Ann. Sci. Math. Québec **33** (2009), no 1, 23–37

SUR UN PROBLÈME AUX LIMITES ASSOCIÉ À L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $f''' + ff'' + 2f'^2 = 0$

BERNARD BRIGHI

RÉSUMÉ. Nous nous intéressons à l'équation différentielle $f''' + ff'' + 2f'^2 = 0$, qui apparaît en mécanique des fluides et en magnétohydrodynamique. Cette équation différentielle, qui est un cas particulier d'une équation plus générale, possède une intégrale première qui permet d'obtenir bon nombre de résultats de manière élémentaire, avec notamment des valeurs explicites pour certaines constantes. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ donnés, nous étudierons également les solutions de cette équation différentielle définies sur $[0, +\infty)$ et vérifiant les conditions aux limites $f(0) = a$, $f'(0) = b \geqslant 0$ et $f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

ABSTRACT. We are interested in the differential equation $f''' + ff'' + 2f'^2 = 0$, arising in fluid mechanics and in magnetohydrodynamics. This differential equation, which is a particular case of a more general one, has a first integral which allows us to obtain several results by elementary means and explicit constants. In addition, for given $a, b \in \mathbb{R}$, we will study the solutions of the above differential equation, satisfying the boundary conditions $f(0) = a$, $f'(0) = b \geqslant 0$ and $f'(t) \to 0$ as $t \to +\infty$.

1. Introduction

Considérons l'équation différentielle du troisième ordre

$$f''' + ff'' - \beta f'^2 = 0, \tag{1}$$

où β est un paramètre réel. Cette équation est une forme réduite de l'équation différentielle suivante

$$\mathbf{f}''' + \tfrac{m+1}{2}\,\mathbf{f}\,\mathbf{f}'' - m\,\mathbf{f}'^2 = 0. \tag{2}$$

Pour le voir, il suffit de remarquer que, si $m > -1$, alors

$$f(t) = \tfrac{\sqrt{m+1}}{\sqrt{2}}\,\mathbf{f}\left(\tfrac{t\sqrt{2}}{\sqrt{m+1}}\right)$$

est une solution de l'équation $f''' + ff'' - \frac{2m}{m+1}f'^2 = 0$ si et seulement si $\mathbf{f}$ est une solution de (2).

L'équation différentielle (2) apparaît dans différent contextes en théorie des couches limites. Considérons, par exemple, une plaque verticale plongée dans un milieu poreux saturé d'un fluide initialement au repos. Si la plaque est chauffée, au voisinage de celle-ci, le fluide chaud entre en mouvement par la seule poussée d'Archimède, et donne lieu

Reçu le 15 décembre 2008 et, sous forme définitive, le 11 décembre 2009.

à un transfert thermique purement convectif. On parle alors de convection naturelle ou de convection libre. La région où la convection est significative est appelé *couche limite*. L'épaisseur de cette couche limite est faible, ce qui permet de négliger certains termes du système d'équations aux dérivées partielles qui modélise ce phénomène de convection. Après avoir fait les simplifications qui en résultent, et selon la manière dont est chauffée la plaque, on peut introduire de nouvelles variables et se ramener à l'équation différentielle ordinaire (2). Ses solutions fournissent ce que l'on appelle des solutions auto-semblables (ou auto-similaires) du problème. Pour plus de détails concernant le modèle mathématique et la technique permettant d'obtenir l'équation (2), voir [14] et [12].

Le plus souvent, on cherche les solutions de (1) qui vérifient les conditions aux limites suivantes

$$f(0) = a, \qquad f'(0) = b \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} f'(t) = 0. \tag{3}$$

Dans l'exemple de la convection naturelle, c'est le cas avec $b > 0$. En magnétohydrodynamique, lorsqu'une couche mince de métal liquide subit de la part d'un champ magnétique une excitation à haute fréquence, on peut obtenir le problème (1)-(3) avec $b < 0$ (voir [19] et [20]).

D'un point de vue mathématique, la condition à l'infini assure, en un certain sens, que le problème (1)-(3) est bien posé ; en effet, si f est une solution sur un intervalle du type $[t_0, +\infty)$ de l'équation plus générale $f''' + ff'' + \mathbf{g}(f') = 0$, et si $f'(t) \to \lambda \in \mathbb{R}$ quand $t \to +\infty$, alors $\mathbf{g}(\lambda) = 0$ (voir [9] et [6]). Ainsi, dans notre cas, la condition $f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ s'impose pour que (1)-(3) ait une solution.

Les problèmes aux limites correspondant aux équations (1) et (2) avec $b \geqslant 0$ sont étudiés dans bon nombre d'articles, comme [2], [3], [5], [10], [17], [18] et [21], d'une part par des méthodes directes, et d'autre part en associant à l'équation un champ de vecteurs du plan qui permet de dépasser certaines des difficultés rencontrées dans les méthodes directes.

Dans l'approche directe du problème aux limites (1)-(3), on emploie la « méthode du tir ». Pour cela, on note $f_{a,b,c}$ la solution du problème aux valeurs initiales $(\mathscr{I}_{a,b,c})$ qui consiste en l'équation (1) avec les conditions initiales $f(0) = a$, $f'(0) = b$ et $f''(0) = c$, et on note $[0, T_{a,b,c})$ l'intersection avec $[0, +\infty)$ de l'intervalle maximal d'existence de $f_{a,b,c}$. Ainsi, obtenir une solution du problème aux limites (1)-(3) revient à trouver une valeur de c pour laquelle $T_{a,b,c} = +\infty$ et $f'_{a,b,c}(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Pour certaines valeurs de β, il est possible de trouver des solutions explicites du problème aux limites (1)-(3). C'est le cas pour $\beta = -1$, $\beta = 1$ et $\beta = 1.5$ (si $\beta = -1$ on est ramené à une équation de Riccati et si $\beta = 1.5$ on retrouve l'équation de Chazy). Pour plus de détails, on pourra consulter [3], [5] et [6]. La valeur $\beta = -2$ apparaît naturellement. En multipliant (1) par f et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}(\beta+2)\int_{t_0}^{t} f(s)f'(s)^2 ds \;&=\; f(t)f''(t) - f(t_0)f''(t_0) - \tfrac{1}{2}f'(t)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}f'(t_0)^2 + f(t)^2 f'(t) - f(t_0)^2 f'(t_0).\end{aligned}$$

Ceci montre que, si $\beta = -2$, la fonction $\mathbf{G}(f, f', f'') = ff'' - \frac{1}{2}f'^2 + f^2 f'$ est une intégrale première de l'équation (1). Le fait que l'on soit capable de déterminer une intégrale première est remarquable ; cela va nous permettre d'obtenir des valeurs explicites de certaines constantes, comme celles caractérisant l'ensemble des réels c pour lesquels $f_{a,b,c}$ est une solution de (1)-(3), et celles intervenant dans les comportements asymptotiques.

