Ann. Sc. Math. Québec, Vol. IV, No 1, pp. 17-26

LES DÉCOMPOSITIONS DES GRAPHES Q_n EN FACTEURS QUADRATIQUES

Pierre Doutre et Anton Kotzig

0. INTRODUCTION

Le graphe Q_n , $n \geq 5$, est le graphe $Q_n = G(S,A)$ dont l'ensemble des sommets est $S = \{1,2,\ldots,n\}$ et l'ensemble des arêtes est $A=\{(i,i+1)\,|\,i=1,\ldots,n-1\}\cup\{(1,n)\}\cup\{(i,i+2)\,|\,i=1,2,\ldots,n-2\}\cup\{(n-1,1),(n,2)\}$. On peut représenter le graphe Q_n par un polygone à n côtés auquel on a ajouté les cordes qui forment un triangle avec deux côtés successifs du polygone.

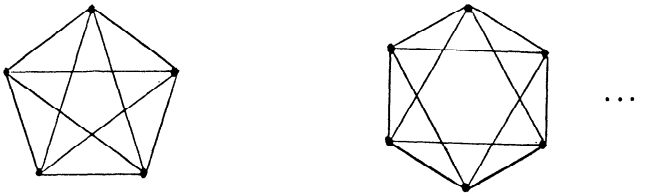


Fig. 1

Les graphes Q_n ont déjà été étudiés pour n impair par Guy et Harary [1], qui les appellent *échelles de Möbius*. Le but du présent article est de démontrer que, dans toute décomposition d'un graphe Q_n en deux facteurs quadratiques, un de ces facteurs est un cycle hamiltonien.

1. DÉFINITION

Soit $G = (X,A)$ un graphe où X est l'ensemble des sommets et A est l'ensemble des arêtes. Le graphe $H = (X,B)$ avec $B \subseteq A$ est un facteur de G . Si

H est régulier de degré 2, on dit que H est un facteur quadratique. Un facteur quadratique connexe est un cycle hamiltonien. Si G est un graphe régulier de degré 2n et si $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ avec $Q_i = (X, A_i)$ sont n facteurs quadratiques de G tels que les A_i , $i = 1, \ldots, n$, forment une partition de A , on dit que $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ est une décomposition de G en facteurs quadratiques.

2. LA DÉCOMPOSITION CANONIQUE DE Q_n

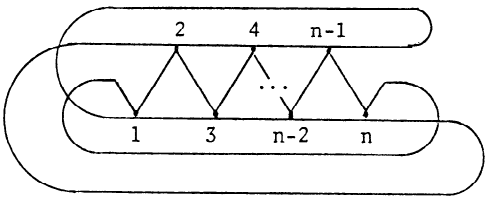
La décomposition canonique est celle qui est composée du facteur formé par les arêtes représentées par les côtés du polygone et du facteur formé par les arêtes représentées par les cordes. Si n est pair, seul le facteur formé par les arêtes représentées par les côtés du polygone est connexe. Si n est impair, les deux facteurs de cette décomposition sont connexes.

3. REPRÉSENTATION DE Q_n SUR UNE BANDE

Pour démontrer que les autres décompositions ont un facteur connexe, nous allons utiliser la représentation suivante:

Si n est impair

Q_n =



Si n est pair

Q_n =

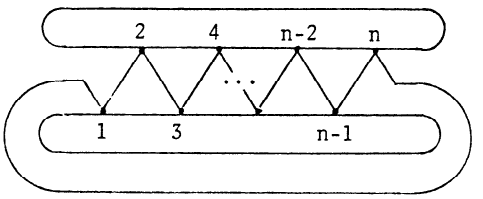


Fig. 2

Dans cette représentation, les arêtes inclinées (les dents de scie) sont les côtés des polygones de la figure 1 et les arêtes horizontales sont les cordes des polygones.

