Ann. Sci. Math. Québec **32** (2008), no 2, 159–169

APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES DANS LES CHAMPS ALGÉBRIQUES ET COHOMOLOGIE NON ABÉLIENNE

JEAN-CLAUDE DOUAI

Dédié au professeur John Labute à l'occasion de ses 70 *ans.*

RÉSUMÉ. La philosophie de Grothendieck nous dit que les « champs algébriques » se comportent comme les schémas. On peut donc y opérer des approximations diophantiennes. Les approximations diophantiennes dans le champ des G-torseurs, où G est un groupe algébrique, conduisent naturellement à des résultats sur la 1-cohomologie de G. Nous commencerons par montrer comment les approximations diophantiennes dans les G-gerbes permettent d'énoncer des résultats (du type « Principe de Hasse » par exemple) sur la 2-cohomologie de G. Nous poursuivrons ensuite en montrant comment les approximations diophantiennes dans les 2-champs et les 2-gerbes conduisent naturellement à des énoncés sur la 3-cohomologie. Les théorèmes obtenus unifient divers résultats partiels (de Moret-Bailly, Scheiderer et autres) se trouvant dans la littérature.

ABSTRACT. According to the Grothendieck philosophy, the algebraic stacks behave like the schemes. The diophantine approximations in the stack of G-torsors give results about the 1-cohomology of the algebraic group G. We first establish results (of the type "Hasse Principle" for example) about the 2-cohomology of an algebraic group G obtained by diophantine approximations in the G-gerbs. Next, we show that the diophantine approximations in the 2-gerbs and 2-stacks provide results about the 3-cohomology. Our general approach unifies several partial results of Moret-Bailly, Scheiderer and others.

1. Introduction

Soient K un corps global (*i.e.* un corps de nombres ou un corps de fonctions en une variable sur un corps fini), Σ un ensemble fini non vide de places de K. Notons K^Σ l'extension maximale de K (dans une clôture séparable fixée K^s) totalement décomposée en chaque place $v \in \Sigma$.

Pour fixer les idées, nous écrirons les résultats pour $\mathbb{Q}^{tr}$ (c'est-à-dire les nombres totalement réels: $K = \mathbb{Q}$, $\Sigma = \{\propto\}$, $K_\propto = \mathbb{R}$, $K^\Sigma = \mathbb{Q}^{tr}$) et pour $\mathbb{Q}^{tp}$ (c'est-à-dire les nombres totalement p-adiques: $K = \mathbb{Q}$, $\Sigma = \{p\}$, p premier, $K_p = \mathbb{Q}_p$, $K^\Sigma = \mathbb{Q}^{tp}$). Mais les résultats obtenus s'étendront (sauf dans le cas des groupes unipotents lorsque

Reçu le 18 janvier 2007 et, sous forme définitive, le 10 octobre 2007.

K est de caractéristique non nulle) aux corps K^Σ du type précédent, K^Σ remplaçant $\mathbb{Q}^{tr}$ ou $\mathbb{Q}^{tp}$.

Un premier résultat d'approximation diophantienne est obtenu par Moret-Bailly dans le $\mathbb{Q}^{tr}$-champ des G-torseurs (*cf.* [M-B, Théorème 6.2(ii)(a)]): *Si G est un $\mathbb{Q}^{tr}$-groupe algébrique connexe, l'application*

$$\beta : H^1(\mathbb{Q}^{tr}, G) \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}^{tr} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, G)$$

est bijective.

Précisons que $H^1(\mathbb{Q}^{tr} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, G)$ s'identifie à la limite inductive des ensembles $H^1(K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, G)$ où K parcourt les extensions finies de $\mathbb{Q}$ contenues dans $\mathbb{Q}^{tr}$. De plus,

$$K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{[K:\mathbb{Q}]} \simeq \prod_{K \hookrightarrow \mathbb{R}} \mathbb{R},$$

le produit étant indexé par les plongements de K dans $\mathbb{R}$.

Rappelons d'une part que $cd\big(\mathbb{Q}^{tr}(\sqrt{-1})\big) \leq 1$, *i.e.* la dimension cohomologique virtuelle de $\mathbb{Q}^{tr}$ est plus petite ou égale à 1. Le théorème principal de Scheiderer [Sc] redonne alors le résultat précédent de Moret-Bailly dans le cas de $\mathbb{Q}^{tr}$.

Dans la même lignée, on a d'autre part le résultat de Flicker-Scheiderer-Sujatha [FSS], qui généralise le théorème de T.A. Springer sur la dimension cohomologique plus petite ou égale à 1: *Si K est un corps de dimension cohomologique virtuelle plus petite ou égale à 1, pour L un K-lien localement représentable par un K-groupe algébrique (cf.* [Gi] *pour cette notion), l'application*

$$H^2(K, L) \longrightarrow \prod_{\substack{\text{plongements} \\ \text{de } K \text{ dans } \mathbb{R}}} H^2(\mathbb{R}, L)$$

est injective au sens non abélien, c'est-à-dire, si pour tout plongement de K dans $\mathbb{R}$, l'image dans $H^2(\mathbb{R}, L)$ d'une classe α de $H^2(K, L)$ est neutre, alors α est déjà neutre.