Supposons dorénavant que $\beta = -2$. L'équation différentielle (1) s'écrit :

$$(\mathscr{E}) \qquad f''' + ff'' + 2f'^2 = 0.$$

Considérons ensuite le problème aux limites :

$$(\mathscr{P}_{a,b}) \qquad \begin{cases} f''' + ff'' + 2f'^2 = 0 \quad \text{sur } [0, +\infty), \\ f(0) = a, \\ f'(0) = b, \\ f'(t) \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to +\infty. \end{cases}$$

Nous nous concentrerons, dans cet article, sur le problème $(\mathscr{P}_{a,b})$ avec $b \geqslant 0$. Le cas $b < 0$ est étudié dans [11].

Dans certains contextes physiques, le problème aux limites $(\mathscr{P}_{a,b})$ est remplacé par un autre problème dans lequel on substitue à la condition en 0 portant sur f', une condition portant sur f'' ; voir [1], [7], [13] et [22] pour l'étude de ce type de problème pour l'équation (2), et la Remarque 3.12 ci-dessous pour le cas particulier de $(\mathscr{E})$.

Dans la section 2, nous donnerons des résultats très généraux sur les solutions de $(\mathscr{E})$ et, notamment, nous établirons des identités fondamentales que nous utiliserons largement ensuite. Dans la section 3, nous commencerons par mettre en évidence certaines propriétés que doivent vérifier les solutions du problème aux limites $(\mathscr{P}_{a,b})$, nous étudierons ensuite les solutions du problème aux valeurs initiales $(\mathscr{I}_{a,b,c})$, et nous finirons en résolvant complétement le problème $(\mathscr{P}_{a,b})$ et en donnant le comportement asymptotique de ses solutions.

2. Résultats préliminaires

2.1. Changement de concavité

Toute solution de $(\mathscr{E})$ a cette particularité que, si elle possède un point d'inflexion, alors elle est convexe avant celui-ci et concave après. C'est ce que nous montrons dans le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Soit f une solution non constante de $(\mathscr{E})$ sur un intervalle I. Si, pour un $t_0 \in I$, on a $f''(t_0) \leqslant 0$, alors $f''(t) < 0$ pour tout $t \in I \cap (t_0, +\infty)$.*

Démonstration. Soit $t \in I \cap (t_0, +\infty)$ et soit F une primitive quelconque de f. De l'équation $(\mathscr{E})$ on déduit que $\left(f''e^F\right)' = -2f'^2e^F$, et donc que

$$f''(t) = f''(t_0)e^{F(t_0)-F(t)} - 2\int_{t_0}^{t} f'(s)^2 e^{F(s)-F(t)} ds.$$

Puisque f est une solution non constante de $(\mathscr{E})$, f' ne peut être identiquement nulle sur l'intervalle $[t_0, t]$, d'où $f''(t) < 0$. $\square$

Remarque 2.2. Si f est une solution de $(\mathscr{E})$ sur un intervalle I et s'il existe $t_0 \in I$ tel que $f'(t_0) = f''(t_0) = 0$, alors f est constante sur I.

2.2. Une intégrale première

Pour toute fonction f définie et deux fois dérivable sur un intervalle I, posons

$$H_f := ff'' - \tfrac{1}{2}f'^2 + f^2 f'. \tag{4}$$

Lemme 2.3 (Première identité fondamentale). *Si f est une solution de $(\mathscr{E})$ sur un intervalle I, alors la fonction H_f est constante sur I. Autrement dit, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall t \in I, \qquad f(t)f''(t) - \tfrac{1}{2}f'(t)^2 + f(t)^2 f'(t) = \lambda. \tag{5}$$

Démonstration. On a

$$(H_f)' = ff''' + f'f'' - f'f'' + 2ff'^2 + f^2 f'' = (f''' + ff'' + 2f'^2)f = 0,$$

et le résultat s'ensuit. □

Lemme 2.4. *Soit f une solution positive de $(\mathscr{E})$ sur un intervalle I. Si $H_f = 0$ sur I, alors il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que*

$$f' + \tfrac{2}{3}f^2 = \kappa\sqrt{f} \tag{6}$$

sur I.

Démonstration. Posons $g = f'f^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}}$. On a

$$g' = f''f^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}f'^2 f^{-\frac{3}{2}} + f'f^{\frac{1}{2}} = f^{-\frac{3}{2}}H_f = 0.$$

Par suite, il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que $g = \kappa$ sur I, et (6) en découle. □

Lemme 2.5 (Deuxième identité fondamentale). *Soit f une solution de $(\mathscr{E})$ sur un intervalle I. Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall t \in I, \qquad \tfrac{3}{2}f''(t) + \tfrac{5}{2}f(t)f'(t) + \tfrac{1}{3}f(t)^3 = \lambda t + \mu. \tag{7}$$

Démonstration. Le lemme 2.3 nous assure qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $H_f = \lambda$ sur I. En remarquant que $ff'' = (ff')' - f'^2$, on déduit de cette identité et de $(\mathscr{E})$ les égalités

$$(ff')' - \tfrac{3}{2}f'^2 + f^2 f' = \lambda \qquad \text{et} \qquad f''' + (ff')' + f'^2 = 0.$$

Ainsi,

$$\tfrac{3}{2}f''' + \tfrac{5}{2}(ff')' + f^2 f' = \lambda.$$

L'existence d'une constante $\mu \in \mathbb{R}$ telle que (7) ait lieu s'en déduit alors par une intégration. □

2.3. Comportement des solutions non globales

Le premier résultat de cette section montre que si f est solution non globale de $(\mathscr{E})$, alors f, f' et f'' « explosent ». Dans la suite, nous utiliserons ce résultat le plus souvent dans sa forme contraposée.

Lemme 2.6. *Soit f une solution de $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle* maximal $I = (T_-, T_+)$.

