Ann. Sci. Math. Québec **29** (2005), no. 2, 111–129.

SUR LES UNITÉS DE CERTAINS CORPS DE NOMBRES DE DEGRÉ 8 SUR Q

ABDELMALEK AZIZI

RÉSUMÉ. Soit **K** un corps de nombres, abélien, imaginaire et de degré 8 sur **Q**, et $\mathbf{K}_0$ son sous-corps réel maximal. Nous donnons un critère déterminant un système fondamental d'unités de **K** en utilisant un système fondamental d'unités de $\mathbf{K}_0$.

ABSTRACT. Let **K** be an imaginary abelian number field of degree 8 over **Q** and $\mathbf{K}_0$ its maximal real subfield. We give a criterion which determines a fundamental system of units of **K** using a fundamental system of units of $\mathbf{K}_0$.

1. Introduction. Soient **K** une extension finie, imaginaire et abélienne sur **Q**, $\mathbf{K}_0$ le sous-corps réel maximal de **K**, **E** (resp. $\mathbf{E}_0$) le groupe des unités de **K** (resp. $\mathbf{K}_0$), **W** le groupe des racines de l'unité contenues dans **K**, w le cardinal de **W**, 2^{j_0} la plus grande puissance de 2 divisant w, ξ une racine primitive 2^{j_0}-ième de l'unité, $\mathbf{L} = \mathbf{K}(\sqrt{\xi})$ et $\mathbf{L}_0$ son sous-corps réel maximal. Il est connu que l'indice du groupe $\mathbf{WE}_0$ dans le groupe **E** est égal à 1 ou à 2. Ce qui veut dire qu'un système fondamental d'unités SFU de $\mathbf{K}_0$ est aussi un SFU de **K** dans le premier cas, tandis que les deux systèmes diffèrent dans le deuxième cas. Le théorème suivant (voir [7], §21, Satz 15), nous donne une condition nécessaire et suffisante pour que cet indice soit égal à 2.

Théorème 1. *Soit Q l'indice de $\mathbf{WE}_0$ dans **E**. Alors on a :*

1) $Q = 1$ *ou* $Q = 2$ *;*
2) $Q = 2$ *ssi il existe* $\varepsilon \in \mathbf{E}_0$ *tel que* $\mathbf{L}_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{\varepsilon})$.

Dans [3], nous avons donné un critère qui permet de déterminer un SFU de **K** à partir d'un SFU de $\mathbf{K}_0$. Le problème revient à chercher l'existence d'une unité $\varepsilon \in \mathbf{K}_0$ telle que $\beta\varepsilon$ soit un carré dans $\mathbf{K}_0$, où $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$. Dans le présent travail, on donne des algorithmes et des résultats qui vont nous permettre de déterminer un SFU pour certains corps de nombres de degré 8 sur **Q**. On trouve d'autres résultats relatifs à ces questions dans [2,4,5,6].

2. Généralités. Soient $\mathbf{K}_0$ un corps de nombres réels, β un nombre positif de $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$ une extension quadratique de $\mathbf{K}_0$, abélienne et finie sur **Q** et $\mathbf{I} = \{0, 1\}$. Soient j le plus grand entier tel qu'il existe une racine primitive 2^j-ième de l'unité ξ

Reçu le 30 mai 2003 et, sous forme définitive, le 27 janvier 2004.

appartenant à $\mathbf{K}$, $\mathbf{L} = \mathbf{K}(\sqrt{\xi})$, $\mathbf{L}_0$ le sous-corps réel maximal de $\mathbf{L}$, $\mathbf{E}$ le groupe des unités de $\mathbf{K}$, $\mathbf{E}_0$ le groupe des unités de $\mathbf{K}_0$ et $\mathbf{W}$ le groupe des racines de l'unité appartenant à $\mathbf{K}_0$.

On sait, d'après le théorème 1, que $Q = [\mathbf{E} : \mathbf{WE_0}]$ est égal à 1 ou 2 et Q est égal à 2 si et seulement s'il existe une unité ε dans $\mathbf{K}_0$ tel que $\mathbf{L}_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{\varepsilon})$. D'autre part, comme il est bien connu, pour tout $j \geq 2$, il existe deux nombres réels μ_j et λ_j tels que $\xi = (\mu_j + \lambda_j\sqrt{-1})/2 = (\mu_j + \lambda_j i)/2$, où

$$\mu_2 = 0, \quad \lambda_2 = 2, \quad \mu_3 = \lambda_3 = \sqrt{2}, \quad \mu_j = \sqrt{2 + \mu_{j-1}}, \quad \lambda_j = \sqrt{2 - \mu_{j-1}}.$$

De plus, on a

$$\mu_j\lambda_j = \lambda_{j-1}, \quad \mathbf{Q}(\xi) = \mathbf{Q}(i, \mu_j) = \mathbf{Q}(i, \lambda_j) \quad \text{et} \quad \mathbf{Q}(\mu_j) = \mathbf{Q}(\lambda_j).$$

Le corps $\mathbf{Q}(\mu_j)$ est le sous-corps réel maximal de $\mathbf{Q}(\xi)$ et le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{2 + \mu_j})$ est le sous-corps réel maximal de $\mathbf{Q}(\sqrt{\xi})$. Par suite, on a $\mathbf{L}_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{2 + \mu_j})$.

Remarque 2. Le nombre $\mu_{j+1} = \sqrt{2 + \mu_j}$ n'appartient pas à $\mathbf{K}_0$, car sinon, λ_{j+1} appartient aussi à $\mathbf{K}_0$ (vu que $\mu_{j+1}\lambda_{j+1} = \lambda_j \in \mathbf{K}_0$) et comme pour $j \geq 2$, le nombre $i \in \mathbf{K}$, alors $\sqrt{\xi} = (\mu_{j+1} + \lambda_{j+1} i)/2 \in \mathbf{K}$. Mais ceci n'est pas le cas.

