Ann. sc. math. Québec, 1981, vol. V, no 1, pp. 69-79

SUR LES SOLUTIONS PRESQU'AUTOMORPHES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES

Gaston Mandata N'Guérékata

Introduction

Soit l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t,x(t)) , \qquad -\infty < t < \infty .$$

Il est bien connu que l'existence d'une solution asymptotiquement presque périodique sur $0 \leq t < \infty$ entraîne celle d'une solution presque périodique sur $-\infty < t < \infty$ (voir par exemple [2], Théorème 9.2), l'équation étant considérée dans $\mathbb{R}^n$. Nous démontrons ici un résultat analogue dans un espace de Banach X muni de la norme $\|\cdot\|$ pour les solutions presqu'automorphes (p.a.) .

Rappelons qu'une fonction continue , $x(t) : \mathbb{R} \to X$, est dite p.a. si, pour toute suite réelle $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$, il existe une sous-suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que:

(i) $\lim_{n\to\infty} x(t + s_n) = y(t)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} y(t - s_n) = x(t)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

Cette notion fut introduite par S. Bochner [1] pour les fonctions numériques et généralisées pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach dans [5]. Nous l'étendons ici (Définition 1) pour les fonctions définies sur $\mathbb{R} \times X$ et à valeurs dans X .

Nous commençons d'abord par un exposé de résultats simples sur les fonctions que nous appelons *asymptotiquement presqu'automorphes*. En fait, cette notion généralise de façon très naturelle celle de fonctions dites asymptotiquement presque périodiques, présentée par M. Fréchet dans son important mémoire [3] (voir aussi [2] pour des développements plus récents).

1. Préliminaires

DÉFINITION 1. Une fonction continue $f(t,x) : \mathbb{R} \times X \to X$ est dite presqu'automorphe (p.a.) en t pour chaque $x \in X$ si, pour toute suite réelle $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$, il existe une sous-suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} f(t + s_n,x) = g(t,x)$ existe pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et chaque $x \in X$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} g(t - s_n,x) = f(t,x)$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et chaque $x \in X$.

REMARQUE 1. a) La convergence dans (i) n'est pas nécessairement uniforme par rapport à t , ce qui marque la différence avec la presque périodicité.

b) Il est évident que si $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$ sont p.a. en t pour chaque $x \in X$, alors les fonctions $f_1(t,x) + f_2(t,x)$ et $\lambda f_1(t,x)$ $(\lambda \in \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R})$ le sont aussi.

Nous démontrons le

LEMME 1. Si $f(t,x)$ est p.a. en t pour chaque $x \in X$, alors

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \|f(t,x)\| < \infty$$

pour chaque $x \in X$.

DÉMONSTRATION. Supposons par contradiction que, pour un certain $x_0 \in X$, on a:

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \|f(t,x_0)\| = \infty .$$

Il existe alors une suite réelle $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que $f(s'_n, x_0) \to \infty$ quand $n \to \infty$. Comme $f(t,x)$ est p.a. en t pour chaque x , on peut extraire une sous-suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ de $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que:

$$\lim_{n\to\infty} f(s_n, x_0) = g(0, x_0) ,$$

ce qui est impossible. Le lemme est démontré.

Nous avons aussi le lemme suivant dont nous omettons la démonstration car elle est évidente:

LEMME 2. Si $f(t,x)$ est p.a. en t pour chaque x , alors la fonction $g(t,x)$ obtenue dans la Définition 1 vérifie aussi:

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \|g(t,x)\| < \infty$$

pour chaque $x \in X$.

Nous avons ensuite le

LEMME 3. Si $f(t,x)$ est p.a. en t pour chaque x , et si de plus, elle satisfait une condition de Lipschitz en x uniformément en t , alors $g(t,x)$ satisfait aussi la même condition de Lipschitz en x uniformément en t .

DÉMONSTRATION. Soit $L > 0$ telle que, pour chaque $x,y \in X$, on a:

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$$

uniformément en t . Nous voulons que la même inégalité soit vérifiée par la fonction $g(t,x)$; soit $t \in \mathbb{R}$ quelconque et $\varepsilon > 0$. Alors, d'une suite réelle arbitraire $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$, nous pouvons extraire une sous-suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que:

$$\|g(t,x) - f(t + s_n, x\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|g(t,y) - f(t + s_n, y\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour n suffisamment grand. Ecrivons

$$\begin{aligned} g(t,x) - g(t,y) &= g(t,x) - f(t+s_n,x) \\ &\quad + f(t+s_n,x) - f(t+s_n,y) \\ &\quad + f(t+s_n,y) - g(t,y) \ . \end{aligned}$$

Alors, nous obtenons pour n assez grand

$$\begin{aligned} \|g(t,x) - g(t,y)\| &< \frac{\varepsilon}{2} + L\|x-y\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon + L\|x-y\| \ . \end{aligned}$$

Comme ε et t sont arbitraires, on a:

$$\|g(t,x) - g(t,y)\| \le L\|x-y\|$$

uniformément en t ; ce qu'il fallait démontrer.