(a) *Si $T_+ < +\infty$, alors $f''(t) \to -\infty$, $f'(t) \to -\infty$ et $f(t) \to -\infty$ quand $t \to T_+$.*

(b) *Si $T_- > -\infty$, alors $f''(t) \to +\infty$, $f'(t) \to -\infty$ et $f(t) \to +\infty$ quand $t \to T_-$.*

Démonstration. Montrons (a). Si T_+ est fini, alors

$$|f(t)| + |f'(t)| + |f''(t)| \to +\infty \quad \text{quand } t \to T_+$$

(Notons que si f est une solution de $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle maximal $I = (T_-, T_+)$, alors (f, f', f'') est une solution du système différentiel du premier ordre $\mathbf{y}' = \Psi(\mathbf{y})$ sur I, où $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est définie par $\Psi(\mathbf{y}) = \Psi(y_1, y_2, y_3) = (y_2, y_3, -y_1y_3 - 2y_2^2)$. Comme Ψ est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^3$, en vertu du principe de majoration *a priori*, si T_+ est fini, alors $\|\Psi(\mathbf{y})\| \to +\infty$ quand $t \to T_+$. Voir par exemple [16], page 380.)

Ainsi, $f''(t)$ est nécessairement non bornée quand $t \to T_+$, et grâce à l'identité fondamentale (7) on voit aisément qu'il en est de même de $f'(t)$. Soit $t_0 \in I$. En intégrant la relation (7), on obtient qu'il existe une constante $\nu \in \mathbb{R}$, dépendant de t_0, telle que

$$\forall t \in I, \qquad \tfrac{3}{2}f'(t) + \tfrac{5}{4}f(t)^2 + \tfrac{1}{3}\int_{t_0}^{t} f(s)^3 ds = \tfrac{\lambda}{2}t^2 + \mu t + \nu,$$

d'où il découle que $f(t)$ est non bornée quand $t \to T_+$. Ensuite, compte tenu du lemme 2.1, la fonction f est convexe ou concave au voisinage de T_+, de sorte que l'on se trouve dans l'alternative suivante :

- ou bien $f > 0$, $f' > 0$ et $f'' > 0$ au voisinage de T_+,
- ou bien $f < 0$, $f' < 0$ et $f'' < 0$ au voisinage de T_+.

Dans les deux cas, on a $f''' = -ff'' - 2f'^2 < 0$ au voisinage de T_+, et donc nécessairement $f''(t) \to -\infty$ quand $t \to T_+$, ce qui exclut le premier cas. Le résultat s'ensuit aisément. Pour l'assertion (b), on applique le résultat de (a) à la fonction $t \mapsto -f(-t)$ qui est une solution de $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle maximal $I = (-T_+, -T_-)$. □

La proposition suivante précise le comportement asymptotique des solutions non globales de $(\mathscr{E})$. L'utilisation des identités fondamentales permet d'en obtenir une démonstration extrêmement courte ; voir [4] pour la preuve de ce résultat dans le cas de l'équation (1).

Proposition 2.7. *Soit f une solution de $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle* maximal $I = (T_-, T_+)$.

(a) *Si $T_+ < +\infty$, alors, quand $t \to T_+$, on a*

$$f''(t) \sim \frac{-3}{(T_+ - t)^3}, \quad f'(t) \sim \frac{-3}{2(T_+ - t)^2} \quad \textit{et} \quad f(t) \sim \frac{-3}{2(T_+ - t)}.$$

(b) *Si* $T_- > -\infty$*, alors, quand* $t \to T_-$*, on a*

$$f''(t) \sim \frac{3}{(t-T_-)^3}, \quad f'(t) \sim \frac{-3}{2(t-T_-)^2} \quad \textit{et} \quad f(t) \sim \frac{3}{2(t-T_-)}.$$

Démonstration. Montrons (a). Compte tenu des lemmes 2.3, 2.5 et 2.6, il existe des constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, et $t_0 \in I$ tels que, pour tout $t \in (t_0, T_+)$, on a

$$f''(t)f(t)^{-3} - \tfrac{1}{2}f'(t)^2 f(t)^{-4} + f'(t)f(t)^{-2} = \lambda f(t)^{-4} \tag{8}$$

et

$$\tfrac{3}{2}f''(t)f(t)^{-3} + \tfrac{5}{2}f'(t)f(t)^{-2} + \tfrac{1}{3} = (\lambda t + \mu)f(t)^{-3}. \tag{9}$$

En multipliant l'identité (8) par $\frac{3}{2}$ et en la soustrayant à (9), on obtient

$$\big(f'(t)f(t)^{-2} + \tfrac{2}{3}\big)^2 \to 0 \quad \text{quand} \quad t \to T_+,$$

et donc

$$f'(t)f(t)^{-2} \sim -\tfrac{2}{3} \quad \text{quand} \quad t \to T_+. \tag{10}$$

En intégrant, on en déduit que

$$f(t)^{-1} \sim -\tfrac{2}{3}(T_+ - t) \quad \text{quand} \quad t \to T_+.$$

La troisième relation de (a) en découle ; la seconde s'obtient en revenant à (10), puis la première à l'aide de (8) ou de (9). Pour (b), comme dans la preuve du lemme précédent, on utilise le fait que la fonction $t \mapsto -f(-t)$ est une solution de $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle maximal $I = (-T_+, -T_-)$. $\square$

Lemme 2.8. *Soit f une solution de $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle* maximal $I = (T_-, T_+)$. *Si $f'' > 0$ sur I, alors $T_+ = +\infty$ et $f' < 0$ sur I.*

Démonstration. Le fait que $T_+ = +\infty$ résulte du lemme 2.6. Supposons ensuite qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $f'(t_1) \geqslant 0$. Comme $f'' > 0$, on a $f'(t) > 0$ pour $t > t_1$. Fixons $t_2 > t_1$. On a $f(t) > f'(t_2)(t - t_2) + f(t_2)$ pour tout $t > t_2$. En particulier f est positive pour t assez grand. Mais par ailleurs, l'identité (7) donne

$$\tfrac{1}{3}f(t)^3 \leqslant \lambda t + \mu - \tfrac{5}{2}f(t)f'(t).$$

Par conséquent, pour t suffisamment grand, on obtient

$$f'(t_2)(t - t_2) + f(t_2) < f(t) < \sqrt[3]{3(\lambda t + \mu)},$$

ce qui mène à une contradiction en faisant tendre t vers $+\infty$. $\square$

Remarque 2.9. Si f est une solution de $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle maximal $I = (T_-, T_+)$ et si $f'' < 0$ sur I, alors en appliquant le résultat du lemme précédent à la fonction $t \mapsto -f(-t)$, qui est une solution de $(\mathscr{E})$ sur l'intervalle maximal $I = (-T_+, -T_-)$, on obtient que $T_- = -\infty$ et $f' < 0$ sur I.