Proposition 3. *Soient $\mathbf{K}_0$ un corps de nombres réels, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-1})$ une extension quadratique de $\mathbf{K}_0$, abélienne et finie sur $\mathbf{Q}$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ un SFU de $\mathbf{K}_0$ (dont les unités sont toutes positives). Alors on a :*

1) *S'il existe une unité ε de $\mathbf{K}_0$ de la forme $\varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}\cdots\varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}}\varepsilon_r$ (à une permutation près), où les $j_k \in \mathbf{I}$, telle que $(2 + \mu_j)\varepsilon$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{\xi\varepsilon}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$;*
2) *Dans le cas contraire, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.*

Preuve. Voir [3]. □

Proposition 4. *Soient $\mathbf{K}_0$ un corps de nombres réels, β est un nombre positif de $\mathbf{K}_0$, sans facteurs carrés et tel que $\sqrt{\beta} \notin \mathbf{K}_0$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$ une extension quadratique de $\mathbf{K}_0$, abélienne et finie sur $\mathbf{Q}$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ un SFU de $\mathbf{K}_0$. On suppose que les unités ε_j sont positives. Alors on a :*

1) *S'il existe une unité de $\mathbf{K}_0$ de la forme $\varepsilon = \varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}\cdots\varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}}\varepsilon_r$ (à une permutation près), où les $j_k \in \mathbf{I}$, telle que $\beta\varepsilon$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{-\varepsilon}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$;*
2) *Dans le cas contraire, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.*

Preuve. Voir [3]. □

SFU de certains corps de la forme $\mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$. Soient $\mathbf{K}_0$ un corps de nombres réels et β un entier de $\mathbf{K}_0$ positif et sans facteurs carrés tels que $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$ est une extension abélienne finie de $\mathbf{Q}$. Si un SFU de $\mathbf{K}_0$ est connu, alors les deux propositions précédentes constituent une méthode pour déterminer un SFU de $\mathbf{K}$. En particulier, si $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{n_1}, \sqrt{n_2}, \dots, \sqrt{n_t})$ où les $n_j \in \mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$ et β est un entier de $\mathbf{K}_0$ positif et sans facteurs carrés, on détermine un SFU de $\mathbf{K}$ comme suit :

Étape 1. *Détermination d'un SFU de* $\mathbf{K}_0$. On suppose que t est supérieur à 2. Soient σ_1 et σ_2 deux éléments d'ordre 2 et distincts du groupe de Galois de $\mathbf{K}_0$ sur $\mathbf{Q}$, $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ et $\mathbf{K}_3$ les sous-corps de $\mathbf{K}_0$ invariants respectivement par σ_1, σ_2 et $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2$, $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ et $\mathbf{E}_3$ les groupes des unités correspondant respectivement à $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ et $\mathbf{K}_3$ et ε une unité de $\mathbf{K}_0$. Alors on a

$$\varepsilon^2 = \varepsilon\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon\varepsilon^{\sigma_2}(\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2})^{-1},$$

avec

$$\varepsilon\varepsilon^{\sigma_1} \in \mathbf{E}_1, \quad \varepsilon\varepsilon^{\sigma_2} \in \mathbf{E}_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2} \in \mathbf{E}_3.$$

Il s'ensuit que le groupe des unités de $\mathbf{K}_0$ est engendré par les éléments des trois systèmes fondamentaux des unités de $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ et $\mathbf{K}_3$ en plus des racines carrées de ces éléments et de leurs produits appartenant à $\mathbf{K}_0$.

Dans [12], H. Wada donne un algorithme qui transforme la propriété d'être un carré dans $\mathbf{K}_0$ en une propriété semblable dans le corps $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2 \cap \mathbf{K}_3$. Ceci permet, étapes par étapes, de déterminer un SFU de $\mathbf{K}_0$.

Étape 2. *Détermination d'un SFU de* $\mathbf{K}$. Soit $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ un SFU de $\mathbf{K}_0$ dont toutes les unités sont positives.

A) **Cas où $\beta = 1$.**

a) Déterminer le plus grand entier j_0 tel qu'il existe une racine primitive 2^{j_0}-ième de l'unité ξ appartenant à $\mathbf{K}$. Dans ce cas, on aura

$$\sqrt{\xi} = (\sqrt{2 + \mu_{j_0}} + i\sqrt{2 - \mu_{j_0}})/2\,;$$

b) Déterminer s'il existe une unité ε de $\mathbf{K}_0$ de la forme $\varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}\cdots\varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}}\varepsilon_r$, avec les $j_k \in \mathbf{I}$, telle que $(2 + \mu_{j_0})\varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}\cdots\varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}}\varepsilon_r$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$. Dans le cas où la réponse pour b) est oui, alors un SFU de $\mathbf{K}$ est $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{\xi\varepsilon}\}$. Autrement, $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.

B) **Cas où $\beta \neq 1$.**
On suppose de plus que $\sqrt{\beta} \notin \mathbf{K}_0$, sinon on se ramène au cas $\beta = 1$. Le seul point à régler, dans ce cas, est le suivant : Existe-t-il une unité ε de la forme $\varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}\cdots\varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}}\varepsilon_r$ avec les $j_k \in \mathbf{I}$ telle que $\beta\varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}\cdots\varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}}\varepsilon_r$ soit un carré dans $\mathbf{K}_0$? Si la réponse est oui, alors un SFU de $\mathbf{K}$ est $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{-\varepsilon}\}$. Dans le cas contraire, $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.

Remarques 5. 1) Ce procédé se laisse appliquer en particulier à un corps de la forme

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}\left(\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_t}, \sqrt{-d_1}, \dots, \sqrt{-d_s}\right),$$

où les n_j et les d_j sont des entiers naturels. En effet, on a

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}\left(\sqrt{n_1}, \dots, \sqrt{n_t}, \sqrt{d_1 d_2}, \dots, \sqrt{d_1 d_s}\right)\left(\sqrt{-d_1}\right).$$

Par suite, nous pouvons appliquer notre méthode.

2) Cette méthode constitue une amélioration de l'algorithme de Wada. En effet, elle réduit l'utilisation de l'algorithme de Wada uniquement au sous-corps réel maximal $\mathbf{K}_0$ de $\mathbf{K}$. Ceci permet d'écarter certains cas au cours de la recherche d'un SFU de $\mathbf{K}_0$ en utilisant des normes bien choisies.