Nous obtenons maintenant le théorème de composition suivant:

THÉORÈME 1. Soit X un espace de Banach et $f(t,x)$ une fonction p.a. en t pour chaque $x \in X$, et supposons que $f(t,x)$ satisfait une condition de Lipschitz en x uniformément en t ; soit $\varphi(t) : \mathbb{R} \to X$ une fonction p.a. dans X . Alors la fonction

$$F(t) = f(t,\varphi(t)) : \mathbb{R} \to X$$

est p.a. dans X .

DÉMONSTRATION. Soit $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite réelle arbitraire. Alors il existe une sous-suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que

(i) $\lim_{n\to\infty} f(t+s_n,x) = g(t,x)$ existe pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et $x \in X$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \varphi(t+s_n) = \phi(t)$ existe pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} g(t-s_n,x) = f(t,x)$ existe pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et chaque $x \in X$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} \phi(t-s_n) = \varphi(t)$ existe pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

Considérons la fonction $G(t) = g(t,\phi(t))$. Alors on peut écrire:

$$F(t + s_n) - G(t) = f(t + s_n, \varphi(t + s_n)) - f(t + s_n, \phi(t))$$
$$+ f(t + s_n, \phi(t)) - g(t, \phi(t))$$

d'où l'inégalité:

$$\|F(t + s_n) - G(t)\| = \|f(t + s_n, \varphi(t + s_n)) - f(t + s_n, \phi(t))\|$$
$$+ \|f(t + s_n, \phi(t)) - g(t, \phi(t))\|$$
$$\leq L\|\varphi(t + s_n) - \phi(t)\|$$
$$+ \|f(t + s_n, \phi(t)) - g(t, \phi(t))\| \ .$$

Alors, par (i) et (ii), on déduit que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$\lim_{n \to \infty} F(t + s_n) = G(t) \ .$$

Il suffit maintenant de montrer que

$$\lim_{n \to \infty} G(t - s_n) = F(t)$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Soit

$$G(t - s_n) - F(t) = g(t - s_n, \phi(t - s_n)) - g(t - s_n, \varphi(t))$$
$$+ g(t - s_n, \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$$

d'où

$$\|G(t - s_n) - F(t)\| \leq \|g(t - s_n, \phi(t - s_n)) - g(t - s_n, \varphi(t))\|$$
$$+ \|g(t - s_n, \varphi(t)) - f(t, \varphi(t)\|$$
$$\leq L\|\phi(t - s_n) - \varphi(t)\|$$
$$+ \|g(t - s_n, \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))\| \ .$$

On conclut en s'appuyant sur (iii) et (iv) .

2. Fonctions asymptotiquement presqu'automorphes

Soit X un expace de Banach.

DÉFINITION 2. Une fonction continue $f(t) : [0,\infty) \to X$ est dite asymptotiquement presqu'automorphe (a.p.a.) si

$$f(t) = g(t) + h(t) \tag{1}$$

où $g(t) : \mathbb{R} \to X$ est une fonction p.a. dans X et $h(t) : [0,\infty) \to X$ est une fonction continue telle que $\lim_{t\to\infty} h(t) \equiv \theta$.

REMARQUE 2.

- Toute fonction p.a. est a.p.a. (il suffit de prendre $h \equiv \theta$) .
- La somme de deux fonctions a.p.a. est aussi a.p.a.
- Si $f(t)$ est a.p.a., alors $\lambda f(t)$ aussi est a.p.a. ($\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) .

Nous obtenons le théorème suivant qui établit l'unicité de la décomposition (1).

THÉORÈME 2. Pour toute fonction a.p.a. $f(t)$, la décomposition (1) est unique.

DÉMONSTRATION. Supposons le contraire et soit une seconde décomposition:

$$f(t) = g_1(t) + h_1(t)$$

où $g_1(t)$ est p.a. et $h_1(t)$ continue sur $[0,\infty)$ et $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$. On a:

$$g_1(t) - g(t) + h_1(t) - h(t) = 0$$

pour tout $t \geq 0$. Si $t \to \infty$, $g_1(t) - g(t) \to 0$ car $g_1(t) - g(t) = h(t) - h_1(t)$ pour $t \geq 0$. Mais puisque $g_1(t) - g(t)$ est p.a., on conclut que $g_1(t) - g(t) \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$; en effet, considérons la suite $\{n\}_{n=1}^{\infty}$. Comme $g_1(t) - g(t)$ est p.a., on peut en extraire une sous-suite $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ telle que:

$$\lim_{k\to\infty} g_1(t + n_k) - g(t + n_k) = F(t)$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$, et

$$\lim_{k\to\infty} F(t - n_k) = g_1(t) - g(t)$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Alors, $F(t) \equiv 0$ et donc $g_1(t) - g(t) \equiv 0$; par suite, $h_1(t) - h(t) \equiv 0$ pour $0 \leq t < \infty$; ce qui achève la démonstration.

