ÉLÉMENTS FINIS ET FONCTIONS GLOBALES EN UNE DIMENSION¹

Jacques Gélinas

En ajoutant à un espace d'éléments finis une fonction "globale" (de support étendu à tout le domaine), l'erreur de la méthode des éléments finis usuelle est réduite de façon notable, sans que les calculs soient augmentés considérablement. Cette modification, proposée par [Mote, 1971] est appliquée ici à un problème modèle aux limites en une dimension.

1. Problème modèle

Considérons le problème aux limites sur $[0,1]$

$$-u''(x) + \lambda^2 u(x) = 2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0) = u(1) = 0,$$

dont la solution est

$$u(x) = x(1 - x), \quad \text{si } \lambda = 0$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} \left[1 - \cosh(\lambda x) + \frac{\cosh(\lambda) - 1}{\sinh(\lambda)} \sinh(\lambda x) \right], \quad \text{si } \lambda \neq 0.$$

Il est bien connu [Ciarlet, 1978] qu'en définissant sur l'espace fonctionnel H_0 (formé des fonctions de $L^2(0,1)$ admettant une dérivée au sens des distributions dans $L^2(0,1)$ et s'annulant en 0 et 1) les formes

¹ *Projet supporté par CRDev, fonds no 3610-639.*

Il est à noter que ϕ_i est non nulle seulement sur $[(i - 1)h, (i + 1)h]$ c'est-à-dire sur les deux sous-intervalles adjacents à ih .

Pour obtenir une approximation de la forme

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \phi_i(x) ,$$

on détermine les $c_i = u_h(ih)$ par l'équation des travaux virtuels (méthode de Ritz-Galerkin):

$$\sum_{j=1}^{n-1} a(\phi_j, \phi_i) c_j = (f, \phi_i) , \quad 1 \leq i \leq n - 1 .$$

Le système linéaire obtenu a la forme (pour $n = 5$) :

c_1	c_2	c_3	c_4	Constantes
P	Q	0	0	2h
Q	P	Q	0	2h
0	Q	P	Q	2h
0	0	Q	P	2h

où

$$P = \frac{2}{h} + \frac{2h\lambda^2}{3} ,$$

$$Q = -\frac{1}{h} + \frac{h\lambda^2}{6} .$$

La matrice du système est tridiagonale, symétrique et définie positive. Il est à noter que la méthode des différences finies donnerait un système semblable, mais avec

$$P' = \frac{2}{h} + \lambda^2 h ,$$

$$Q' = -\frac{1}{h} .$$

Le système est résolu par élimination de Gauss sans pivotage (parce que la matrice est définie positive) adaptée aux systèmes tridiagonaux [Conte, de Boor, 1972, p. 121] pour minimiser l'occupation de la mémoire.

3. Eléments finis et fonction globale

Considérons l'espace V_h^W obtenu en ajoutant à V_h la fonction "globale"

$$w(x) = x(1 - x) , \quad 0 \leq x \leq 1 .$$

Pour obtenir une approximation de la forme

$$u_h^W(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i \phi_i(x) + Gw(x) ,$$

on détermine les c_i ainsi que G par l'équation des travaux virtuels:

$$\sum_{j=1}^{n-1} a(\phi_j, \phi_i) c_j + Ga(w, \phi_i) = (f, \phi_i) , \quad 1 \leq i \leq n - 1 ,$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} a(\phi_j, w) c_j + Ga(w, w) = (f, w) .$$

Le système linéaire obtenu a la forme (pour $n = 5$) :

c_1	c_2	c_3	c_4	G	Constantes
P	Q	0	0	A_1	2h
Q	P	Q	0	A_2	2h
0	Q	P	Q	A_3	2h
0	0	Q	P	A_4	2h
A_1	A_2	A_3	A_4	A_0	B_0

où

$$A_0 = \frac{1}{3} + \frac{\lambda^2}{30} , \quad B_0 = \frac{1}{3} ,$$

$$A_i = 2h + \lambda^2 h [ih(1 - ih) - \frac{h^2}{6}], \quad 1 \leq i \leq n - 1,$$

et P, Q ont été définis plus haut. La matrice est toujours symétrique et définie positive mais se révèle mal conditionnée: déjà pour $h = 1/3$, le rapport $\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$ des valeurs propres dépasse 400. Il n'est donc pas recommandé d'utiliser l'élimination de Gauss. La méthode itérative de Gauss-Seidel se révèle aussi inapplicable: pour $n = 4$, il faut 100 itérations pour obtenir G à trois décimales en utilisant le facteur de $\omega = 1,5$. Cette méthode peut être modifiée pour accélérer la convergence [Wilson, 1977].