Applications.

1) SFU de $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$ où d est un entier naturel sans facteurs carrés. Soit $\varepsilon_0 = s + t\sqrt{d}$ l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$.

i) Si ε_0 est de norme -1, alors $\{\varepsilon_0\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$. En effet, on a $\{\varepsilon_0\}$ est un SFU du sous-corps réel maximal de $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$. Un SFU de $\mathbf{K}$ est $\{\varepsilon_0\}$ ou bien $\{\sqrt{i\varepsilon}\}$, où $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $2\varepsilon_0$ est un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$, le sous-corps réel maximal de $\mathbf{K}$. Comme ε_0 est de norme -1, alors en utilisant la norme sur $\mathbf{Q}$, on remarque que $2\varepsilon_0$ ne peut pas être un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$. D'où $\{\varepsilon_0\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$;

ii) Si ε_0 est de norme 1, alors $\{\sqrt{i\varepsilon_0}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$ si et seulement si $s \pm 1$ est un carré dans $\mathbf{N}$ (i.e. si et seulement si $s + 1$ ou $s - 1$ est un carré dans $\mathbf{N}$). Dans le cas contraire, $\{\varepsilon_0\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$. En effet, le problème revient à voir si $2\varepsilon_0$ est un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ ou non. Or

$$2\varepsilon_0 = (a_0 + a_1\sqrt{d})^2 \Longleftrightarrow \begin{cases} 2s = a_0^2 + da_1^2\,, \\ 2t = 2a_0a_1. \end{cases}$$

Comme $s^2 - dt^2 = 1$, alors le dernier système est résoluble si et seulement si $s \pm 1$ est un carré dans $\mathbf{N}$. Un exemple numérique pour ce cas est le corps $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(e^{2\pi i/12}) = \mathbf{Q}(\sqrt{3}, i)$. On a que $\varepsilon_0 = 2 + \sqrt{3}$. Donc $s = 2$ et $s - 1 = 1$ est un carré dans $\mathbf{N}$. Par suite, $\{\sqrt{i\varepsilon_0}\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{3}, i)$ qui est un corps cyclotomique.

2) SFU de $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{-d})$, où $n,\ d \in \mathbf{N}^*$ et où d est différent de n et de 1. Soit $\varepsilon_0 = s + t\sqrt{n}$ l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$. Dans ce cas, le problème de déterminer un SFU de $\mathbf{K}$ revient à savoir quand est-ce que $d\varepsilon_0$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$. De la même façon que dans le cas $d = 1$, on a :

i) Si ε_0 est de norme -1, alors $\{\varepsilon_0\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$;

ii) Si ε_0 est de norme 1, alors $\{\sqrt{-\varepsilon_0}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$ si et seulement si $2d(s \pm 1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$. Dans le cas où $2d(s \pm 1)$ n'est pas un carré dans $\mathbf{N}$, $\{\varepsilon_0\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.

3) SFU du corps cyclotomique $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i)$. Soient $\varepsilon_0 = 1 + \sqrt{2}$, $\varepsilon_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $\varepsilon_2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Alors on a $\sqrt{\varepsilon_1} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})/2$, $\sqrt{\varepsilon_2} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ et $\{\varepsilon_0, \sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_2}\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Comme $\sqrt{2} \in \mathbf{K}$, d'après la proposition 3, le problème de déterminer un SFU de $\mathbf{K}$ revient à savoir s'il existe une unité ε de la forme $\varepsilon_1'^{j_1}\varepsilon_2'^{j_2}\varepsilon_3'$ telle que $(2+\sqrt{2})\varepsilon_1'^{j_1}\varepsilon_2'^{j_2}\varepsilon_3'$ soit un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, où $\{\varepsilon_1', \varepsilon_2', \varepsilon_3'\} = \{\varepsilon_0, \sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_2}\}$. D'après la preuve de la proposition 3, $\sqrt{\xi_3\varepsilon}$ appartient à $\mathbf{K}$ si et seulement si $\sqrt{(2 + \sqrt{2})\varepsilon}$ appartient à $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, où $\sqrt{\xi_3} = \left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)\Big/ 2$ et ε est une unité de

$\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Comme on a

$$\sqrt{\xi_3\sqrt{\varepsilon_2}\sqrt{\varepsilon_1}\varepsilon_0} = \frac{4+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}+2i+i\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{4} \in \mathbf{K},$$

alors $(2+\sqrt{2})\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ est un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Par suite, $\{\varepsilon_0, \sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\xi_3\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_0}}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$. Ces résultats sont les mêmes que ceux donnés par Wada dans [12].

3. Unités de $\mathbf{K}_{n,m}$. Soient n et m deux entiers naturels différents et sans facteurs carrés, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{n,m} = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m}, i)$, $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})$, ε_1 (resp. $\varepsilon_2, \varepsilon_3$) l'unité fondamentale de $\mathbf{k}_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{n})$ (resp. $\mathbf{k}_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{nm})$), $\mathbf{J} = \{-1, +1\}$ et $\mathbf{I} = \{0, 1\}$. On suppose que ε_1 et ε_2 sont de norme -1 et $\varepsilon_3 = x + y\sqrt{nm}$, où x est un entier ou bien un demi-entier et y est un élément de $\mathbf{Q}$. On désigne par N_1 (resp. N_2, N_3) la norme de $\mathbf{K}_0$ sur $\mathbf{k}_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{n})$ (resp. $\mathbf{k}_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{nm})$) et par τ_1 et τ_2 les automorphismes de $\mathbf{K}_0$ définis par

$$\tau_1(\sqrt{n}) = -\sqrt{n}, \quad \tau_1(\sqrt{m}) = \sqrt{m}, \quad \tau_2(\sqrt{n}) = \sqrt{n} \quad \text{et} \quad \tau_2(\sqrt{m}) = -\sqrt{m}.$$

Soit ε une unité de $\mathbf{K}_0$. D'après [12] on a que, $\varepsilon^2 = \varepsilon\varepsilon^{\tau_1}\varepsilon\varepsilon^{\tau_2}(\varepsilon^{\tau_1}\varepsilon^{\tau_2})^{-1}$ où $\varepsilon\varepsilon^{\tau_1}$ est une unité de $\mathbf{k}_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$, $\varepsilon\varepsilon^{\tau_2}$ est une unité de $\mathbf{k}_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{n})$ et $\varepsilon^{\tau_1}\varepsilon^{\tau_2}$ est invariant par $\tau_1\tau_2$, d'où c'est un élément de $\mathbf{k}_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{nm})$. Il se trouve donc que ε^2 est un produit de trois unités qui appartiennent respectivement à $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_3$. On conclut que ε est un produit d'unités exprimées à l'aide des unités fondamentales de $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ et $\mathbf{k}_3$, de leurs produits ou des racines carrés appartenant à $\mathbf{K}_0$ de ces derniers produits.