4. LES SUITES ASSOCIÉES

En chaque sommet x d'un graphe régulier de degré 4 comme Q_n, chaque facteur quadratique contient deux des quatre arêtes adjacentes à x. Dans la deuxième représentation des graphes Q_n, les deux facteurs quadratiques séparent les arêtes adjacentes à un sommet x selon une des trois formes suivantes:

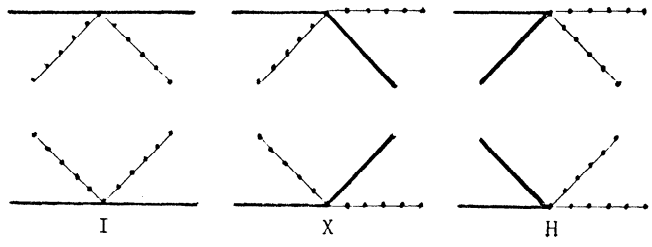


Fig. 3

A chaque décomposition, on associe une suite de X, de I et de H. Si $A,B \in \{I,X,H\}$, la notation AB indiquera qu'un sommet a la forme A et que le sommet suivant, selon la numérotation de la figure 2, a la forme B.

Si $A,B,C \in \{I,X,H\}$, la notation AB => C indiquera qu'un sommet de la forme B précédé d'un sommet de la forme A devra nécessairement être suivi d'un sommet de la forme C. La notation C <= AB indiquera qu'un sommet de la forme A suivi d'un sommet de la forme B devra nécessairement être précédé d'un sommet de la forme C. La décomposition canonique correspond à la suite II...I. Nous laisserons de côté cette décomposition pour l'instant.

Proposition 4.1. IX => H.

Démonstration. Considérons une décomposition en deux facteurs quadratiques. Pour simplifier, nous dirons que les arêtes d'un facteur sont noires et que les arêtes de l'autre facteur sont blanches. Supposons qu'au sommet i la forme de

la décomposition est I . Alors les arêtes (i-2,i) et (i,i+2) sont de la même couleur, disons noires, et les arêtes (i-1,i) et (i,i+1) sont blanches. Supposons qu'au sommet i + 1 la forme de la décomposition est X . Alors les arêtes (i,i+1) et (i+1,i+3) sont blanches et les arêtes (i-1,i+1) et (i+1,i+2) sont noires. Comme les arêtes (i,i+2) et (i+1,i+2) sont noires, les arêtes (i+2,i+3) et (i+2,i+4) sont blanches. Donc en i + 2 la forme de la décomposition est H .

Q.E.D.

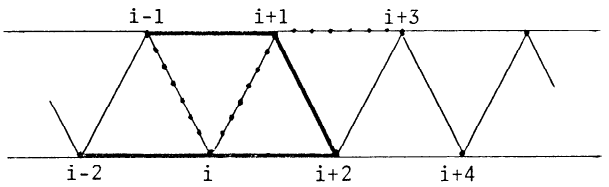


Fig. 4

On démontre de la même façon les propositions suivantes:

Proposition 4.2. IH => H .

Proposition 4.3. HI => H .

Proposition 4.4. HX => I ou X .

Proposition 4.5. XI => I ou X .

Proposition 4.6. XH => H .

Proposition 4.7. XX => H .

Proposition 4.8. II => I ou X .

Proposition 4.9. HH => I ou X .

5. LA FORME DES SUITES ASSOCIÉES

Supposons qu'il y ait une décomposition dont la suite associée ne contient

et

$$S = I \text{ ou } XI...IX .$$

6. LES DÉCOMPOSITIONS

Pour étudier les décompositions en facteurs quadratiques, nous allons couper les graphes Q_n en segments qui correspondront à une suite TS . Ces segments seront de la forme

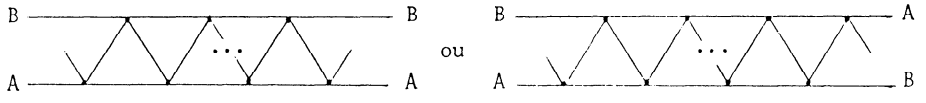


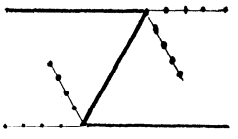
Fig. 5

Les quatre demi-arêtes horizontales de la figure 5 seront appelées les *extrémités* du segment. Les extrémités seront appelées A [ou B] lorsque le sommet adjacent sera [ne sera pas] adjacent à une demi-arête inclinée. Lorsqu'on remettra les segments bout à bout pour reconstruire le graphe on dira qu'on les recollera. On les recollera toujours de la même façon qu'ils ont été coupés, de façon à obtenir le graphe original. On recollera toujours une extrémité A avec une extrémité B (voir figure 5).

Lemme. Tout segment correspondant à une suite TS possède un facteur quadratique connexe.

Démonstration. Montrons d'abord qu'un segment correspondant à une suite T possède un facteur connexe. La démonstration se fait par induction sur la longueur du segment, plus précisément sur le nombre r de paires HH dans le segment.