3. Le problème aux limites $(\mathscr{P}_{a,b})$ lorsque $b \geqslant 0$

Dans cette section nous allons nous intéresser au problème aux limites $(\mathscr{P}_{a,b})$ avec $b \geqslant 0$, et nous commencerons par mettre en évidence certaines conditions nécessaires que doit satisfaire toute solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$ lorsque $b \geqslant 0$. Ensuite, afin de résoudre complètement le problème $(\mathscr{P}_{a,b})$, nous considérerons le problème aux valeurs initiales

$$(\mathscr{I}_{a,b,c}) \qquad \begin{cases} f''' + ff'' + 2f'^2 = 0, \\ f(0) = a, \\ f'(0) = b \geqslant 0, \\ f''(0) = c, \end{cases}$$

et nous déterminerons toutes les valeurs de $c \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la solution $f_{a,b,c}$ de $(\mathscr{I}_{a,b,c})$ existe sur $[0, +\infty)$ et est telle que $f'_{a,b,c}(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, c'est-à-dire est une solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$. Nous finirons cette section en donnant des précisions sur le comportement à l'infini des solutions de $(\mathscr{P}_{a,b})$.

3.1. Propriétés des solutions de $(\mathscr{P}_{a,b})$

Commençons par montrer quelques propriétés qualitatives que doit vérifier toute éventuelle solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$. Notons que nous ne savons pas *a priori* que de telles solutions existent.

Lemme 3.1. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \geqslant 0$. Si f est une solution non constante de $(\mathscr{P}_{a,b})$, alors f' est positive sur $(0, +\infty)$. De plus,*

(a) *si $f''(0) \leqslant 0$, alors $f'' < 0$ sur $(0, +\infty)$;*

(b) *si $f''(0) > 0$, alors il existe $t_0 > 0$ tel que $f'' > 0$ sur $[0, t_0)$, $f''(t_0) = 0$ et $f'' < 0$ sur $(t_0, +\infty)$.*

Dans le premier cas, on dira que f est une solution concave *de $(\mathscr{P}_{a,b})$, et dans le second, que f est une solution* convexe-concave *de $(\mathscr{P}_{a,b})$.*

Démonstration. Supposons que f est une solution non constante de $(\mathscr{P}_{a,b})$. Pour (a), si $f''(0) \leqslant 0$, alors le lemme 2.1 montre que $f'' < 0$ sur $(0, +\infty)$. Par conséquent, f' est strictement décroissante, et comme $f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, on obtient que $f' > 0$ sur $[0, +\infty)$.

Pour ce qui est de (b), si $f''(0) > 0$, alors, puisque $f'(0) \geqslant 0$, on déduit des lemmes 2.1 et 2.8 qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $f'' > 0$ sur $[0, t_0)$ et $f''(t_0) = 0$, et à nouveau grâce au lemme 2.1, on obtient que $f'' < 0$ sur $(t_0, +\infty)$. Comme dans le cas précédent, on en déduit que $f' > 0$ sur $[t_0, +\infty)$, et puisque $f' > b$ sur $(0, t_0]$, on a $f' > 0$ sur $(0, +\infty)$. □

Lemme 3.2. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \geqslant 0$. Si f est une solution non constante de $(\mathscr{P}_{a,b})$, alors il existe $t_1 \geqslant 0$ tel que $f(t) > 0$ pour tout $t \in (t_1, +\infty)$.*

Démonstration. Si ce n'était pas le cas, on aurait $f < 0$ sur $[0, +\infty)$, et donc, grâce au lemme 3.1, et pour t assez grand, on aurait

$$f'''(t) = -f(t)f''(t) - 2f'(t)^2 < 0.$$

Par suite f' serait concave à l'infini, ce qui contredirait la positivité de f' et le fait que $f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. $\square$

Remarque 3.3. Des lemmes 3.1 et 3.2, on déduit que si f est une solution non constante de $(\mathscr{P}_{a,b})$, alors $f(t)$ possède une limite dans $(0, +\infty]$ quand $t \to +\infty$.

Dans les deux prochains lemmes nous allons montrer que toute solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$ vérifie certaines relations au voisinage de $+\infty$. Ces relations nous permettront, entre autres, d'obtenir le comportement asymptotique des solutions de $(\mathscr{P}_{a,b})$.

Lemme 3.4. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \geqslant 0$. Si f est une solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$, alors on a*

$$\lim_{t\to+\infty} f''(t) = \lim_{t\to+\infty} f'''(t) = \lim_{t\to+\infty} f(t)f''(t) = 0. \tag{11}$$

Démonstration. C'est clair si f est constante. Supposons donc que f est une solution non constante de $(\mathscr{P}_{a,b})$. Multiplions l'équation $(\mathscr{E})$ par f'', et intégrons de 0 à $t > 0$. On obtient

$$\tfrac{1}{2}f''(t)^2 - \tfrac{1}{2}f''(0)^2 + \int_0^t f(s)f''(s)^2 ds + \tfrac{2}{3}f'(t)^3 - \tfrac{2}{3}b^3 = 0. \tag{12}$$

Le lemme 3.2 nous dit qu'il existe $t_1 \geqslant 0$ tel que $f(t) > 0$ pour $t > t_1$. On en déduit que la fonction

$$t \longmapsto \int_0^t f(s)f''(s)^2 ds$$

est croissante sur $[t_1, +\infty)$, et donc possède une limite (éventuellement égale à $+\infty$) quand $t \to +\infty$. Par conséquent, l'identité (12) entraîne que $f''(t)^2$ a une limite quand $t \to +\infty$. Par continuité, on en déduit que $f''(t)$ a une limite quand $t \to +\infty$, et cette limite ne peut être que 0, puisque $f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Ensuite, en dérivant $(\mathscr{E})$, on obtient $f'''' + ff''' + 5f'f'' = 0$, et en multipliant cette égalité par f''', puis en intégrant entre 0 et $t > 0$, on arrive à