Notons que le système précédent a la forme:

$$\begin{bmatrix} K & \vec{A} \\ \vec{A}^T & A_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{C} \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ B_0 \end{pmatrix}$$

où

$$\vec{A} = (A_1, \dots, A_{n-1})^T,$$

$$\vec{B} = (2h, \dots, 2h)^T,$$

$$\vec{C} = (c_1, \dots, c_{n-1})^T,$$

et K est la matrice (de rigidité) de la méthode des éléments finis usuelle. Si l'on détermine les coefficients de la méthode des éléments finis usuelle par

$$K\vec{C}_0 = \vec{B},$$

et un autre ensemble de coefficients par

$$K\vec{C}_1 = -\vec{A},$$

on vérifie directement que la solution du système total est

$$G = \frac{B_0 - \vec{A}^T \vec{C}_0}{A_0 + \vec{A}^T \vec{C}_1},$$

$$\check{C} = \check{C}_0 + G\check{C}_1 .$$

Il suffit donc essentiellement de résoudre *simultanément* deux systèmes linéaires tridiagonaux et de calculer deux produits scalaires: ceci nécessite environ $10n$ multiplications ou divisions au lieu de $5n$ dans la méthode usuelle des éléments finis sans fonction globale. Dans les cas plus complexes où la matrice K n'est pas tridiagonale, on pourra résoudre les deux systèmes par itération puisque la matrice K est mieux conditionnée. Cette méthode de solution permet de connaître sans coût supplémentaire la solution des éléments finis sans contribution de la fonction globale.

4. Etude de l'erreur en énergie

a) Si $u_h \in V_h$ est la solution de l'équation des travaux virtuels, considérons l'erreur en norme de l'énergie

$$\begin{aligned} E_h &= a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u, u) - 2a(u, u_h) + a(u_h, u_h) \\ &= (f, u) - 2(f, u_h) + (f, u_h) \\ &= M - M_h \end{aligned}$$

où

$$M_h = (f, u_h) = \int_0^1 2u_h(x) dx .$$

De la même façon, si $u_h^W \in V_h^W$ est la solution de l'équation des travaux virtuels

$$\begin{aligned} E_h^W &= a(u - u_h^W, u - u_h^W) \\ &= M - M_h^W \end{aligned}$$

où

$$M_h^W = \int_0^1 2u_h^W(x) dx .$$

Enfin, il est bien connu [Schultz, 1973] que, pour ce problème modèle,

$$\begin{aligned} E_h &= \inf_{v \in V_h} a(u - v, u - v) \\ &\leq \left(1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}\right) \inf_{v \in V_h} \int_0^1 |u'(x) - v'(x)|^2 dx \\ &\leq \left(1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}\right) \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^1 |u''(x)|^2 dx \leq \frac{4}{\pi^2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}\right)^3 h^2 . \end{aligned}$$

b) Il est facile de déduire théoriquement une majoration de l'erreur E_h^W tout en obtenant une approximation du coefficient de la fonction globale.

$$\begin{aligned} E_h^W &= M - M_h^W = a(u - u_h^W, u - u_h^W) \\ &= \inf_{v \in V_h^W} a(u - v, u - v) \\ &= \inf_G \inf_{v \in V_h} a(u - Gv - v, u - Gv - v) \\ &\leq \inf_G \left(1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}\right) \frac{h^2}{\pi^2} \int_0^2 |u''(x) - Gw''(x)|^2 dx . \end{aligned}$$

Minimisant par rapport à G l'intégrale, on a

$$G_{\min} = 1 - \frac{\lambda^2}{4} M ,$$

et

$$E_h^W \leq \left(1 + \frac{\lambda^2}{\pi^2}\right) \frac{4\lambda^4}{\pi^4} h^2 .$$

D'autre part, si on utilise seulement la fonction globale, on calcule

$$M \simeq M^W = \frac{1}{3} \frac{10}{10 + \lambda^2} .$$

D'où

$$G_{\min} = 1 - \frac{\lambda^2}{4} M \simeq 1 - \frac{\lambda^2}{4} \frac{1}{3} \frac{10}{10 + \lambda^2} = G^* .$$

C'est là une très bonne approximation:

λ	G calculé (n = 32)	$1 - \frac{\lambda^2}{4} \frac{1}{3} \frac{10}{10 + \lambda^2}$
0	1,0000	1,0000
1	0,9242	0,9242
2	0,7615	0,7619
4	0,4894	0,4872

c) Il est possible de réduire les calculs en utilisant la valeur G^* prédite en b). Il suffit alors de résoudre un seul système tridiagonal:

$$K\vec{c}^* = \vec{B} - G^*\vec{A} ,$$

et de poser

$$u_h^{*W} = \sum_{i=1}^{n-1} c_i^* \phi_i + G^* w .$$

Les valeurs obtenues pour $M_h^{*W} = (f, u_h^{*W})$ indiquent que le minimum de la fonctionnelle $J(u)$ est peu sensible au choix du coefficient de la fonction globale.