3.1. SFU de $\mathbf{K}_0$.

Proposition 6. *Soient* $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})$ *et* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ *définies comme ci-haut. On suppose que* ε_3 *est de norme* $+1$. *Alors on a :*

1) $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ *est un SFU de* $\mathbf{K}_0$ *ssi il existe* $a \in \mathbf{J}$ *tel que* $2n(x+a)$ *est un carré dans* $\mathbf{N}$.
2) *Dans le cas contraire* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ *est un SFU de* $\mathbf{K}_0$.

Preuve. Un SFU de $\mathbf{K}_0$ est un ensemble de r éléments choisis de l'ensemble $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_2\varepsilon_3, \varepsilon_2\varepsilon_1, \varepsilon_1\varepsilon_3, \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\}$ ou de l'ensemble des racines carrées des unités de B appartenant à $\mathbf{K}_0$. L'entier r est donné par $r = r_1 + r_2 - 1$, où r_1 est le nombre des $\mathbf{Q}$-isomorphismes réels de $\mathbf{K}_0$ et $2r_2$ est le nombre des $\mathbf{Q}$-isomorphismes complexes. Dans la suite, on va caractériser les éléments de B qui sont des carrés dans $\mathbf{K}_0$. Les unités ε_1, ε_2, $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_3$, $\varepsilon_2\varepsilon_3$ et $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ ne sont pas des carrés dans $\mathbf{K}_0$. En effet, soit N_1 (resp. N_2, N_3) la norme de $\mathbf{K}_0$ sur $\mathbf{k}_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{n})$ (resp. $\mathbf{k}_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$, $\mathbf{k}_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{mn})$), alors on a

$$\begin{aligned} N_2(\varepsilon_1) &= -N_2(\varepsilon_3) = -1, \ \ N_2(\varepsilon_2) = \varepsilon_2^2, \\ N_1(\varepsilon_2) &= -N_1(\varepsilon_3) = -1, \ \ N_1(\varepsilon_1) = \varepsilon_1^2, \\ N_3(\varepsilon_1) &= N_3(\varepsilon_2) = -1 \ \text{ et } \ N_3(\varepsilon_3) = \varepsilon_3^2. \end{aligned}$$

On suppose qu'une unité ε de B est un carré dans $\mathbf{K}_0$, donc il existe α dans $\mathbf{K}_0$ tel que $\varepsilon = \alpha^2$. Les cas où ε prend la valeur ε_1, ε_2, $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\varepsilon_3$, $\varepsilon_2\varepsilon_3$, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ conduisent tous à des contradictions. En effet,

$\varepsilon_1 = \alpha^2 \Longrightarrow N_2(\varepsilon_1) = (N_2(\alpha))^2 = -1 \Longrightarrow i \in \mathbf{K}_0$, contradiction ;
$\varepsilon_2 = \alpha^2 \Longrightarrow N_1(\varepsilon_2) = (N_1(\alpha))^2 = -1 \Longrightarrow i \in \mathbf{K}_0$, contradiction ;
$\varepsilon_1\varepsilon_2 = \alpha^2 \Longrightarrow N_2(\varepsilon_1\varepsilon_2) = (N_2(\alpha))^2 = -\varepsilon_2^2 \Longrightarrow i \in \mathbf{K}_0$, contradiction ;
$\varepsilon_1\varepsilon_3 = \alpha^2 \Longrightarrow (N_3(\alpha))^2 = -\varepsilon_3^2 \Longrightarrow i \in \mathbf{K}_0$, contradiction ;
$\varepsilon_2\varepsilon_3 = \alpha^2 \Longrightarrow (N_3(\alpha))^2 = -\varepsilon_3^2 \Longrightarrow i \in \mathbf{K}_0$, contradiction ;
$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \alpha^2 \Longrightarrow (N_2(\alpha))^2 = -\varepsilon_2^2 \Longrightarrow i \in \mathbf{K}_0$, contradiction.

Par suite, aucune de ces unités n'est un carré dans $\mathbf{K}_0$.

Il reste à déterminer les conditions pour que ε_3 soit un carré dans $\mathbf{K}_0$. On suppose que $\sqrt{\varepsilon_3} \in \mathbf{K}_0$. Alors il existe $\alpha = a_0 + a_1\sqrt{n} + a_2\sqrt{m} + a_3\sqrt{nm}$, où $a_i \in \mathbf{Q}$ tel que

$$\varepsilon_3 = \alpha^2 = (a_0 + a_1\sqrt{n} + a_2\sqrt{m} + a_3\sqrt{nm})^2.$$

Par étapes, on a

$$\begin{cases} x = a_0^2 + na_1^2 + ma_2^2 + nma_3^2 & (1) \\ 0 = a_0a_1 + ma_2a_3 & (2) \\ 0 = a_0a_2 + na_1a_3 & (3) \\ y = 2(a_0a_3 + a_1a_2). & (4) \end{cases}$$

Si les a_i sont tous non nuls, alors les équations (2) et (3) impliquent que $(a_1/a_2)^2 = m/n$. On en déduit que mn est un carré, ce qui n'est pas notre cas. D'où l'existence d'au moins un i tel que $a_i = 0$.