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}f'''(t)^2 - \tfrac{1}{2}f'''(0)^2 + \int_0^t f(s)f'''(s)^2 ds \\ + \tfrac{5}{2}f'(t)f''(t)^2 - \tfrac{5}{2}bf''(0)^2 - \tfrac{5}{2}\int_0^t f''(s)^3 ds = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Grâce aux lemmes 3.1 et 3.2, on obtient que la fonction

$$t \longmapsto \int_0^t \big(f(s)f'''(s)^2 - \tfrac{5}{2}f''(s)^3\big) ds$$

possède une limite quand $t \to +\infty$. Comme, par ce qui précède, $f'(t)f''(t)^2 \to 0$ quand $t \to +\infty$, l'identité (13) entraîne que $f'''(t)$ a une limite quand $t \to +\infty$, et cette limite est nécessairement 0, puisque $f''(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Finalement, en revenant à $(\mathscr{E})$, on obtient que $f(t)f''(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. $\square$

Lemme 3.5. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \geqslant 0$. Si f est une solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$, alors $f(t)f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. De plus,*

$$\forall t \geqslant 0, \qquad f''(t) + f(t)f'(t) = \int_t^{+\infty} f'(s)^2 ds. \tag{14}$$

Démonstration. Si f est bornée, il est évident que $f(t)f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Supposons donc que $f(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. Le lemme 2.3 permet d'écrire, pour t assez grand,

$$f''(t) - \tfrac{1}{2}f'(t)^2 f(t)^{-1} + f(t)f'(t) = \lambda f(t)^{-1},$$

ce qui, avec le lemme 3.4, entraîne que $f(t)f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Ensuite, en intégrant $(\mathscr{E})$ de t à $s > t$, on obtient

$$f''(s) - f''(t) + f(s)f'(s) - f(t)f'(t) + \int_t^s f'(\xi)^2\, d\xi = 0$$

et (14) s'en déduit en faisant tendre s vers $+\infty$. $\square$

Remarque 3.6. En reprenant les arguments de la preuve précédente, on voit sans peine que $f'(t)f(t)^{2-\epsilon} \to 0$ quand $t \to +\infty$, pour tout $\epsilon > 0$.

Le dernier résultat de cette section montre que l'existence d'une solution f de $(\mathscr{P}_{a,b})$ impose le signe de l'intégrale première H_f. Cette condition nécessaire d'existence nous permettra de mettre en évidence les cas où le problème $(\mathscr{P}_{a,b})$ n'a pas de solutions.

Lemme 3.7. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \geqslant 0$. Si f est une solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$, alors pour tout $t \geqslant 0$, on a $H_f(t) = H_f(0) \geqslant 0$.*

Démonstration. Le résultat est évident si f est constante. Supposons donc que f est une solution non constante de $(\mathscr{P}_{a,b})$. Du lemme 2.3 découle que $H_f(t) = H_f(0)$ pour tout $t \geqslant 0$. D'où,

$$\forall t \geqslant 0, \qquad f(t)^2 f'(t) = H_f(0) - f(t)f''(t) + \tfrac{1}{2}f'(t)^2.$$

Grâce au lemme 3.4, on en déduit que

$$H_f(0) = \lim_{t \to +\infty} f(t)^2 f'(t).$$

La conclusion résulte alors du lemme 3.1. $\square$

3.2. Propriétés des solutions de $(\mathscr{I}_{a,b,c})$

Le lemme suivant est une forme de réciproque du lemme 3.1.

Lemme 3.8. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \geqslant 0$ et $c \in \mathbb{R}$. Si $f'_{a,b,c} > 0$ sur $(0, T_{a,b,c})$, alors $T_{a,b,c} = +\infty$ et $f_{a,b,c}$ est une solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$.*

Démonstration. Notons $f = f_{a,b,c}$ et $T = T_{a,b,c}$. Comme $b \geqslant 0$, les lemmes 2.1 et 2.8 montrent qu'il existe $t_0 \in [0, T)$ tel que $f'' < 0$ sur (t_0, T). On en déduit que $f'(t) \to l \geqslant 0$ quand $t \to T$ et, en vertu du lemme 2.6, que $T = +\infty$. Nous affirmons maintenant que $l = 0$; en effet, si l était non nul, on déduirait de (7) que $f''(t) \sim -\frac{2}{9}(lt)^3$ quand $t \to +\infty$, ce qui contredirait le fait que $f'(t) \to l$ quand $t \to +\infty$. Ainsi, $l = 0$ et f est une solution du problème $(\mathscr{P}_{a,b})$. $\square$

Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $f_{a,b,c}$ n'est pas une solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$. On peut préciser le comportement de $f_{a,b,c}$; en particulier, en remarquant que la fonction

$$h_\tau : t \mapsto -\frac{3}{2(\tau - t)}$$

est une solution de $(\mathscr{E})$ sur chacun des intervalles $(-\infty, \tau)$ et $(\tau, +\infty)$, et en comparant $f_{a,b,c}$ à une solution de ce type, on montre que $T_{a,b,c}$ est fini.

Proposition 3.9. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \geqslant 0$ et $c \in \mathbb{R}$. Si $f_{a,b,c}$ n'est pas une solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$, alors $T_{a,b,c} < +\infty$ et, quand $t \to T_{a,b,c}$, on a*

$$f''_{a,b,c}(t) \sim \frac{-3}{(T_{a,b,c}-t)^3}, \quad f'_{a,b,c}(t) \sim \frac{-3}{2(T_{a,b,c}-t)^2} \quad \textit{et} \quad f_{a,b,c}(t) \sim \frac{-3}{2(T_{a,b,c}-t)}.$$

Démonstration. Notons $f = f_{a,b,c}$ et $T = T_{a,b,c}$. Compte tenu de la proposition 2.7, il suffit de montrer que $T < +\infty$. Comme f n'est pas une solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$ et que $b \geqslant 0$, on déduit du lemme 3.8 que f' s'annule en un point $t_1 \geqslant 0$, et que, nécessairement, on a $f''(t_1) < 0$. Par conséquent, du lemme 2.1, on déduit que $f'' < 0$ et $f' < 0$ sur $(t_1, +\infty)$, et donc $f(t) \to -\infty$ quand $t \to T$. Soit donc $t_2 \geqslant t_1$ tel que $f < 0$, $f' < 0$ et $f'' < 0$ sur $[t_2, T)$, et choisissons $\tau \in \mathbb{R}$ tel que

$$\tau > t_2 + \max\left\{\tfrac{3}{-2f(t_2)}, \sqrt{\tfrac{3}{-2f'(t_2)}}, \sqrt[3]{\tfrac{3}{-f''(t_2)}}\right\}.$$