Le résultat de [FSS] s'applique en particulier à $K = \mathbb{Q}^{tr}$. Dans ce cas, l'idée naturelle est d'interpréter le résultat de Scheiderer cité plus haut et celui de [FSS] spécialisé au cas de $\mathbb{Q}^{tr}$ comme des résultats d'approximation dans les champs algébriques, en fait dans les gerbes pour celui de [FSS] (*cf.* l'exemple type ci-dessous), ce qui permettra deux extensions.

(A) Première extension. Remplacer $\mathbb{Q}^{tr}$ par $\mathbb{Q}^{tp}$ et, en particulier, étendre à $\mathbb{Q}^{tp}$ le résultat de [FSS]. Nous montrerons ainsi que si L est un $\mathbb{Q}^{tp}$-lien localement représentable par un $\mathbb{Q}^{tp}$-groupe algébrique, alors l'application

$$H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L) \longrightarrow \prod_{\substack{\text{plongements} \\ \text{de } \mathbb{Q}^{tp} \text{ dans } \mathbb{Q}_p}} H^2(\mathbb{Q}_p, L)$$

est injective au sens non abélien.

Pour le H^1, on retrouve le théorème 6.2(ii)(a) de [M-B] dans le cas particulier $K^\Sigma = \mathbb{Q}^{tp}$: *Pour G connexe,*

$$H^1(\mathbb{Q}^{tp}, G) \simeq H^1(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, G).$$

À remarquer que pour $\mathbb{Q}^{tp}$, il n'y a pas d'équivalence, *a priori*, de la propriété dimension cohomologique virtuelle de $\mathbb{Q}^{tr}$ plus petite ou égale à 1 et du théorème principal de [FSS].

(B) Deuxième extension. Étendre le résultat de [FSS] au cas H^3, d'abord sur $\mathbb{Q}^{tr}$, puis sur $\mathbb{Q}^{tp}$.

Exemple type d'approximation diophantienne dans les gerbes. Soit K un corps. La proposition $5.1(2)(i)$ de [DDM-B] établit que toute K-gerbe $\mathcal{G}$ (pour la topologie étale) qui est un champ de Deligne-Mumford est K-isomorphe à un champ quotient $\left[\frac{X}{SL_n}\right]$ pour un certain n, où X est un K-shéma lisse, géométriquement irréductible et, pour chaque extension k de K, chaque k-objet de $\mathcal{G}(k)$ se relève en un k-point de $X(k)$ via $X \longrightarrow \mathcal{G}$.

Prenons maintenant $K = \mathbb{Q}^{tr}$. Soient L un $\mathbb{Q}^{tr}$-lien localement représentable par un $\mathbb{Q}^{tr}$-groupe algébrique fini, et $\mathcal{G}$ une gerbe représentant une classe dans $H^2(\mathbb{Q}^{tr}, L)$. Alors $\mathcal{G}$ est une $\mathbb{Q}^{tr}$- gerbe de Deligne-Mumford à laquelle on peut précisement appliquer la proposition $5.1(2)(i)$ de [DDM-B]. Il existe un $\mathbb{Q}^{tr}$-schéma X lisse et géométriquement irréductible, un entier $n \geq 0$, une action à droite de $SL_n = SL_{n,\mathbb{Q}^{tr}}$ sur X, et un 1-morphisme $\pi : X \to \mathcal{G}$ tels que:

- π induit un isomorphisme de la gerbe quotient $\left[\dfrac{X}{SL_n}\right]$ vers $\mathcal{G}$,

- pour chaque extension k de $\mathbb{Q}^{tr}$, chaque objet de $\mathcal{G}(k)$ se relève en un point de $X(k)$ via π:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi"] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[ur, "x_1"] \arrow[r, "x"'] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Supposons que $\mathcal{G}$ admette une $\mathbb{R}$-section x (pour chaque plongement $\mathbb{Q}^{tr} \hookrightarrow \mathbb{R}$). Cette $\mathbb{R}$-section x se relève en une $\mathbb{R}$-section x_1 de X. Selon la méthode de F. Pop (*cf.* l'appendice de [Po] et aussi [M-B]), on approche alors au sens de la topologie réelle le $\mathbb{R}$-point x_1 par un $\mathbb{Q}^{tr}$-point de X qui induit à son tour un $\mathbb{Q}^{tr}$-point x_2 de $\mathcal{G}$. Le $\mathbb{Q}^{tr}$-point x_2 de $\mathcal{G}$ induit x par extension des scalaires, pour chaque plongement de $\mathbb{Q}^{tr}$ dans $\mathbb{R}$. Cette approximation diophantienne dans les gerbes sur $\mathbb{Q}^{tr}$ permet de retrouver le résultat de [FSS] dans le cas particulier où le corps de base est $\mathbb{Q}^{tr}$ et où le lien L est localement représentable par un $\mathbb{Q}^{tr}$-groupe algébrique fini.