1) Soit $a_1 = 0$ (ou $a_2 = 0$).
Dans ce cas, ε_3 est un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{nm})$. Mais ε_3 est l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{nm})$, donc $\sqrt{\varepsilon_3}$ n'appartient pas à $\mathbf{Q}(\sqrt{nm})$. D'où on a une contradiction.
2) $a_0 = 0$ (ou $a_3 = 0$)
On a

$$\begin{cases} x = na_1^2 + ma_2^2, \\ y = 2a_1a_2, \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = 4na_1^4 - 4xa_1^2 + my^2, \\ y = 2a_1a_2. \end{cases}$$

Le discriminant de l'équation $4na_1^4 - 4xa_1^2 + my^2 = 0$ pour l'indéterminée a_1^2 est égal à $16(x^2 - mny^2)$. Comme ε_3 est de norme 1, alors le discriminant est égal à 16. D'où

$$a_1^2 = \frac{x \pm 1}{2n} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{y}{2a_1}.$$

Il s'ensuit que ε_3 est un carré dans $\mathbf{K}_0$ si et seulement si $2n(x \pm 1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$. On signale que si $2n(x + a)$ est un carré dans $\mathbf{N}$, où $a \in \{-1, 1\}$, alors on a

$$\sqrt{\varepsilon_3} = \sqrt{\frac{x + a}{2}} + \sqrt{\frac{x - a}{2}}.$$

Comme $\mathbf{K}_0$ est réel, alors le nombre r_1 des $\mathbf{Q}$-isomorphismes réels de $\mathbf{K}_0$ dans $\mathbf{C}$ est égal à 4 et le nombre r_2 des $\mathbf{Q}$-isomorphismes complexes est égal à zéro. Par suite, le nombre r des unités constituant un SFU de $\mathbf{K}_0$ est égal à $r = r_1 + r_2 - 1 = 3$. Un SFU de $\mathbf{K}_0$ est choisi parmi les éléments de $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1\varepsilon_2, \varepsilon_1\varepsilon_3, \varepsilon_2\varepsilon_3, \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\}$ ou des racines carrées des éléments de B appartenant à $\mathbf{K}_0$. D'après ce qui précède, seul ε_3

peut être un carré dans $\mathbf{K}_0$. Si c'est le cas, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$. Dans le cas contraire, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$. $\square$

Remarque 7. Dans l'étude de l'équation $\varepsilon_3 = \alpha^2$ où $\alpha \in \mathbf{K}_0$, on a utilisé le fait que $x^2 - nmy^2 = 1$. De plus, en utilisant cette relation, on obtient :

$$2n(x \pm 1) \text{ est un carré dans } \mathbf{N} \iff 2m(x \mp 1) \text{ est un carré dans } \mathbf{N}.$$

Il est important de souligner que la caractérisation donnée dans la proposition précédente, pour que ε_3 soit un carré, est indépendente des normes des unités ε_2 et ε_1. Ce qui veut dire que cette caractérisation est valable même si ε_1 ou ε_2 est de norme +1.

Proposition 8. *Soient* $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})$ *et* ε_1*,* ε_2*,* ε_3 *définies comme ci-haut. Soient* $\alpha_1 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$ *et* $c = \mathrm{trace}_{\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}}(\alpha_1)$*. On suppose que* ε_3 *est de norme* -1*. Alors on a :*

1) $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ *est un SFU de* $\mathbf{K}_0$ *ssi il existe* $(i, j) \in \mathbf{I}^2$ *tel que* $n^i m^j c$ *est un carré dans* $\mathbf{N}$.
2) *Dans le cas contraire,* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ *est un SFU de* $\mathbf{K}_0$.

Preuve. Un SFU de $\mathbf{K}_0$ est formé par 3 éléments choisis parmi l'ensemble $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_2\varepsilon_3, \varepsilon_2\varepsilon_1, \varepsilon_1\varepsilon_3, \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\}$ ou parmi l'ensemble des racines carrées des unités de B appartenant à $\mathbf{K}_0$. En utilisant le même raisonnement que pour la proposition précédente, à l'aide des normes, on remarque que seule l'unité $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ peut être un carré dans $\mathbf{K}_0$. Soient

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3\\
\alpha_2 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3\\
\alpha_3 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\\
\alpha_4 &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3\\
c_j &= \mathrm{trace}_{\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}}(\alpha_j), \quad j = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

D'après [10], on a $\alpha_j^2/(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3) = c_j$ pour tout j et de plus $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$ ssi il existe $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que c_j est un carré dans $\mathbf{K}_0$. On conclut que $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$ si et seulement si c_1 est un carré dans $\mathbf{K}_0$. Ceci est équivalent à l'existence de $(i, j) \in \mathbf{I}^2$ tel que $n^i m^j c_1$ est un carré dans $\mathbf{N}$. En posant $c = c_1$, on obtient 1). Dans le cas contraire, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$. $\square$

Remarques 9. 1) Le résultat qu'on vient de montrer, ainsi que celui qu'on va donner, se base sur un travail de Kubota [10, Proposition 1, §5]. Dans le cas où μ_1 (resp. μ_2, μ_3) est une unité de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ (resp. $\mathbf{Q}(\sqrt{b}), \mathbf{Q}(\sqrt{ab})$) de norme +1, alors $\mu_1\mu_2\mu_3$ est un carré dans $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ ssi il existe $(i, j) \in \mathbf{I}^2$ tel que $a^i b^j c$ est un carré dans $\mathbf{N}$, où $c = \mathrm{trace}_{\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}}(\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$. De plus, si $\mu_1 = s + t\sqrt{a}$, $\mu_2 = x + y\sqrt{b}$, et $\mu_3 = 1$, alors $\mu_1\mu_2$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$ ssi il existe $(i, j) \in \mathbf{I}^2$ tel que $4a^i b^j (x+1)(s+1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$.

2) On trouve dans [10] et [11], tous les types de SFU possibles dans un corps biquadratique.