Montrons que $T \leqslant \tau$. Pour cela raisonnons par l'absurde et supposons, au contraire, que $T > \tau$, puis posons $w = f - h_\tau$; w est définie sur $[0, \tau)$. Le choix de τ que nous avons fait entraîne que $w(t_2) < 0$, $w'(t_2) < 0$ et $w''(t_2) < 0$. Supposons maintenant que w'' s'annule sur (t_2, τ). Alors il existe t_3 dans cet intervalle tel que $w''(t_3) = 0$, $w'' < 0$ sur $[t_2, t_3)$ et $w'''(t_3) \geqslant 0$. Mais, puisque $w(t_3) < 0$ et $w'(t_3) < 0$, on obtient

$$\begin{aligned} w'''(t_3) &= -f(t_3)f''(t_3) + h_\tau(t_3)h''_\tau(t_3) - 2f'(t_3)^2 + 2h'_\tau(t_3)^2 \\ &= -f''(t_3)w(t_3) - 2(f'(t_3) + h'_\tau(t_3))w'(t_3) \\ &< 0, \end{aligned}$$

ce qui amène une contradiction. Par conséquent, w'' ne s'annule pas, et donc $f'' < h''_\tau$. On en déduit que $f''(t) \to -\infty$ quand $t \to \tau$. Ceci contredit le fait que f est définie sur $[0, \tau]$. Ainsi $T \leqslant \tau$ et la démonstration est terminée. □

3.3. Le problème aux limites $(\mathscr{P}_{a,b})$: existence de solutions

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer exactement, en fonction des valeurs de a et b, les cas où $(\mathscr{P}_{a,b})$ possède des solutions. Dans cette section, nous supposerons que a et b sont fixés dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$ respectivement et, pour tout $c \in \mathbb{R}$, nous noterons $f_c = f_{a,b,c}$ et $T_c = T_{a,b,c}$. Nous poserons également

$$c_* = c_*(a,b) = \begin{cases} \frac{b(b-2a^2)}{2a} & \text{si} \quad a \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad a = 0. \end{cases}$$

Théorème 3.10. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \geqslant 0$.*

(a) *Si $a \leqslant 0$ et $b > 0$, alors $(\mathscr{P}_{a,b})$ n'a pas de solution.*

(b) *Si $a < 0$ et $b = 0$, alors $(\mathscr{P}_{a,b})$ a une unique solution : la fonction constante $t \mapsto a$.*

(c) *Si $a = b = 0$ ou si $a > 0$ et $b \geqslant 0$, alors f_c est une solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$ si et seulement si $c \geqslant c_*$.*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que $(\mathscr{P}_{a,b})$ possède une solution constante si et seulement si $b = 0$. Supposons que $a \leqslant 0$ et $b > 0$, ou que $a < 0$ et $b = 0$. S'il existait une solution non constante f de $(\mathscr{P}_{a,b})$, alors on déduirait des lemmes 3.1 et 3.2 l'existence de $t_1 \geqslant 0$ tel que $f(t_1) = 0$ et $f'(t_1) > 0$. Par conséquent, on aurait

$$H_f(t_1) = -\tfrac{1}{2}f'(t_1)^2 < 0$$

et une contradiction avec le lemme 3.7. Les assertions (a) et (b) en résultent.

Supposons maintenant que $a = b = 0$ ou que $a > 0$. Soit $c \in \mathbb{R}$. Notons $H_c = H_{f_c}$. On a

$$H_c(0) = ac - \tfrac{1}{2}b^2 + a^2b = a(c - c_*).$$

Les lemmes 3.1 et 3.7 montrent que, si $c < c_*$, alors f_c n'est pas solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$. Si $b = 0$ alors $c_* = 0$ et $f_0 : t \mapsto a$ est solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$. Soit ensuite $c \geqslant c_*$ si $b > 0$, et $c > 0$ si $b = 0$. On a $f_c' > 0$ sur $(0, T_c)$; en effet, dans le cas contraire, puisque f_c n'est pas constante et positive au voisinage de 0, il existerait $t_1 \in (0, T_c)$ tel que $f_c'(t_1) = 0$, $f_c(t_1) > 0$ et $f_c''(t_1) < 0$. Par suite, on aurait $H_c(t_1) = f_c(t_1)f_c''(t_1) < 0$ et une contradiction avec le lemme 3.7. Ainsi, $f_c' > 0$ sur $(0, T_c)$, et le lemme 3.8 entraîne que $T_c = +\infty$ et que f_c est une solution de $(\mathscr{P}_{a,b})$. La preuve est terminée. $\square$

Remarque 3.11. Soient $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $c \in \mathbb{R}$. Supposons que f_c est une solution non constante de $(\mathscr{P}_{a,b})$. On sait alors que $f_c > 0$ et $f_c' > 0$ sur $(0, +\infty)$. Par conséquent, quand $t \to +\infty$, ou bien $f_c(t)$ tend vers une limite finie strictement positive (*i.e.* f_c est bornée), ou bien $f_c(t)$ tend vers $+\infty$ (*i.e.* f_c est non bornée).

Par ailleurs, H_c est constante sur $[0, +\infty)$ et donc, compte tenu du lemme 3.7, ou bien $H_c = 0$, ou bien $H_c = \lambda > 0$. Dans le premier cas (qui a lieu si $a > 0$ et $c = c_*$, ou si $a = b = 0$ et $c \geqslant 0$) la fonction f_c est bornée. En effet, si $f_c(t)$ tendait vers $+\infty$ quand $t \to +\infty$, on obtiendrait une contradiction en passant à la limite dans (6). Dans le second cas (qui a lieu si $a > 0$ et $c > c_*$) la fonction f_c est non bornée. Pour le voir, il suffit de remarquer que si $f_c(t)$ tendait vers une limite finie quand $t \to +\infty$, alors $H_c = f_c(t)f_c''(t) - \frac{1}{2}f_c'(t)^2 + f_c(t)^2 f_c'(t)$ tendrait vers 0 quand $t \to +\infty$, et donc H_c serait égale à 0.

Du théorème 3.10 et des considérations précédentes, on voit que si $a > 0$ et $b \geqslant 0$, alors $(\mathscr{P}_{a,b})$ a une unique solution bornée et une infinité de solutions non bornées, et que si $a = b = 0$, alors $(\mathscr{P}_{a,b})$ a une infinité de solutions bornées.