2. Applications à la 2-cohomologie des groupes algébriques sur $\mathbb{Q}^{tp}$

Énonçons notre résultat principal dans le cas H^2.

Théorème 1. *Soit L un $\mathbb{Q}^{tp}$-lien localement représentable par un groupe algébrique. Supposons que $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L)$ est non vide. Alors l'application*

$$\beta = \beta_L : H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L) \to H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, L)$$

est bijective. De plus, si l'image par β d'une classe se réduit à une classe neutre dans $H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, L)$, alors cette classe est déjà neutre dans $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L)$ (auquel cas on dira que β est injective au sens non abélien).

Pour la définition d'un lien L, nous renvoyons à [Gi, Chap. IV-§2] et pour celle de $H^2(-, L)$, nous renvoyons à [Gi, Chap. IV-§3, définition 3.1.1].

Il s'avère que $H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, L)$ s'identifie à la limite inductive des ensembles $H^2(K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, L)$ où K parcourt les extensions finies de $\mathbb{Q}$ contenues dans $\mathbb{Q}^{tp}$. En particulier, comme $\mathbb{Q}$-algèbre, nous avons

$$K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \simeq \mathbb{Q}_p^{[K:\mathbb{Q}]} = \prod_{K \hookrightarrow \mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p,$$

où le produit est indexé par les plongements de K dans $\mathbb{Q}_p$.

Le théorème 1 implique, en particulier, que l'application composée

$$H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L) \xrightarrow{\beta} H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, L) \hookrightarrow \prod_{\mathbb{Q}^{tp} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p} H^2(\mathbb{Q}_p, L),$$

où le produit est indexé par les plongements de $\mathbb{Q}^{tp}$ dans $\mathbb{Q}_p$, est injective au sens non abélien.

Démonstration du Théorème 1. représentable par un groupe algébrique G. Nous montrerons le théorème 1 par dévissage de G en nous ramenant aux cas où L est localement représentable par:

- un groupe fini (via la proposition 1),
- un tore (via la proposition 2),
- un groupe semi-simple (via la proposition 3),
- un groupe unipotent.

Proposition 1. *Soit L un $\mathbb{Q}^{tp}$-lien localement représentable par un groupe fini. Supposons $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L)$ non vide. Alors l'application*

$$\beta = \beta_L : H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L) \longrightarrow H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, L)$$

est bijective et injective au sens non abélien.

Démonstration. (Injectivité au sens non abélien) Soit $\mathcal{G}$ une $\mathbb{Q}^{tp}$-gerbe représentant une classe de $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L)$. Alors $\mathcal{G}$ est une $\mathbb{Q}^{tp}$-gerbe de Deligne-Mumford parce que les automorphismes d'un objet quelconque de $\mathcal{G}$ sont finis. On procède comme dans l'exemple type de l'introduction et on obtient

$$\mathcal{G} \simeq \left[\frac{X}{SL_n}\right].$$

Supposons que $\mathcal{G}$ admette une $\mathbb{Q}_p$-section x (pour chaque plongement $\mathbb{Q}^{tp} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$). Cette $\mathbb{Q}_p$-section se relève en un $\mathbb{Q}_p$-point de X que l'on approche au sens de la topologie p-adique par un $\mathbb{Q}^{tp}$-point de X qui définit à son tour une $\mathbb{Q}^{tp}$-section de $\mathcal{G}$. La gerbe $\mathcal{G}$ est donc un élément neutre.

(Surjectivité) Si S est un schéma et L est un S-lien, alors l'ensemble $H^2(S, L)$, quand il est non vide, est un espace principal homogène sous $H^2\big(S, Z(L)\big)$, où $Z(L)$ désigne le centre de L; *cf.* [Gi, Chap. IV, Théorème 3.3.3(i)]. Nous sommes donc ramenés à montrer la surjectivité de $\beta_{Z(L)}$. Soit $\mathcal{G}_p$ une $\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$-gerbe liée par $Z(L)$. Appliquant une nouvelle fois la proposition 5.1(2) de [DDM-B], nous voyons que $\mathcal{G}_p$ s'écrit sous la forme d'un champ quotient

$$\mathcal{G}_p = \left[\frac{V}{SL_n}\right]$$

où V est un $\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$-espace homogène de SL_n dont les stabilisateurs sont isomorphes à $Z(L)$. On peut supposer que $Z(L)$ est central dans SL_n (ce qui revient à supposer que $Z(L)$ est de la forme μ_n). Le quotient $\frac{SL_n}{Z(L)}$ est donc un groupe semi-simple H. La classe de V appartient à $H^1(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, H)$. D'après le théorème 6.2(i) de [M-B], l'application

$$H^1(\mathbb{Q}^{tp}, H) \twoheadrightarrow H^1(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, H)$$

est surjective. Il existe donc un $\mathbb{Q}^{tp}$-espace principal homogène V' de H qui s'envoie sur V par l'application précédente. La classe de la $\mathbb{Q}^{tp}$-gerbe

$$\mathcal{G} = \left[\frac{V'}{SL_{n,\mathbb{Q}^{tp}}}\right]$$

appartient alors à $H^2\big(\mathbb{Q}^{tp}, Z(L)\big)$ et est envoyée sur la classe de $\mathcal{G}_p$ par $\beta_{Z(L)}$, d'où la surjectivité de $\beta_{Z(L)}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 1. $\square$

