u,K^u-[m/K]K,K)$. Ceci termine la démonstration du lemme.

1.3. PROPOSITION. Les suites $<s(n,K)>$ satisfont les relations suivantes:

i) $s(0,K) = 1$,

ii) $s(n,K) = s(n-1,K) + s([n/K],K)$.

PREUVE. Puisque $s(0,K) = n(1,K,K) = 1$, la relation i) est évidente.

Si $n = 1$, $s(1,K) = n(2,K(K-1),K)$. Puisque $[(K(K-1)+K-1)/K] = K - 1$, en utilisant la relation iii) de la première proposition, on obtient $n(2,K(K-1),K) = n(1,K-1,K) + n(1,K,K)$. Or, $n(1,K-1,K) = n(1,K,K) = 1$. Donc, $s(1,K) = 2$. De plus, sachant que $s(0,K) = 1$, $s(0,K) + s(0,K) = 2$. Ceci démontre la validité de la relation ii) lorsque $n = 1$.

Soit m un entier non négatif quelconque. Choisissons u tel que $m < K^{u-1}$. Par définition de $R(u,K)$, $Z_u \le K^u$, pour tout élément de $R(u,K)$. Or, dans la suite des $n(u,j,K)$ correspondant à u , on trouve K^{u-1} termes de la suite des $s(n,K)$, numérotés de 0 à $K^{u-1} - 1$. Ecrivons m sous la forme $K^{u-1} - q = m$ et posons $j = Kq$. Nous aurons $j + K = (q+1)K$. Comme précédemment,

$$n(u,j,K) = \sum_{i=q}^{K^{u-1}} n(u-1,i,K) ,$$

$$n(u,j+K,K) = \sum_{i=q+1}^{K^{u-1}} n(u-1,i,K) .$$

A l'aide de ces deux équations, on voit que:

$$n(u-1,q,K) = n(u,j,K) - n(u,j+K,K)$$

et,

$$n(u,j,K) = n(j,j+K,K) + n(u-1,q,K) .$$

En soustrayant et additionnant K^u à l'indice du centre, on obtient:

$$n(u,K^u-K(K^{u-1}-q),K) = n(u,K^u-K(K^{u-1}-q-1),K) + n(u-1,q,K) .$$

En écrivant cette égalité en termes des $s(j,K)$, on trouve:

$$s(K^{u-1},K) = s(K^{u-1}-q-1,K) + n(u-1,q,K) .$$

Mais, en remplaçant $K^{u-1} - q$ par m , on obtient:

$$s(m,K) = s(m-1,K) + n(u-1,q,K) .$$

Cependant, le Lemme 1.2 nous indique que:

$$n(u-1,q,K) = n(u-1,K^{u-1}-m,K) = n(u-1,K^{u-1}- [m/K]K,K) .$$

En utilisant la relation entre les $n(u,j,K)$ et les $s(i,K)$, le dernier terme n'est rien d'autre que $s([m/K],K)$. Donc,

$$s(m,K) = s(m-1,K) + s([m/K],K) .$$

2. INTERPRÉTATION COMBINATOIRE DES $s(n,K)$

En reprenant essentiellement l'idée de Knuth, on peut voir que $s(n,K)$ est précisément le nombre de partages de l'entier Kn en puissances de K . Posons $P_K(m)$ égal au nombre de partages de m en puissances de K .