Remarque 3.12. Considérons le problème aux limites $(\mathscr{P}'_{a,c})$ constitué de l'équation $(\mathscr{E})$ avec les conditions aux limites $f(0) = a$, $f''(0) = c < 0$ et $f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Il est facile de déduire du lemme 2.1 que $f_{a,b,c}$ ne peut être une solution de $(\mathscr{P}'_{a,c})$ si $b \leqslant 0$. D'autre part, le théorème 3.10 nous montre que si $a, c \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, alors $T_{a,b,c} = +\infty$ et $f'_{a,b,c}(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ si et seulement si $a > 0$ et $b^2 - 2a^2b - 2ac \leqslant 0$. Par conséquent, $f_{a,b,c}$ est une solution de $(\mathscr{P}'_{a,c})$ si et seulement si $a \geqslant \sqrt[3]{-2c}$ et $b \in [b_-, b_+]$, où

$$b_- = a^2 - \sqrt{a^4 + 2ac} \qquad \text{et} \qquad b_+ = a^2 + \sqrt{a^4 + 2ac}$$

sont les deux racines (éventuellement confondues) du polynôme $X^2 - 2a^2X - 2ac$. De plus, les solutions $f_{a,b,c}$ pour $b = b_-$ et $b = b_+$ sont bornées.

3.4. Comportement asymptotique des solutions de $(\mathscr{P}_{a,b})$

Dans les deux propositions suivantes, nous allons préciser le comportement asymptotique des solutions non constantes de $(\mathscr{P}_{a,b})$.

Proposition 3.13. *Soient $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et f une solution non constante et bornée de $(\mathscr{P}_{a,b})$. Notons ℓ la limite de f en $+\infty$. Il existe une constante positive A telle que, pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$f''(t) = -\ell^2 A\, e^{-\ell t}\left(1 + \mathrm{o}\left(e^{-(\ell-\epsilon)t}\right)\right) \qquad \text{quand} \qquad t \to +\infty, \tag{15}$$

$$f'(t) = \ell\, A\, e^{-\ell t}\left(1 + \mathrm{o}\left(e^{-(\ell-\epsilon)t}\right)\right) \qquad \text{quand} \qquad t \to +\infty, \tag{16}$$

$$f(t) = \ell - A\, e^{-\ell t}\left(1 + \mathrm{o}\left(e^{-(\ell-\epsilon)t}\right)\right) \qquad \text{quand} \qquad t \to +\infty. \tag{17}$$

Démonstration. Grâce au lemme 3.1 et au théorème 3.10, on sait que f et f' sont positives sur $(0, +\infty)$. Par conséquent, on déduit de (5) que, sur $(0, +\infty)$, on a

$$f''f'^{-1} - \tfrac{1}{2}f'f^{-1} + \ell = \ell - f. \tag{18}$$

D'où $f''(t) \sim -\ell f'(t)$ quand $t \to +\infty$ et, en intégrant, on obtient $f'(t) \sim \ell(\ell - f(t))$ quand $t \to +\infty$. En intégrant à nouveau, on arrive finalement à

$$\ell - f(t) = e^{-\ell t(1+\mathrm{o}(1))} \quad \text{quand} \quad t \to +\infty.$$

Cette dernière relation montre que, pour tout $\epsilon > 0$, on a $\ell - f(t) = \mathrm{o}\left(e^{-(\ell-\epsilon)t}\right)$ quand $t \to +\infty$. En revenant à (18), on voit que $\ln f'(t) + \ell t$ possède une limite finie quand $t \to +\infty$, et que, si ν est cette limite, on a

$$\ln f'(t) + \ell t = \nu + \mathrm{o}\left(e^{-(\ell-\epsilon)t}\right) \quad \text{quand} \quad t \to +\infty.$$

Cela donne facilement la relation (16) avec $A = e^{\nu}/\ell$, et la relation (17) s'ensuit par une intégration. La relation (15) s'obtient sans difficultés à l'aide de (7). □

Notons que dans la deuxième moitié de la preuve, on a utilisé à plusieurs reprises des résultats classiques concernant le comportement asymptotique des primitives (voir par exemple [15, (10.2)], page 93).

Remarque 3.14. Soient $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$. Si $a > 0$, alors $(\mathscr{P}_{a,b})$ a une unique solution bornée f qui vérifie $f''(0) = c_*$. Notons ℓ la limite de f en l'infini. En passant à la limite quand $t \to +\infty$ dans (6), on obtient

$$\ell^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{2}\kappa = \tfrac{3}{2}f'(0)f(0)^{-\frac{1}{2}} + f(0)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{2}ba^{-\frac{1}{2}} + a^{\frac{3}{2}}.$$

Par suite, on a $\ell = \left(\frac{3b+2a^2}{2\sqrt{a}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Si $a = 0$, alors $(\mathscr{P}_{a,b})$ n'a des solutions que pour $b = 0$. Dans ce cas, toutes les solutions de $(\mathscr{P}_{a,b})$ sont les fonctions f_c avec $c \geqslant 0$, et elles sont bornées. Notons ℓ_c la limite de f_c en l'infini. Comme f_0 est la fonction nulle, on a $\ell_0 = 0$. Si $c > 0$, puisque $f_c'(t) \sim ct$ et $f_c(t) \sim \frac{ct^2}{2}$ quand $t \to 0$, à l'aide de (6), il vient

$$\ell_c^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{2}\kappa = \lim_{t\to 0}\left(\tfrac{3}{2}f_c'(t)f_c(t)^{-\frac{1}{2}} + f_c(t)^{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\tfrac{9c}{2}}.$$

D'où, $\ell_c = \sqrt[3]{\frac{9c}{2}}$.

Proposition 3.15. *Soient $a > 0$ et $b \geqslant 0$. Soient f une solution non bornée de $(\mathscr{P}_{a,b})$ et $\lambda = H_f(0) > 0$. Il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $t \to +\infty$, on a*

$$f'(t) \sim \lambda(3\lambda t)^{-\frac{2}{3}} \qquad \textit{et} \qquad f(t) = (3\lambda t)^{\frac{1}{3}} + \mu(3\lambda t)^{-\frac{2}{3}} + \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{t}\big). \tag{19}$$

Démonstration. Du lemme 2.5, on déduit qu'il existe un réel μ tel que

$$\forall t \geqslant 0, \qquad \tfrac{3}{2}f''(t) + \tfrac{5}{2}f(t)f'(t) + \tfrac{1}{3}f(t)^3 = \lambda t + \mu. \tag{20}$$