Proposition 2. *Supposons, dans le théorème* 1, *que* $L = T$, *où* T *est un* $\mathbb{Q}^{tp}$*-tore. Alors l'application* β_T *est un isomorphisme.*

Démonstration. Le groupe T est divisible. Soit T_n le noyau de la multiplication par n dans T:

$$1 \longrightarrow T_n \longrightarrow T \xrightarrow{\times n} T \longrightarrow 1.$$

Toute classe α de $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, T)$ est de n-torsion pour un certain n. Elle provient donc d'une classe de $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, T_n)$ à laquelle on peut appliquer la proposition 1 :

$$\begin{tikzcd}
H^1(\mathbb{Q}^{tp},T) \arrow[r, "\times n"] \arrow[d, "\simeq"'] & H^1(\mathbb{Q}^{tp},T) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & H^2(\mathbb{Q}^{tp},T_n) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"', "\text{(Prop. 1)}"] & H^2(\mathbb{Q}^{tp},T)_n \arrow[r] & 0 \\
H^1(\mathbb{Q}^{tp}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p,T) \arrow[r, "\times n"] & H^1(\mathbb{Q}^{tp}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p,T) \arrow[r] & H^2(\mathbb{Q}^{tp}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p,T_n) \arrow[r] & H^2(\mathbb{Q}^{tp}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p,T)_n \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Les deux premiers isomorphismes verticaux résultent du Théorème 6.2(ii)(a) de [M-B], le troisième, de la proposition 1. Il résulte du diagramme précédent que, pour tout entier n,

$$H^2(\mathbb{Q}^{tp}, T)_n \simeq H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, T)_n,$$

ce qui termine la preuve de la proposition 2. $\square$

Proposition 3. *Pour tout* $\mathbb{Q}^{tp}$*-lien* L *localement représentable par un groupe semi-simple* G, *l'application*

$$\beta = \beta_L : H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L) \longrightarrow H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} Q_p, L)$$

est bijective. De plus, toutes les classes de $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L)$ *sont neutres.*

Dans le cas où $G = \tilde{G}$ est simplement connexe, on sait par le théorème 5.1 de [Do2] (*cf.* aussi [Bo]) que si K est un corps de nombres, L un lien localement représentable par $\tilde{G}$, alors toutes les classes de $H^2(K, L)$ sont neutres ; on en déduit le même résultat pour $\mathbb{Q}^{tp}$ qui est une extension (infinie) de corps de nombres.

Démonstration de la proposition 3. Tout $\mathbb{Q}^{tp}$-lien L localement représentable par un groupe semi-simple G est représentable; *cf.* [Do1, Lemme 1.1.]. Rappelons la démonstration de ce lemme. Le groupe G est localement isomorphe au $\mathbb{Q}^{tp}$-groupe de Chevalley G_0 de même type que G. Le groupe G_0 est déployé sur $\mathbb{Q}^{tp}$. Tout $\mathbb{Q}^{tp}$-lien L localement représentable par G est aussi localement représentable par G_0, définissant de ce fait un élement de $H^1(\mathbb{Q}^{tp}, \mathrm{Out}(G_0))$. Or, la suite exacte

$$1 \longrightarrow (G_0)_{ad} \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_0) \overset{s}{\longrightarrow} \mathrm{Out}(G_0) \longrightarrow 1$$

admet un scindage s; *cf.* [DG, exposé XXIV, n° 3.10]. L'image de s dans $\mathrm{Aut}(G_0)$ est précisément constituée des éléments qui laissent invariant le quasi-épinglage de G_0. Le torseur L sous $\mathrm{Out}(G_0)$ définit donc par l'intermédiaire de s un torseur G_L sous $\mathrm{Aut}(G_0)$. Le groupe G_L est évidemment quasi-déployé et représente le lien L: $L = \mathrm{lien}(G_L)$.

Puisque $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L) = H^2(\mathbb{Q}^{tp}, G_L)$ (quand il est non vide) est un espace principal homogène sous $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, Z(G_L))$, à l'aide de la classe triviale $[\mathrm{Tors}\, G_L]$ dans $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, G_L)$, on peut identifier $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L)$ avec $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, Z(G_L))$ et l'application β_L est bijective d'après la proposition 1.

Pour démontrer la proposition 3, il reste donc à établir la neutralité de toute classe de $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L)$. Par ce qui a été dit juste avant la démonstration de la proposition 3, on sait déjà que cette neutralité est vraie si $G_L = \tilde{G}_L$ est simplement connexe.