Si T = HH , alors on a



aucun I . Elle doit alors contenir et des X et des H en vertu des propositions 4.7 et 4.9.

Si cette suite contient HH , elle contient HHX en vertu de 4.9. La lettre suivante doit être X en vertu de 4.4, on a donc HHXX . En continuant ainsi, on voit que la forme de cette suite est HHXXHHXX...HHXX , les paires HH alternent avec les paires XX . Si Q_n possède une décomposition avec une suite associée de cette forme, alors $n \equiv 0 \bmod 4$. Partant de l'hypothèse que notre suite sans I contient HX , XH ou XX , on obtient le même résultat: la suite sera composée de paires HH qui alterneront avec des paires XX .

Supposons qu'une décomposition ait une suite associée qui ne contient qu'un seul I . Le voisin du I est X ou H . Dans ces cas, les propositions 4.1 à 4.9 impliquent que les voisins de I doivent être ...XXHHXIXHHXX... ou ...XXHHIHHXX...

On aura une suite qui contiendra des paires HH qui alterneront avec des paires XX où une des paires XX sera remplacée par XIX ou I . Si la suite contient plusieurs I voisins, alors la suite aura nécessairement à cet endroit la forme

$$...XXHH\underbrace{XII...IX}HHXX...$$

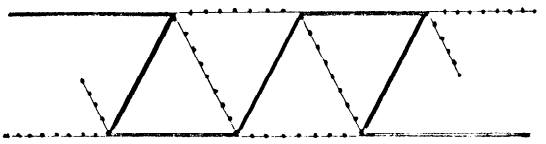
On aura donc une suite qui contiendra des paires HH qui alterneront avec des paires XX où une des paires XX sera remplacée par XII...IIX . Donc si I apparaît dans une suite associée à une décomposition, il est entouré de deux paires HH ou de deux X . Si plusieurs I voisins apparaissent dans une suite, ils sont entourés par deux paires HH . Les suites associées aux décompositions ont donc la forme

$$TSTS...TS$$

où

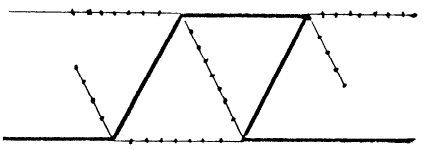
$$T = HHXXHHXX...HHXXHH$$

Si T = HHXXHH , alors on a



Dans ces deux cas, r = 1 et r = 2 , T contient un facteur connnexe et les extrémités B font partie dc cc facteur. Le segment XXHH a lui aussi un facteur connexe et celui-ci contient l'extrémité B de droite et l'extrémité A de gauche du segment.

XXHH =

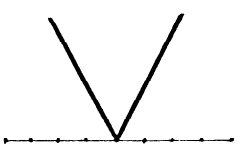


Supposons que ce soit vrai pour r . Considérons une suite T avec r + 1 paires HH . Cette suite T s'obtient d'une suite T' avec r paires HH à laquelle on a ajouté le segment XXHH . Le facteur connexe de T' contient l'extrémité B droite et le facteur connexe de XXHH contient l'extrémité A gauche. En recollant ces segments, on obtient lc segment T et les deux facteurs connexes étant reliés deviennent un seul facteur connexe de T .

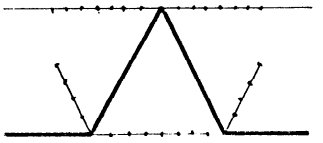
Nous allons maintenant démontrer que tout segment correspondant à une suite S possède un facteur connexe.

Si S = I les deux facteurs sont connexes car on a

S =



Si S = XIX , on a

S = 

Dans ces deux cas, les extrémités A font partie du facteur connexe. Il est facile de montrer par induction que tout segment S contient un facteur connexe et que celui-ci contient les deux extrémités A du segment.

Recollons maintenant les suites T et S . Le facteur connexe de S contient l'extrémité A gauche qui sera recollée à l'extrémité B droite du segment T qui est contenue dans le facteur connexe du segment T . Ce recollage des segments recolle donc les facteurs connexes. Donc tout segment correspondant à une suite TS possède un facteur connexe et celui-ci contient l'extrémité B gauche et A droite du segment.

Q.E.D.

Théorème. Toute décomposition en facteurs quadratiques d'un graphe Q_n possède un facteur qui est un cycle hamiltonien.