Par conséquent, puisque $f''(t) \to 0$ et $f(t)f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, on a

$$f(t) \sim (3\lambda t)^{\frac{1}{3}} \quad \text{quand} \quad t \to +\infty.$$

La première relation de (19) se déduit alors aisément de l'identité (5). Ensuite, puisque $f(t)f''(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, on a $f''(t) = \mathrm{o}\big(t^{-\frac{1}{3}}\big)$ quand $t \to +\infty$. En revenant à (20), on obtient

$$f(t) = \Big(3\lambda t + 3\mu + \mathrm{O}\big(t^{-\frac{1}{3}}\big)\Big)^{\frac{1}{3}} \quad \text{quand} \quad t \to +\infty.$$

La seconde relation de (19) en découle. □

Remarque 3.16. Soient $a > 0$ et $b \geqslant 0$. Le problème $(\mathscr{P}_{a,b})$ a une infinité de solutions non bornées : les fonctions f_c avec $c > c_*$. Pour de tels c, les constantes λ et μ intervenant dans (19) s'expriment en fonction de a, b et c par

$$\lambda = H_c(0) = ac - \tfrac{1}{2}b^2 + a^2 b \qquad \text{et} \qquad \mu = \tfrac{3}{2}c + \tfrac{5}{2}ab + \tfrac{1}{3}a^3,$$

et il est facile de voir que l'inégalité $c > c_*$ entraîne que $\mu > 0$.

Remarque 3.17. Il est naturel de s'attendre à ce que l'on ait, en plus de (19), la relation

$$f''(t) \sim -2\lambda^2(3\lambda t)^{-\frac{5}{3}} \qquad \text{quand} \qquad t \to +\infty.$$

Au regard de l'équation $(\mathscr{E})$, ceci est équivalent à $f'''(t) = \mathrm{o}\big(t^{-\frac{4}{3}}\big)$ quand $t \to +\infty$. Or, même si là aussi il est légitime de penser que cette dernière estimation puisse être exacte, son obtention n'est pas immédiate et sort du cadre de cet article.

Remarque 3.18. Le résultat de la proposition 3.15 est plus précis que celui obtenu, dans des cadres plus généraux, dans [8] et [18], puisque nous avons des constantes explicites dans les équivalents (19). La preuve en est également bien plus élémentaire.

Remerciements. L'auteur tient à remercier Augustin Fruchard pour son écoute, sa patience et ses remarques pertinentes.

RÉFÉRENCES

[1] M. Aïboudi et B. Brighi, *On the solutions of a boundary value problem arising in free convection with prescribed heat flux*, Arch. Math. (Basel) **93** (2009), no. 2, 165–174.

[2] Z. Belhachmi, B. Brighi et K. Taous, *Solutions similaires pour un problème de couche limite en milieux poreux*, C. R. Mécanique **328** (2000), 407–410.

[3] Z. Belhachmi, B. Brighi et K. Taous, *On a family of differential equations for boundary layer approximations in porous media*, European J. Appl. Math. **12** (2001), no. 4, 513–528.

[4] M. Benlahsen, A. Gmira et M. Guedda, *On singular solutions of a magnetohydrodynamic nonlinear boundary layer equation*, Electron. J. Differential Equations (2007), no. 78, 15 pp. (electronic).

[5] B. Brighi, *On a similarity boundary layer equation*, Z. Anal. Anwendungen **21** (2002), no. 4, 931–948.

[6] B. Brighi, *On the differential equation $f''' + ff'' + \mathbf{g}(f') = 0$ and the associated boundary value problems*, en préparation.

[7] B. Brighi et J.-D. Hoernel, *On similarity solutions for boundary layer flows with prescribed heat flux*, Math. Methods Appl. Sci. **28** (2005), no. 4, 479–503.

[8] B. Brighi et J.-D. Hoernel, *Asymptotic behavior of the unbounded solutions of some boundary layer equations*, Arch. Math. (Basel) **85** (2005), no. 2, 161–166.

[9] B. Brighi et J.-D. Hoernel, *On a general similarity boundary layer equation*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) **77** (2008), no. 1, 9–22.

[10] B. Brighi et T. Sari, *Blowing-up coordinates for a similarity boundary layer equation*, Discrete Contin. Dyn. Syst. (Serie A) **12** (2005), no. 5, 929–948.

[11] B. Brighi et J.-C. Tsai, *Similarity solutions arising from a model in high frequency excitation of liquid metal with an antisymmetric magnetic field*, prépublication.

[12] M. A. Chaudhary, J. H. Merkin et I. Pop, *Similarity solutions in free convection boundary-layer flows adjacent to vertical permeable surfaces in porous media. I. Prescribed surface temperature*, European J. Mech. B Fluids **14** (1995), no. 2, 217–237.

[13] M. A. Chaudhary, J. H. Merkin et I. Pop, *Similarity solutions in free convection boundary-layer flows adjacent to vertical permeable surfaces in porous media. II. Prescribed surface heat flux*, Heat and Mass Transfer **30** (1995), 341–347.

[14] P. Cheng et W. J. Minkowycz, *Free-convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike*, J. Geophys. Res. **82** (1977), no. 14, 2040–2044.

[15] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1968, 479 pp.

[16] X. Gourdon, *Analyse, Les maths en tête : Mathématiques pour MP**, 2e édition, Ellipses Marketing, Paris, 2008, 432 pp.

[17] M. Guedda, *Nonuniqueness of solutions to differential equations for boundary layer approximations in porous media*, C. R. Mécanique **330** (2002), 279–283.

[18] M. Guedda, *Similarity solutions of differential equations for boundary layer approximations in porous media*, Z. angew. Math. Phys. **56** (2005), no. 5, 749–762.

[19] H. K. Moffatt, *High-frequency excitation of liquid metal systems*, in IUTAM Symposium, Metallurgical Application of Magnetohydrodynamics, edited by H. K. Moffatt and M. R. E. Proctor, Metals Society, London, 1984.

[20] H. K. Moffatt, *Reflections on magnetohydrodynamics*, in Perspectives in fluid dynamics. A collective introduction to current research, 347–392, edited by G. K. Batchelor, H. K. Moffatt and M. G. Worster, Cambridge Univ. Press, 2000.

[21] J.-C. Tsai, *Similarity solutions for boundary layer flows with prescribed surface temperature*, Appl. Math. Lett. **21** (2008), no. 1, 67–73.

[22] J.-C. Tsai et C.-A. Wang, *A note on similarity solutions for boundary layer flows with prescribed heat flux*, Math. Methods Appl. Sci. **30** (2007), no. 12, 1453–1466.

B. Brighi, Lab. de Mathématiques, Informatique et Applications, Faculté des Sciences et Techniques, U. de Haute Alsace, 4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse cedex, France.
Bernard.Brighi@uha.fr