Rappelons que si $Kn = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\ell$ avec $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_\ell \geq 1$, on dit que $(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)$ est un partage de Kn en puissances de K si α_i est une puissance de K pour $1 \leq i \leq \ell$. Il est clair que si $\alpha_\ell = 1$, nous obtiendrons un partage $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{\ell-1})$ de $Kn-1$ en puissances de K . Sinon $\alpha_\ell > 1$ et

$(\alpha_1/K, \alpha_2/K, \ldots, \alpha_\ell/K)$ est un partage de n en puissances de K. Inversement, tout partage de Kn est obtenu soit d'un partage de $Kn - 1$, soit d'un partage de n. Donc, $P_K(Kn) = P_K(Kn-1) + P_K(n)$. Par ailleurs, il est facile de voir que $P_K(Kn+j) = P_K(Kn)$ pour $i \leq j \leq K - 1$, car dans ces cas, il doit y avoir j α égaux à 1, puisque $Kn + j$ n'est pas un multiple de K. Par convention, $P_K(0) = 1$ et on remarque que $P_K(j) = 1$, $1 \leq j \leq K - 1$ et $P_K(K) = 2$. Donc $s(n,K) = P_K(Kn)$.

3. LE RÉSULTAT PRINCIPAL

Le lemme suivant est nécessaire à la démonstration de la prochaine proposition.

3.1. LEMME. $s(K^{u-1},K) = K\left(\sum_{i=0}^{K^{u-1}-1} s(i,K)\right)$, $2 \leq u$.

PREUVE. On vérifie facilement que:

$$\begin{aligned} s(K^u-1,K) &= n(u+1, K^{u+1} - (K^u-1)K, K) \\ &= n(u+1,K,K) \\ &= \sum_{i=1}^{K^u} n(u,i,K) \\ &= K\left(\sum_{i=0}^{K^{u-1}-1} s(i,K)\right) . \end{aligned}$$

Le résultat suivant nous permet d'évaluer facilement la cardinalité des ensembles $R(u,K)$.

3.2. PROPOSITION. $\#R(u,K) = s(K^u,K) - 1$.

PREUVE. Si $u = 1$, on doit montrer que $\#R(1,K) = s(K,K) - 1$. On voit aisément que $\#R(1,K) = K + 1$. Aussi, en appliquant K fois la récurrence de la Proposition 1.3, on trouve que $s(K,K) = K + 2$.

Soit $u \geq 2$, quelconque, et procédons par récurrence:

$$\#R(u,K) = \sum_{i=0}^{K^u} n(u,i,K) = \sum_{i=1}^{K^u} n(u,i,K) + n(u,0,K)$$

$$= K\left(\sum_{i=0}^{K^{u-1}-1} s(i,K)\right) + s(K^{u-1},K) - 1 ,$$

car en appliquant l'hypothèse d'induction, $n(u,0,K) = \#R(u-1,K) = s(K^{u-1},K) - 1$. Donc,

$$\#R(u,K) = s(K^u-1,K) + s(K^{u-1},K) - 1 = s(K^u,K) - 1 ,$$

par le Lemme 3.1 et la récurrence des $s(j,K)$.

Notons finalement que si nous posons

$$f(t) = s(0,K) + s(1,K)t + s(2,K)t^2 + \ldots$$

comme étant la fonction génératrice, pour K fixé, de la suite $\langle s(n,K)\rangle$, alors il est facile de montrer que

$$f_K(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^K)(1-t^{K^2})(1-t^{K^3})\ldots}$$

RÉFÉRENCES

[1] CHURCHHOUSE, R.F., *Congruence properties of the binary partition function*, Proc. Camb. Phil. Soc., 1969, 66, 371-375.

[2] CHURCHHOUSE, R.F., *Binary partition, computers in number theory*, Proceedings of the Science Research Council Atlas Symposium, 2^e, Oxford, 1969, Editors: A.O.L. Atkin and B.J. Birch, London, Academic Press, 1971.

[3] KARLIN, S., TAYLOR, M.T., *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1975.

[4] KNUTH, D.E., *An almost linear congruence*, Fibonacci Quaterly, 4, 1966, 117-128.

[5] LATOUR, A., *Problèmes d'estimation dans un processus de ramification*, Mémoire de maîtrise, 363, Université du Québec à Montréal, 1979.

Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal,
C.P. 8888, Succ. "A"
Montréal, Québec
H3C 3P8

Manuscrit reçu le 9 mars 1981.
Revisé le 2 septembre 1981.