3.2. Unités de $\mathbf{K}_{n,2}$. Soient n un entier naturel positif, différent de 2 et sans facteurs carrés, j_0 un entier supérieur ou égal à 3, ξ une racine primitive 2^{j_0}-ième de l'unité, $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \xi)$, $\mathbf{K}_0$ le sous-corps réel maximal de $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_{n,2} = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{2}, i)$, $\mathbf{K}'_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{2})$, $\mathbf{J} = \{-1, +1\}$, $\varepsilon_1 = 1+\sqrt{2}$ l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\varepsilon_2 = s+t\sqrt{n}$ l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$ et $\varepsilon_3 = x + y\sqrt{2n}$ l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2n})$. On suppose que ε_2 est de norme -1. Les nombres s et t sont des entiers ou bien des demi-entiers. La norme de ε_3 peut prendre les valeurs -1 ou +1. Les nombres x et y sont des entiers ou des demi-entiers.

Proposition 10. *Soient* $\mathbf{E}$ *(resp.* $\mathbf{E}_0$*) le groupe des unités de* $\mathbf{K}$ *(resp.* $\mathbf{K}_0$*) et* $\mathbf{W}$ *l'ensemble de toutes les racines de l'unité contenues dans* $\mathbf{K}$. *Alors l'indice de* $\mathbf{WE}_0$ *dans* $\mathbf{E}$ *est égal à* 1.

Preuve. Soient ξ' une racine primitive 2^{j_0+1}-ième de l'unité, $\mathbf{L} = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \xi')$ et $\mathbf{L}_0$ son sous-corps réel maximal. On sait que l'indice $[\mathbf{E} : \mathbf{WE}_0]$ est égal à 1 ou 2 et qu'il est égal à 2 si et seulement si $\mathbf{L}_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{\varepsilon})$, où ε est une unité de $\mathbf{K}_0$. On suppose que cet indice est égal à 2. Donc on a que $\mathbf{L}_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{\varepsilon})$ avec ε une unité de $\mathbf{K}_0$. L'extension $\mathbf{L}_0$ est cyclique sur $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$ et son groupe de Galois est engendré par un automorphisme σ.

Soit $\alpha = (\sqrt{\varepsilon})^{1+\sigma+\sigma^2+\cdots+\sigma^{2^{j_0-2}-1}}$; alors on a

$$\alpha^2 = \varepsilon^{1+\sigma+\sigma^2+\cdots+\sigma^{2^{j_0-2}-1}}.$$

On remarque que α^2 est égal à la norme de ε relativement à l'extension $\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}(\sqrt{n})$. Par suite, α^2 est une unité de $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$ et donc, il existe un entier n' tel que

$$\alpha^2 = \pm\varepsilon_2^{n'}.$$

Comme α est réel et ε_2 est de norme -1, alors n' est pair et $\alpha^2 = \varepsilon_2^{n'}$, car sinon, on se ramène à une égalité de la forme $\beta^2 = \pm\varepsilon_2$, où β est réel. D'où

$$(\beta\beta^{\tau_1})^2 = \varepsilon_2\varepsilon_2^{\tau_1} = -1.$$

Cela implique que $\sqrt{-1}$ est réel, ce qui est absurde. Donc il existe n'' tel que $2n'' = n'$ et $\alpha = \pm\varepsilon_2^{n''}$ est un élément de $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$. Par suite, $\sigma(\alpha) = \alpha$.

D'autre part, le groupe de Galois de $\mathbf{L}_0/\mathbf{K}_0$ est engendré par $\sigma^{2^{j_0-2}}$; donc on a que

$$(\sqrt{\varepsilon})^{\sigma^{2^{j_0-2}}} = -\sqrt{\varepsilon}$$

$$\sigma(\alpha) = (\sqrt{\varepsilon})^{\sigma+\sigma^2+\cdots+\sigma^{2^{j_0-2}}} = -\alpha.$$

On trouve alors deux valeurs différentes pour $\sigma(\alpha)$, ce qui donne une contradiction. On conclut que $\mathbf{L}_0$ n'est pas de la forme $\mathbf{K}_0(\sqrt{\varepsilon})$. D'où

$$[\mathbf{E} : \mathbf{WE}_0] = 1.$$

En particulier, toute unité de $\mathbf{K}_{n,2}$ est un produit d'une unité de $\mathbf{K}'_0$ et d'une racine de l'unité appartenant à $\mathbf{K}_{n,2}$. D'après les résultats qui précèdent, on peut toujours déterminer un SFU de $\mathbf{K}'_0$. Par conséquent, à l'aide des résultats précédents, un SFU de $\mathbf{K}_{n,2}$ est bien déterminé. $\square$

3.3. Unités de $\mathbf{K}_0(i)$. Soit $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(i) = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m}, i)$. On suppose que $\sqrt{2} \notin \mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})$. Le cas $\sqrt{2} \in \mathbf{K}_0$ a été traité dans le paragraphe 3.2. On garde toujours les notations des paragraphes précédents. En particulier, ε_1 (resp. ε_2, ε_3) est l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$ (resp. $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{nm})$).

Proposition 11. *Soit* $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(i) = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m}, i)$. *On suppose que* m *et* n *sont congrus à* 1 *modulo* 4. *Alors* $Q = [\mathbf{E} : \mathbf{W}\mathbf{E}_0] = 1$.

Preuve. Soient $\mathbf{L} = \mathbf{K}(\sqrt{i})$ et $\mathbf{L}_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{2})$ le sous-corps réel maximal de $\mathbf{L}$. On sait d'après le paragraphe 1 que $Q = 1$ ou 2 et que

$$Q = 2 \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathbf{E_0} \;\text{ tel que }\; \mathbf{L}_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{\varepsilon}).$$

On suppose que $Q = 2$. Donc il existe $\varepsilon \in \mathbf{E}_0$ tel que $\mathbf{L}_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{2}) = \mathbf{K}_0(\sqrt{\varepsilon})$. Par suite, il existe α dans $\mathbf{K}_0$ tel que $2 = \alpha^2\varepsilon$. L'idéal engendré par 2 dans $\mathbf{K}_0$ est alors un carré dans $\mathbf{K}_0$, ce qui veut dire que 2 est ramifié dans $\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}$. D'autre part, $n \equiv m \equiv 1 \bmod 4$ implique que 2 est non-ramifié dans $\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}$, car $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{n}) \cdot \mathbf{Q}(\sqrt{m})$. On a donc une contradiction, d'où Q ne peut pas être égal à 2 et par suite $Q = 1$. $\square$

Proposition 12. *On suppose que* $n \equiv 2$ *ou* $3 \bmod 4$. *Soit* 2_1 *l'idéal premier au-dessus de* 2 *dans* $\mathbf{Q}(\sqrt{n})/\mathbf{Q}$. *Alors on a :*

i) 2_1 *est d'ordre* 2 *dans le groupe des classes de* $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$;
ii) $Q = 2$ *ssi* 2_1 *devient principal dans* $\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}(\sqrt{n})$.