Démonstration. A toute décomposition correspond une suite TST...STS . Chaque segment correspondant à une suite TS possède un facteur connexe. En recollant ces segments, nous recollons aussi les facteurs connexes (voir la démonstration du lemme). Donc toute décomposition en facteurs quadratiques d'un graphe Q_n possède un facteur connexe qui est un cycle hamiltonien.

Q.E.D.

7. LES DÉCOMPOSITIONS EN DEUX CYCLES HAMILTONIENS

Pour n impair, la décomposition canonique contient deux cycles hamiltoniens. Les autres décompositions ont des suites associées de la forme TSTS...TS . Si T contient au moins deux paires HH , alors la décomposition n'est pas constituée de deux cycles hamiltoniens car un des facteurs n'est pas connexe (voir figure 6).

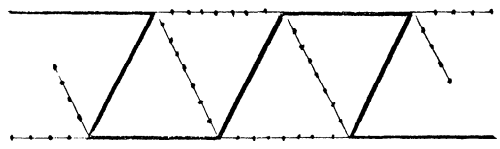


Fig. 6

Donc dans une décomposition en deux cycles hamiltoniens, les suites T sont égales à HH .

Etudions la forme des suites S dans ces décompositions. Si S = I , alors dans un voisinage de I , la suite a la forme ...HHIHH... et on voit par la figure 7 que la décomposition ne contient pas deux cycles hamiltoniens.

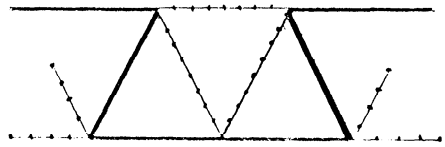
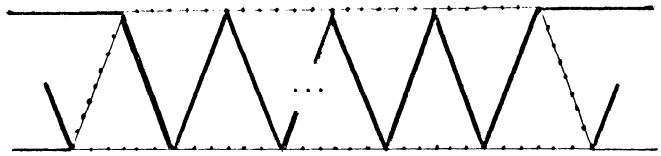
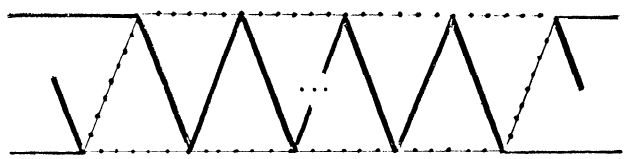


Fig. 7

Donc, entre les suites T , on doit avoir des suites S = XI...IX . Dans ce cas, on a



n impair



n pair

Fig. 8

Si le cycle pointillé de la figure 8 passe par tous les sommets, alors la décomposition est constituée de deux cycles hamiltoniens. Alors pour Q_n, la suite HXI...IXH avec n - 4 formes I correspond à une décomposition en facteurs quadratiques où les deux facteurs sont des cycles hamiltoniens. Il est facile de voir que si une suite contient deux paires HH, alors la décomposition correspondante ne contient qu'un cycle hamiltonien. En résumé, si n est impair la suite II...I correspond à une décomposition en deux cycles hamiltoniens et toute autre décomposition en deux cycles hamiltoniens de Q_n (n pair ou impair) a la forme HXI...IXH .

Il est maintenant facile de compter le nombre de décompositions de Q_n en deux cycles hamiltoniens. Le graphe Q_n a n décompositions dont les suites associées ont la forme HXI...IXH . Si n est impair, Q_n a aussi une décomposition en deux cycles hamiltoniens de la forme II...I . Donc si n est pair, Q_n a n décompositions en deux cycles hamiltoniens et si n est impair, il en a n + 1 .

Si nous considérons la représentation polygonale des graphes Q_n, deux décompositions dont les suites associées ont la forme HXI...IXH peuvent être obtenues l'une de l'autre par une notation du polygone. On dira alors que ces décompositions sont isomorphes par notation. On obtient donc une ou deux décompositions non-isomorphes par rotation de Q_n selon que n est pair ou impair.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GUY, R.K. and HARARY, F., *On the Möbius ladders*, Canadian Mathematical Bulletin, Vol. 10, No 4 (1967), 493-496.

Département de mathématiques et de statistique et
Centre de recherches en mathématiques
C.P. 6128, Succ. "A"
Montréal, P. Qué. H3C 3J7

Manuscrit reçu le 13 août 1979.
Revision le 15 octobre 1979.