Puisque G_L et $\mathrm{Int}\, G_L = (G_L)_{ad}$ sont connexes, nous avons les isomorphismes (*cf.* [M-B, Théorème 6.2(ii)(a)]):

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{Q}^{tp}, G_L) &\simeq H^1(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, G_L), \\ H^1(\mathbb{Q}^{tp}, \mathrm{Int}\, G_L) &\simeq H^1(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, \mathrm{Int}\, G_L), \end{aligned}$$

qui s'insèrent dans le diagramme (D) suivant, où les lignes horizontales sont celles de la suite exacte (2) de [Gi, Chap. IV, Proposition 3.2.6(iii)], et où le troisième isomorphisme résulte de la proposition 1:

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathbb{Q}^{tp}, G_L) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & H^1(\mathbb{Q}^{tp}, \mathrm{Int}\, G_L) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & H^2(\mathbb{Q}^{tp}, Z(G_L)) \arrow[d, "\simeq"'] \\ H^1(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, G_L) \arrow[r] & H^1(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, \mathrm{Int}\, G_L) \arrow[r] & H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}, Z(G_L)) \end{tikzcd} .$$

D'après le corollaire 3.1 de [Do2] (*cf.* aussi [Do1, Théorème 1.1] et [Bo]), toutes les classes de $H^2(\mathbb{Q}_p, L)$ sont neutres, donc toutes les classes de $H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, G_L)$ le sont aussi, d'où l'égalité

$$H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, G_L)' = H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, G_L)$$

où le symbole $'$ désigne le sous-ensemble des classes neutres. Il en résulte l'exactitude de la suite d'ensembles pointés (*cf.* [Gi, Chap. IV, Proposition 3.2.6(iii)]):

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathbb{Q}^{tp}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p, G_L) \arrow[r] & H^1(\mathbb{Q}^{tp}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p, \operatorname{Int} G_L) \arrow[r, two heads] & H^2(\mathbb{Q}^{tp}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p, G_L)' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ & & H^2(\mathbb{Q}^{tp}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p, G_L)\ . & \end{tikzcd}$$

Les applications horizontales de droite dans le diagramme (D) sont donc surjectives. En particulier, la surjectivité de la flèche

$$H^1(\mathbb{Q}^{tp}, \operatorname{Int} G_L) \longrightarrow H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L)$$

implique la neutralité de toutes les classes de $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L)$. La proposition 3 est ainsi établie. $\square$

Remarque 1. Supposons que $G = \tilde{G}$ est semi-simple et simplement connexe, et que le lien L est localement représentable par G. Alors $H^1(\mathbb{Q}_p, \tilde{G}_L) = 1$ et le diagramme (D) se réduit dans ce cas au suivant:

$$(D) \qquad \begin{tikzcd} & & H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L)' \arrow[d, equal] & \\ 1 \arrow[r] & H^1(\mathbb{Q}^{tp}, \operatorname{Int} \tilde{G}_L) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"'] & H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & 1 \\ 1 \arrow[r] & H^1(\mathbb{Q}^{tp}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p, \operatorname{Int} \tilde{G}_L) \arrow[r, "\simeq"] & H^2(\mathbb{Q}^{tp}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p, L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \\ & & H^2(\mathbb{Q}^{tp}\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p, L)'\ . & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Le lien L localement représentable par un $\mathbb{Q}^{tp}$-groupe algébrique est le produit d'un lien L_1 localement représentable par un groupe unipotent, d'un lien L_2 représentable par un groupe réductif connexe (voir la démonstration de la proposition 3), et d'un lien L_3 localement rerésentable par un groupe fini. Puisque nous sommes en caractéristique 0, $H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L_1)$ se réduit évidemment à une seule classe neutre. Le lien L_2 est le produit d'un lien représentable par un groupe semi-simple et d'un tore. Le cas du lien représentable par un groupe semi-simple a été réglé grâce à la proposition 3, et celui du tore par la proposition 2. Enfin le cas du lien L_3 localement représentable par un groupe fini a été réglé grâce à la proposition 1. $\square$

Traduction du théorème 1 dans le cadre des modules croisés. Plaçons-nous dans le cadre de la théorie de Breen [Br1].

(A) Considérons le $\mathbb{Q}^{tp}$-module croisé $(G \to \operatorname{Aut} G)$ associé à un $\mathbb{Q}^{tp}$-groupe algébrique G. Ceci a pour effet de considérer non plus les classes de L-gerbes comme dans le $H^2(L)$ de Giraud, mais l'ensemble $H^1(\mathbb{Q}^{tp}, G \to \operatorname{Aut} G)$ des classes de G-gerbes introduit dans [Br1]. Breen définit au no 6 de [Br1] la notion de $(G \to \operatorname{Aut} G)$-torseur, *i.e.* de torseur sous l'action du gr-champ $(G \to \operatorname{Aut} G)^\sim$ associé au module croisé $(G \to \operatorname{Aut} G)$. Il interprète ensuite $(G \to \operatorname{Aut} G)^\sim$ comme le gr-champ des auto-équivalences du champ Tors G; *cf.* [Br3, Lemme 1.4 ou Proposition 1.6(ii)] ou encore [Br1, Proposition 7.3]. Puisqu'une G-gerbe quelconque est localement équivalente à la gerbe Tors G, une G-gerbe peut donc être vue comme un $(G \to \operatorname{Aut} G)$-torseur.