Preuve. Comme $n \equiv 2$ ou $3 \bmod 4$; alors 2 est ramifié dans $\mathbf{Q}(\sqrt{n})/\mathbf{Q}$. Donc il existe un idéal 2_1 de $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$ tel que $2) = 2_1^2$. Supposons que 2_1 est principal ; alors il existe α dans $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$ tel que $2_1 = (\alpha)$. D'où $2) = (\alpha^2)$. Il existe une unité ε de $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$ telle que $2 = \alpha^2\varepsilon$. L'unité ε est de la forme $\pm\varepsilon_1^j$, où j est un entier de $\mathbf{Z}$. Si j est pair, alors $\sqrt{2}$ appartient à $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$. Ceci est impossible puisqu'on a supposé que $\sqrt{2} \notin \mathbf{K}_0$. Si j est impair, on applique la norme à l'équation $2 = \alpha^2\varepsilon$ et on trouve que $4 = -b^2$, où $b \in \mathbf{Z}$ (ε_1 est de norme -1), une autre contradiction. Alors la classe de l'idéal 2_1 est d'ordre deux dans le groupe des classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$ et donc le nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$ est divisible par 2. D'autre part, $Q = 2$ ssi il existe $\varepsilon \in \mathbf{E}_0, \exists\, \alpha \in \mathbf{K}_0$ tels que $2 = \alpha^2\varepsilon$. Comme $2) = 2_1^2$ dans $\mathbf{K}_0$, Q est égal à 2 ssi $(2_1) = (\alpha)$ dans $\mathbf{K}_0$. On conclut que $Q = 2$ ssi 2_1 devient principal dans $\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}(\sqrt{n})$. $\square$

Proposition 13. *On suppose que* $\varepsilon_3 = x + y\sqrt{nm}$ *est de norme* $+1$. *Alors on a :*

1) *Si* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ *est un SFU de* $\mathbf{K}_0$, *alors* $Q = 1$;
2) *Si* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ *est un SFU de* $\mathbf{K}_0$, *alors* $Q = 2$ *ssi il existe* $a \in \mathbf{J} = \{-1, 1\}$ *tel que* $x + a$ *ou* $n(x + a)$ *est un carré dans* $\mathbf{Q}$.

Preuve. On sait que $Q = 2$ ssi il existe $\varepsilon \in \mathbf{E}_0,\ \exists\, \alpha \in \mathbf{K}_0$ tels que $2 = \alpha^2\varepsilon$. On va examiner sous quelles conditions cette équation est résoluble dans $\mathbf{K}_0$.

1) Soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ un SFU de $\mathbf{K}_0$.
Dans ce cas, l'équation se ramène à

$$2 = \pm\varepsilon_1^{i_0}\varepsilon_2^{i_1}(\sqrt{\varepsilon_3})^{i_2}\alpha^2 \;\text{ avec }\; i_0, i_1 \text{ et } i_2 \in \mathbf{I}. \tag{3.1}$$

a) Soit $i_2 = 0$.
On utilise une norme bien choisie suivant les valeurs de i_0 et i_1.

- Soit $i_0 = 1$.
On utilise la norme N_2 de $\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ et on trouve que

$$4 = -\varepsilon_2^{2i_1}(N_2(\alpha))^2.$$

Ceci implique que le nombre i appartient à $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$, ce qui est absurde. On fait de même si $i_1 = 1$.

- Soit $i_0 = i_1 = 0$.
Comme $\sqrt{2}$ et $\sqrt{-2}$ n'appartiennent pas à $\mathbf{K}_0$, alors on a une contradiction.

b) Soit $i_2 = 1$.
Soit N_3 la norme de $\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}(\sqrt{nm})$. On a $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{nm})(\sqrt{\varepsilon_3})$ et $N_3(\sqrt{\varepsilon_3}) = -\varepsilon_3$. On applique la norme N_3 à l'équation (3.1), et on trouve que

$$4 = \pm\varepsilon_3(N_3(\alpha))^2.$$

Comme $\mathbf{K}_0$ est réel et ε_3 est positif, on ne peut avoir que $4 = \varepsilon_3(N_3(\alpha))^2$. Cette dernière équation entraîne que $\sqrt{\varepsilon_3}$ appartient à $\mathbf{Q}(\sqrt{mn})$. Ceci est en contradiction avec le fait que ε_3 est l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{mn})$.

2) Soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ un SFU de $\mathbf{K}_0$.

Dans ce cas, on a à résoudre une équation de la forme

$$2 = \pm\varepsilon_1^{i_0}\varepsilon_2^{i_1}\varepsilon_3^{i_2}\alpha^2, \text{ où } i_0, i_1 \text{ et } i_2 \in \mathbf{I}. \tag{3.2}$$

a) Soit $i_2 = 0$.
On fait le même raisonnement que précédemment. Dans chaque cas on utilise une norme bien choisie et on trouve une contradiction.

b) Soit $i_2 = 1$.
Si i_0 ou i_1 est non nul, en utilisant les normes on trouve une contradiction. Soit $i_0 = i_1 = 0$. L'équation (3.2) devient

$$2\varepsilon_3' = \alpha^2 \text{ où } \varepsilon_3' = x - y\sqrt{nm} \text{ et } \alpha = a_0 + a_1\sqrt{n} + a_2\sqrt{m} + a_3\sqrt{nm}. \tag{3.3}$$

Cette équation est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} 2x = a_0^2 + na_1^2 + ma_2^2 + nma_3^2 & (1) \\ 0 = a_0a_1 + ma_2a_3 & (2) \\ 0 = a_0a_2 + na_1a_3 & (3) \\ -2y = 2(a_0a_3 + a_1a_2). & (4) \end{cases}$$