LEMME 4. Toute fonction a.p.a. est bornée sur $[0,\infty)$.

DÉMONSTRATION. (Evidente et nous l'omettons.)

A partir de maintenant, nous considérons un espace de Banach X dans lequel la propriété suivante est vérifiée:

Toute fonction $f(t) : \mathbb{R} \to X$ telle que

(i) $f(t)$; $t \in \mathbb{R}$ est borné dans X ,

(ii) $f'(t)$ est p.a. dans X ,

est nécessairement p.a. dans X .

REMARQUE 3. Une telle propriété est vraie dans tout espace de Banach uniformément convexe (voir [5], Théorème 1.3).

Nous démontrons le Théorème 3 ci-dessous dans un tel espace de Banach X ; mais avant tout, voyons le

LEMME 5. Soit X un espace de Banach. Si $h(t) : \mathbb{R} \to X$ est p.a., alors la fonction $\check{h}(t) : \mathbb{R} \to X$, $\check{h}(t) \equiv h(-t)$ est aussi p.a.

DÉMONSTRATION. Soit $(s'_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite réelle arbitraire. On peut en extraire une sous-suite $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} h(t - s_n) = g(t) \text{ , pour chaque } t \in \mathbb{R} \text{ ,}$$

$$\lim_{n\to\infty} g(t + s_n) = h(t) \text{ , pour chaque } t \in \mathbb{R} \text{ .}$$

D'où

$$\lim_{n\to\infty} \check{h}(t + s_n) = \lim_{n\to\infty} h(-t - s_n) = \check{g}(t)$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$, où $\check{g}(t) \equiv g(-t)$,

$$\lim_{n\to\infty} \check{g}(t - s_n) = \lim_{n\to\infty} g(-t + s_n) = \check{h}(t)$$

pour chaque t ; nous avons montré que $h(t)$ est p.a.

THÉORÈME 3. Supposons que la fonction $f(t)$ est a.p.a. et que, de plus,

(i) $g'(t)$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $f'(t)$ existe pour tout $t \in [0,\infty)$ et est a.p.a.

Alors $f'(t)$ admet la décomposition

$$f'(t) = g'(t) + h'(t) . \tag{2}$$

Nous voulons dire en d'autres termes que $g'(t)$ est p.a. et $h'(t)$ est continue sur $[0,\infty)$ et $\lim_{t\to\infty} h'(t) = \theta$.

DÉMONSTRATION. $f'(t)$ étant a.p.a., on peut écrire

$$f'(t) = G(t) + H(t)$$

où $G(t)$ est p.a., $H(t)$ est continue sur $0 \le t < \infty$ et $\lim_{t\to\infty} H(t) = \theta$. Il s'agit de montrer que $G(t) = g'(t)$, et $H(t) = h'(t)$. Considérons les fonctions suivantes:

$$\alpha(t) = \int_t^{t+\eta} G(\sigma)\,d\sigma$$

$$\beta(t) = \int_t^{t+\eta} H(\sigma)\,d\sigma$$

où η est un nombre réel fixé. $\beta(t)$ est définie et continue sur $[0,\infty)$; l'inégalité

$$\left\| \int_t^{t+\eta} H(\sigma)\,d\sigma \right\| \le |\eta| \cdot \sup_{\sigma\in I_\eta} \|H(\sigma)\| ,$$

où $I_\eta = [t, t+\eta]$ où $[t+\eta, t]$, on déduit que $\lim\limits_{t\to\infty} \beta(t) = \theta$ car $\lim\limits_{t\to\infty} H(t) = \theta$. $\alpha(t)$ est définie et continue sur $-\infty < t < \infty$; $\alpha(t)$ est aussi bornée sur $\mathbb{R}$ car $G(\sigma)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction p.a. Nous pouvons donc en déduire que $\alpha(t)$ est p.a.