(B) Le gr-champ $(G \to \operatorname{Aut} G)^{\sim}$ étant anti-équivalent au gr-champ Bitors (G) des G-bitorseurs (*cf.* [Br3, Proposition 1.6 (ii)] ou [Br1, Proposition 4.3]), une G-gerbe peut donc aussi être vue comme un Bitors (G)-torseur.

(C) Pour un lien L localement isomorphe au lien G, l'ensemble $H^2(L)$ s'envoie surjectivement sur la fibre en $[L]$ de l'application

$$H^1(G \to \operatorname{Aut} G) \longrightarrow H^1(\operatorname{Out} G);$$

cf. [Br1, n° 7.7]. Cette fibre est isomorphe à $\dfrac{H^2(L)}{\operatorname{Aut}(L)}$ et un de ses éléments est une classe d'équivalence de gerbes dont le lien est isomorphe à L et non égal à L comme c'est le cas dans le $H^2(L)$.

(D) Énonçons maintenant le théorème suivant qui peut être vu comme une forme (faible) du théorème 1.

Théorème $1'$. *Supposons que G est un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique. Alors l'application*

$$\beta : H^1(\mathbb{Q}^{tp}, G \longrightarrow \operatorname{Aut} G) \longrightarrow H^1(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, G \to \operatorname{Aut} G)$$

est surjective et injective (au sens non abélien).

Démonstration. (Injectivité au sens non abélien) Soit $\mathcal{G}$ une G-gerbe représentant une classe de $H^1(\mathbb{Q}^{tp}, G \to \operatorname{Aut} G)$. Elle est définie sur une certaine extension finie de $\mathbb{Q}$ contenue dans $\mathbb{Q}^{tp}$ que l'on peut par exemple supposer égale à $\mathbb{Q}$ (en changeant les notations). Soit $\mathcal{G}_p$ la $\mathbb{Q}_p$-gerbe déduite de $\mathcal{G}$ par un plongement de $\mathbb{Q}^{tp}$ dans $\mathbb{Q}_p$. Supposons que, pour tout plongement de $\mathbb{Q}^{tp}$ dans $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{G}_p$ admette une section σ_p. Alors $\mathcal{G}_p$ est équivalente à la $\mathbb{Q}_p$-gerbe des torseurs $\operatorname{Tors}(G'_p)$ où G'_p est une forme de $G\big/ \operatorname{Spec} \mathbb{Q}_p$. Soit Ω_p l'ouvert pour la topologie p-adique constitué des objets de $\mathcal{G}_p$ isomorphes à l'objet $\sigma_p(\operatorname{Spec} \mathbb{Q}_p)$. (Cet ouvert est décrit dans [M-B, remarque 2.4.1 (iii)]). De manière générale, pour tout G'_p-torseur X sur $\mathbb{Q}_p$,

$$\operatorname{Iso}(X) := \{Y \in \operatorname{ob}(\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p)/Y \simeq X\}$$

est un ouvert de $\mathcal{G}_p(\mathbb{Q}_p)$, ce qui résulte du fait suivant: si S est un $\mathbb{Q}_p$-schéma et Y est un G'_S-torseur de $\mathcal{G}_p$, le faisceau

$$I := \operatorname{Isom}_{\mathcal{G}_p(S)}(\sigma_p(\operatorname{Spec}\ \mathbb{Q}_p)_S, Y)$$

est un S-schéma, de sorte que l'image de $I(\mathbb{Q}_p)$ dans $S(\mathbb{Q}_p)$ est un ouvert constitué de l'ensemble des $s \in S(\mathbb{Q}_p)$ tels que $Y_s \in \operatorname{Iso}(\sigma_p(\operatorname{Spec}\ \mathbb{Q}_p))$.

Le triplet $(\mathcal{G} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Q}_p, p, \Omega_p)$ constitue alors une donnée de Skolem (incomplète) au sens de [M-B] avec $\mathcal{G}$ lisse et géométriquement irréductible. D'après [M-B, Théorème 0.7], elle admet un $\mathbb{Q}^{tp}$-point, donc est neutre.

(Surjectivité) Introduisons le 2-champ (évidemment algébrique)

$$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}} = \left[\frac{\operatorname{Spec} \mathbb{Q}}{G \to \operatorname{Aut} G}\right] \simeq \left[\frac{\operatorname{Spec} \mathbb{Q}}{\operatorname{Bitors}(G)}\right]$$

des $(G \to \operatorname{Aut} G)$-torseurs au sens de la définition 6.1 de [Br1]. C'est aussi le 2-champ des G-gerbes comme on l'a dit plus haut. Supposons donnée une $\mathbb{Q}_p$-gerbe $\mathcal{G}_p$ *i.e.* un $\mathbb{Q}_p$-$(G \to \operatorname{Aut} G)$-torseur $\mathcal{G}_p$. En adaptant la méthode des numéros 4.1 et 4.2 de la preuve du théorème 0.7 de [M-B], on approche, dans la 2-gerbe $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$, le $(G \to \operatorname{Aut} G)$-torseur $\mathcal{G}_p$ par un $(G \to \operatorname{Aut} G)$-torseur sur $\mathbb{Q}^{tp}$ *i.e.* par une $\mathbb{Q}^{tp}$-gerbe. Donc β est surjective. On étend ainsi la méthode utilisée dans la partie (b) de la démonstration de la proposition 1. $\square$