λ	M_h^{*W} (n = 32)	M_h^{*W} (n = 32)
1	0,30306 237	0,30306 238
2	0,23840 235	0,23840 244
4	0,12944 019	0,12944 362

d) Résultats numériques. Les résultats suivants, pour $\lambda = 1$, ont été obtenus avec un ordinateur PDP 11 en double précision (16 décimales de précision). Ils montrent que l'erreur E_h est au moins 750 fois supérieure à l'erreur E_h^W .

$n = h^{-1}$	E_h (%)	G	E_h^W (%)	E_h/E_h^W
2	-24	0,92040	-0,06	3970
4	- 6	0,92327	-0,06	995
8	- 1,5	0,92399	-0,02	806
16	- 0,4	0,92417	-0,005	768
24	- 0,2	0,92421	-0,002	761
32	- 0,09	0,92422	-0,001	759
40	- 0,06	0,92422	-0,0008	758
48	- 0,04	0,92423	-0,0005	757

Il est à noter que l'utilisation de la fonction globale avec deux éléments linéaires fournit une erreur en énergie plus petite que 40 éléments sans fonction globale. Lorsque λ croît à partir de 1, le coefficient G de la fonction globale décroît de 1 vers zéro et le rapport E_h^W/E_h décroît aussi. Cependant, même pour $\lambda = 4$, il faut encore 36 éléments usuels pour obtenir la même précision que deux éléments avec fonction globale.

5. Autres fonctions globales

a) La fonction globale $w(x) = x(1 - x)$ satisfait l'équation différentielle pour $\lambda = 0$ exactement, ce qui explique les bons résultats obtenus lorsque λ est petit. Si on essaie la fonction globale

$$s(x) = \sin(\pi x) ,$$

l'erreur E_h^S est nettement plus grande que E_h^W : pour $\lambda = 1$, par exemple, le rapport E_h^S/E_h^W est inférieur à 5 : le facteur de réduction de la majoration d'erreur,

$$\inf_G \int_0^1 |u''(x) - Gs''(x)|^2 dx ,$$

est minime comparé à celui de $w(x)$. Il paraît donc nécessaire de bien choisir la fonction globale utilisée.

b) Pour les problèmes à plusieurs dimensions, il est souvent difficile de trouver des fonctions globales qui satisfont les conditions aux limites: c'est là l'inconvénient majeur de la méthode de Ritz-Galerkin classique n'employant que des fonctions globales. On peut alors songer à utiliser des fonctions globales de support intérieur au domaine.

Considérons, pour notre problème modèle, $0 \leq t < \frac{1}{2}$,

$$W_t(x) = (x - t)(1 - x - t), \quad t \leq x \leq 1 - t$$

$$= 0, \quad \text{autrement.}$$

Cette fonction appartient à H_0 sans être dérivable deux fois: l'analyse de l'erreur faite en 4b) ne s'applique plus ici. Les résultats numériques indiquent que le rapport

$$R(t) = E_h^w / E_h^t,$$

décroit lorsque t croît à partir de 0, avec des pics aigus, d'amplitude décroissante, à chaque fois que t coïncide avec un noeud des éléments finis. Pour certaines valeurs de t , à l'intérieur d'un élément, le coefficient G est même nul, ce qui implique $R(t) = 1$. Donnons comme illustration les valeurs suivantes pour $\lambda = 0$, $h = \frac{1}{4}$.

t	G	R(t)
0,0	1,000	∞
0,05	0,032	1,005
0,1	-0,108	1,04
0,2	-0,014	1,00
0,24	0,517	1,25
0,245	0,711	1,45
0,25	1,042	2,14
0,26	0,781	1,43

Il semble donc très avantageux d'utiliser comme support de la fonction globale un ensemble d'éléments finis, si nécessaire intérieurs au domaine.

c) Notons enfin qu'il est possible d'utiliser à la fois plusieurs fonctions globales. Ceci se révèle utile dans les problèmes avec singularité [Strang, Fix, 1973].

BIBLIOGRAPHIE

- CIARLET, P.G. (1978), *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam.
- CONTE, S.D., DE BOOR, C. (1972), *Elementary Numerical Analysis*, 2^e éd., McGraw Hill, N.Y.
- MOTE, C.D. (1971), *Global - Local Finite Element*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 3, 565-574.
- SCHULTZ, M.H. (1973), *Spline Analysis*, Prentice Hall, London.
- STRANG, G., FIX, G.J. (1973), *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, London.
- WILSON, E.L. (1977), *Special numerical and computer techniques for the analysis of finite element Systems*, in *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis*, K.J. Bathe and J.T. Oden, ed., MIT Press, Cambridge, Mass. 1977, 3-25.

Département de mathématiques
Collège militaire royal de Saint-Jean
Saint-Jean, Québec
J0J 1R0

Manuscrit reçu le 10 septembre 1980.
Révisé le 4 février 1981.