Considérons les égalités suivantes:

$$f(t+\eta) - f(t) = \alpha(t) + \beta(t)$$

$$f(t+\eta) - f(t) = [g(t+\eta) - g(t)] + [h(t+\eta) - h(t)]$$

pour tout $t \geq 0$ et η choisi de façon que $t + \eta \geq 0$. Par l'unicité de la décomposition de la fonction $f(t+\eta) - f(t)$ qui est a.p.a., nous obtenons:

$$\alpha(t) = g(t+\eta) - g(t) \,, \qquad -\infty < t < \infty$$

$$\beta(t) = h(t+\eta) - h(t) \,, \qquad 0 \leq t < \infty \,,$$

donc

$$G(t) = \lim_{\eta\to 0} \frac{\alpha(t)}{\eta} = \lim_{\eta\to 0} \frac{g(t+\eta)-g(t)}{\eta} = g'(t) \,, \qquad -\infty < t < \infty$$

$$H(t) = \lim_{\eta\to 0} \frac{\beta(t)}{\eta} = \lim_{\eta\to 0} \frac{h(t+\eta)-h(t)}{\eta} = h'(t) \,, \qquad 0 \leq t < \infty \,.$$

Ceci achève la démonstration.

3. Solutions presqu'automorphes de l'équation $x'(t) = f(t,x)$

Nous considérons dans un espace de Banach X , possédant la propriété ci-dessus mentionnée, l'équation différentielle

(3) $$x'(t) = f(t, x(t)) \,, \qquad -\infty < t < \infty \,,$$

où $f(t,x)$ est p.a. en t pour chaque $x \in X$. Nous supposons de plus que $f(t,x)$ satisfait une condition de Lipschitz en x uniformément en t ; nous démontrons alors le

THÉORÈME 4. Si l'équation (3) possède une solution a.p.a. $\phi(t) = g(t) + h(t)$

telle que $g'(t)$ existe sur tout R , alors $g(t)$ est solution de (3) sur $-\infty < t < \infty$.

DÉMONSTRATION. $\phi(t)$ étant a.p.a., nous pouvons écrire

$$\phi(t) = g(t) + h(t)$$

où $g(t)$ est p.a. et $h(t)$ une fonction continue sur $0 \leq t < \infty$ et telle que $\lim_{t\to\infty} h(t) = \theta$. Nous avons aussi, par hypothèse,

$$\phi'(t) = f(t, (t)) \ , \qquad 0 \leq t < \infty \ ,$$

donc, pour $0 \leq t < \infty$, on peut écrire

$$\phi'(t) = f(t,g(t)) + f(t,\phi(t)) - f(t,g(t)) \ .$$

Remarquons que $f(t,g(t))$ est p.a. en vertu du Théorème 1; la fonction $f(t,\phi(t)) - f(t,g(t))$ est continue sur $0 \leq t < \infty$ et, de plus, $\lim_{t\to\infty} f(t,\phi(t)) - f(t,g(t)) = \theta$, car

$$\begin{aligned} f(t,\phi(t)) - f(t,g(t)) &\leq L\|\phi(t) - g(t)\| \\ &= L\|h(t)\| \end{aligned}$$

et $\lim_{t\to 0} \|h(t)\| = 0$. (L est la constante lipschitzienne.) Donc la fonction $\phi'(t)$ est a.p.a. Par le Théorème 3, nous avons

$$\phi'(t) = g'(t) + h'(t)$$

et par le Théorème 2,

$$g'(t) = f(t,g(t)) \ , \qquad 0 \leq t < \infty \ .$$

Il suffit maintenant de montrer que cette dernière équation est vérifiée pour $-\infty < t < 0$ pour achever la démonstration du théorème; soit $t < 0$. Nous pouvons extraire de la suite $(n)_{n=1}^{\infty}$ une sous-suite n_k (prenons $t > -n_k$ pour tout k) telle que:

$$\lim_{k\to\infty} g'(t + n_k) = \lim_{k\to\infty} f(t + n_k, g(t + n_k)) = F(t)$$

et

$$g'(t) = \lim_{k\to\infty} F(t - n_k) = f(t,g(t)) \ .$$

Nous avons bien $g'(t) = f(t,g(t))$.

RÉFÉRENCES

[1] BOCHNER, S., *Continuous mappings of almost-automorphic and almost-periodic functions*, Proc. Nat. Acad. Sc., U.S.A., vol. 52 (1964).

[2] FINK, A.M., *Almost-Periodic Differential Equations*, Springer-Verlag (1974).

[3] FRÉCHET, M., *Les fonctions asymptotiquement presque périodiques*, Rev. Sc., nos 7-8, Juillet-août 1941.

[4] ZAIDMAN, S., *Almost-automorphic solutions of some abstract evolution equations*, Istituto Lombardo di Scienze e lettere Estratto dai Rendiconti, classe di Scienze (A), vol. 104 (1970).

[5] ZAKI, M., *Almost-automorphic solutions of certain abstract differential equations*, Annali di Matematica pura ed applicata, vol. 101 (1974), 91-114.

Département de mathématiques
et de statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, Québec

Manuscrit reçu en janvier 1980.
Révisé en juin 1980.