Remarque 2. Pour montrer la surjectivité de

$$\beta_L : H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L) \longrightarrow H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, L)$$

dans le théorème 1, on peut aussi partir du fait que

$$H^2(\mathbb{Q}^{tp}, L) \qquad (\text{resp. } H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, L))$$

est un espace principal homogène sous

$$H^2(\mathbb{Q}^{tp}, Z(L)) \qquad (\text{resp. } H^2(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, Z(L))).$$

Le centre $Z(L)$ de L est défini sur une extension finie de $\mathbb{Q}$ contenue dans $\mathbb{Q}^{tp}$ que l'on peut supposer égale à $\mathbb{Q}$. On peut alors appliquer la démonstration précédente au champ $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}} = \left[\dfrac{\operatorname{Spec} \mathbb{Q}}{Z(L) \to 1}\right]$ au lieu du champ $\left[\dfrac{\operatorname{Spec} \mathbb{Q}}{G \to \operatorname{Aut} G}\right]$. En effet, soit $\mathcal{G}_p$ une $\mathbb{Q}_p$-gerbe liée par $Z(L)$. Elle peut être vue comme un $\big(Z(L) \to 1\big)$-torseur sur $\mathbb{Q}_p$ et on procède comme ci-dessus pour établir l'existence d'une $\mathbb{Q}^{tp}$-gerbe $\mathcal{G}$ liée par $Z(L)$ et induisant $\mathcal{G}_p$ sur $\mathbb{Q}_p$.

Remarque 3. En vertu de la remarque 2, le découpage de $H^1(\mathbb{Q}^{tp}, G \to \operatorname{Aut} G)$ en fibres indexées par $H^1(\operatorname{Out} G)$ permet de montrer que l'application β dans le théorème $1'$ est en fait bijective.

3. Applications à la 3-cohomologie des groupes algébriques sur $\mathbb{Q}^{tp}$ (resp. $\mathbb{Q}^{tr}$)

De la même façon que les G-torseurs forment une gerbe $\operatorname{Tors} G$, les $(G \to \operatorname{Aut} G)$-torseurs (à droite) considérés précédemment dans la section 2 forment une 2-gerbe $\operatorname{Tors}(G \to \operatorname{Aut} G)$. Dans [Br2, no 4.1], Breen s'intéresse aux 2-champs qui sont localement isomorphes à $\operatorname{Tors}(G \to \operatorname{Aut} G)$ ou encore à $\operatorname{Tors}(\operatorname{Bitors} G)$; ce sont les 2-$(G \to \operatorname{Aut} G)$-gerbes. Elles sont classifiées par l'ensemble

$$H^1\big((G \to \operatorname{Aut} G) \;\longrightarrow\; \mathcal{E}_q(G \to \operatorname{Aut} G)\big),$$

où $\mathcal{E}_q(G \to \operatorname{Aut} G)$ représente le 2-gr-champ des automorphismes du module croisé $(G \to \operatorname{Aut} G)$.

Théorème 2. *Soit G un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique. Alors les applications*

$$\beta : H^1\big(\mathbb{Q}^{tp}, (G \to \operatorname{Aut} G) \longrightarrow \mathcal{E}_q\big(G \to \operatorname{Aut} G)\big) \longrightarrow H^1\big(\mathbb{Q}^{tp} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, (G \to \operatorname{Aut} G) \longrightarrow \mathcal{E}_q(G \to \operatorname{Aut} G)\big)$$

respectivement

$$\beta : H^1\big(\mathbb{Q}^{tr}, (G \to \operatorname{Aut} G) \longrightarrow \mathcal{E}_q\big(G \to \operatorname{Aut} G)\big)$$
$$\longrightarrow H^1\big(\mathbb{Q}^{tr} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p, (G \to \operatorname{Aut} G) \longrightarrow \mathcal{E}_q(G \to \operatorname{Aut} G)\big)$$

sont surjectives et injectives dans le sens suivant: si l'image par β d'une classe α est neutre, (*c'est-à-dire représentée par une* 2-$(G \to \operatorname{Aut} G)$-*gerbe qui admet une section ou de manière équivalente par une* 2-*gerbe de la forme* $\operatorname{Tors}(G' \to \operatorname{Aut} G')$, *avec* G' *une forme de* G, *ou encore de la forme* $\operatorname{Tors}(\operatorname{Bitors} G')$), *alors α est déjà neutre.*

Démonstration. (Injectivité) Soit $K = \mathbb{Q}^{tp}$ ou $\mathbb{Q}^{tr}$. Soient $\underline{\mathcal{G}}$ une 2-G-gerbe représentant une classe de

$$H^1\big(K, (G \to \operatorname{Aut} G) \to \mathcal{E}_q(G \to \operatorname{Aut} G)\big)$$

et $\underline{\mathcal{G}}_p$ la $\mathbb{Q}_p$-2-gerbe déduite de $\mathcal{G}$ par un prolongement de $K = \mathbb{Q}^{tp}$ dans $\mathbb{Q}_p$. Supposons que, pour tout plongement de $\mathbb{Q}^{tp}$ dans $\mathbb{Q}_p$, l'image $\underline{\mathcal{G}}_p$ de $\underline{\mathcal{G}}$ admette une section σ_p. Alors $\underline{\mathcal{G}}_p$ est équivalente à la $\mathbb{Q}_p$-2-gerbe

$$\operatorname{Tors}(G' \to \operatorname{Aut} G') \simeq \operatorname{Tors}(\operatorname{Bitors} G')$$

où G' est une $\mathbb{Q}_p$-forme de G. On procède alors comme dans la démonstration de l'injectivité du théorème $1'$. Soit Ω_p l'ouvert pour la topologie p-adique constitué des objets de $\underline{\mathcal{G}}_p$ isomorphes à $\sigma_p(\operatorname{Spec} \mathbb{Q}_p)$. Alors

$$(\underline{\mathcal{G}} \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Q}, p, \Omega_p)$$

constitue une donnée de Skolem (incomplète) au sens de [M-B]: elle admet un $\mathbb{Q}^{tp}$-point, donc est neutre. Par conséquent, la 2-gerbe $\underline{\mathcal{G}}$ est $\mathbb{Q}^{tp}$-équivalente à la $\mathbb{Q}^{tp}$-2-gerbe $\operatorname{Tors}(\operatorname{Bitors} G')$ (le 2-champ $\operatorname{Tors}(\operatorname{Bitors} G')$ remplace ici le champ $\operatorname{Tors} G'$ de la démonstration de l'injectivité de β dans le théorème $1'$).

(Surjectivité) On procède de la même manière que pour établir la surjectivité de β dans le théorème $1'$, en remplaçant le 2-champ $\mathcal{X} = \left[\dfrac{\operatorname{Spec} \mathbb{Q}}{G \to \operatorname{Aut} G}\right]$ des $(G \to \operatorname{Aut} G)$-torseurs par le 3-champ

$$\left[\frac{\operatorname{Spec} \mathbb{Q}}{(G \to \operatorname{Aut} G) \to \mathcal{E}_q(G \to \operatorname{Aut} G)}\right] \simeq \left[\frac{\operatorname{Spec} \mathbb{Q}}{\text{Bitors(Bitors}G)}\right]$$

des $\big((G \to \operatorname{Aut} G) \longrightarrow \mathcal{E}_q(G \to \operatorname{Aut} G)\big)$-torseurs. $\square$

Remerciements. L'auteur tient à remercier l'arbitre pour son aide et ses observations.

RÉFÉRENCES

[Bo] M. Borovoi, *Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology*, Duke Math. J. **72** (1993), no. 1, 217–239.

[Br1] L. Breen, *Bitorseurs et cohomologie non abélienne*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 401–476, Progr. Math., **86**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Br2] L. Breen, *Théorie de Schreier supérieure*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 5, 465–514.

[Br3] L. Breen, *On the classification of* 2*-gerbes and* 2*-stacks*, Astérisque No. 225 (1994), Société Mathématique de France, 160 pp.

[DDM-B] P. Dèbes, J.-C. Douai et L. Moret-Bailly, *Descent varieties for algebraic covers*, J. reine angew. Math. **574** (2004), 51–78.

[DG] M. Demazure et A. Grothendieck, Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie, 1963-1964, Lectures Notes in Mathematics **151-153**, Springer-Verlag 1970.

[Do1] J.-C. Douai, 2*-cohomologie galoisienne des groupes semi-simples définis sur les corps locaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **280** (1975), no. 6, Aii, A321–A323.

[Do2] J.-C. Douai, *Cohomologie galoisienne des groupes semi-simples définis sur les corps globaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **281** (1975), no. 24, Ai, A1077–A1080.

[FSS] Y. Z. Flicker, C. Scheiderer et R. Sujatha, *Grothendieck's theorem on non-abelian H^2 and local-global principles*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), no. 3, 731–750.

[Gi] J. Giraud, *Cohomologie non abélienne*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **179**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, ix+467 pp.

[M-B] L. Moret-Bailly, *Problèmes de Skolem sur les champs algébriques*, Compositio Math. **125** (2001), no. 1, 1–30.

[Po] F. Pop, *Embedding problems over large fields*, Ann. of Math. (2) **144** (1996), no. 1, 1–34.

[Sc] C. Scheiderer, *Hasse principles and approximation theorems for homogeneous spaces over fields of virtual cohomological dimension one*, Invent. Math. **125** (1996), no. 2, 307–365.

J.-C. DOUAI, UFR DE MATHÉMATIQUES, CNRS UMR 8524, U. DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE, F–59665, VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE.
douai@math.univ − lille1.fr