On suppose que les a_i soient tous non nuls ; alors les équations (2) et (3) impliquent que $(\frac{a_1}{a_2})^2 = \frac{m}{n}$. D'où mn est un carré dans $\mathbf{N}$, ce qui n'est pas possible. Si $a_0 = 0$ (ou $a_3 = 0$), on a

$$\begin{cases} 2x = na_1^2 + ma_2^2, \\ -2y = 2a_1a_2, \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a_1^2 = \dfrac{x \pm 1}{n}, \\ a_2 = \dfrac{-y}{a_1}. \end{cases}$$

Si $a_1 = 0$ (ou $a_2 = 0$), on a

$$\begin{cases} 2x = a_0^2 + nma_3^2, \\ -2y = 2a_0a_3, \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a_0^2 = x \pm 1, \\ a_3 = \dfrac{-y}{a_0}. \end{cases}$$

Dans ces deux derniers cas, on a utilisé le fait que ε_3 est de norme +1, ce qui est équivalent à $x^2 - nmy^2 = 1$. On conclut alors que

$$Q = 2 \Longleftrightarrow \exists\, a \in \mathbf{J} \text{ tel que } x + a \text{ ou } n(x + a) \text{ est un carré dans } \mathbf{Q}. \qquad \square$$

Corollaire 14. *On suppose que ε_3 est de norme* +1 *et $Q = 2$. Alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{i\varepsilon_3}\}$ est un SFU de* $\mathbf{K}$.

Preuve. D'après la proposition précédente et la proposition 3 le résultat s'ensuit. $\square$

Proposition 15. *On suppose que ε_3 est de norme -1. Alors on a :*

1) *Si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$, alors $Q = 1$;*
2) *Si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$, alors $Q = 2$ ssi il existe $(j_0, j_1) \in \mathbf{I}^2$ tel que $n^{j_0}m^{j_1}c$ est un carré dans $\mathbf{N}$, où $c = \mathrm{trace}_{\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}}(\alpha_1)$ et $\alpha_1 = 2(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3)$.*

Preuve. On sait que $Q = 2$ ssi il existe $\varepsilon \in \mathbf{E}_0, \exists\, \alpha \in \mathbf{K}_0$ tels que $2 = \alpha^2\varepsilon$. On procédera de la même façon que dans la proposition précédente.

1) Soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ un SFU de $\mathbf{K}_0$. Dans ce cas, l'équation se ramène à

$$2 = \pm\varepsilon_1^{j_0}\varepsilon_2^{j_1}(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3})^{j_2}\alpha^2, \text{ où } j_0, j_1 \text{ et } j_2 \in \mathbf{I}. \tag{3.4}$$

a) Soit $j_2 = 0$.
Avec le même raisonnement que pour la proposition 13, on trouve des contradictions.

b) Soit $j_2 = 1$.
Soit σ un générateur du groupe de Galois de $\mathbf{K}_0$ sur $\mathbf{Q}(\sqrt{nm})$, alors on a

$$\sigma(\sqrt{n}) = -\sqrt{n}, \quad \sigma(\sqrt{m}) = -\sqrt{m} \quad \text{et} \quad \sigma(\sqrt{nm}) = \sqrt{nm}.$$

D'où

$$\sigma(\varepsilon_1) = \varepsilon_1', \sigma(\varepsilon_2) = \varepsilon_2' \quad \text{et} \quad \sigma(\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}) = \pm\sqrt{\varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3},$$

où ε_j' désigne le conjugué de ε_j. Soit N_3 la norme de $\mathbf{K}_0$ sur $\mathbf{Q}(\sqrt{nm})$. En l'appliquant à l'équation (3.4), on trouve

$$4 = \pm(N_3(\alpha))^2\varepsilon_3.$$

Comme ε_3 est de norme -1, en utilisant la norme une autre fois, on trouve que -1 est un carré dans $\mathbf{Q}$, ce qui est absurde. On conclut alors que $Q = 1$.

2) Soit $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ un SFU de $\mathbf{K}_0$. On va étudier la résolubilité de l'équation

$$2 = \pm\varepsilon_1^{j_0}\varepsilon_2^{j_1}\varepsilon_3^{j_2}\alpha^2 \text{ avec } j_0, j_1, \text{ et } j_2 \in \mathbf{I}. \tag{3.5}$$

a) S'il existe k tel que $j_k = 0$, alors l'équation (3.5) n'est pas résoluble. En utilisant les normes, on trouve des contradictions.
b) Soit $j_0 = j_1 = j_2 = 1$.
L'équation (3.5) est équivalente à

$$2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \pm\alpha'^2 \text{ avec } \alpha' \in \mathbf{K}_0. \tag{3.6}$$

Le cas $2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -\alpha'^2$ est impossible, car $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est positif et α' est réel. Donc on a à résoudre $2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \alpha'^2$. On raisonne de la même façon que dans la proposition 8. Soient

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ \alpha_2 = 2(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \alpha_3 = 2(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \alpha_4 = 2(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ c = c_1 = \operatorname{trace}(\alpha_1) \text{ et } c_j = \operatorname{trace}(\alpha_j), \quad j = 2,\ 3,\ 4. \end{cases}$$

En utilisant les calculs de la démonstration de la proposition 15, on a

$$\frac{\alpha_j^2}{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = c_j \quad \text{et} \quad \sqrt{2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = \frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \sqrt{c_3} + \sqrt{c_4}}{4}.$$

Ces deux dernières relations entraînent que

$$2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \text{ est un carré dans } \mathbf{K}_0 \Longleftrightarrow c \text{ est un carré dans } \mathbf{K}_0.$$

Comme c est un entier, $2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$ si et seulement s'il existe j_0 et j_1 dans $\mathbf{I}$ tels que $n^{j_0}m^{j_1}c$ soit le carré d'un entier naturel.

Corollaire 16. *On suppose que ε_3 est de norme -1 et que $Q = 2$; alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{i\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(i)$.*

Preuve. Il suffit d'utiliser la proposition précédente et la proposition 3. □

3.4. Unités de $\mathbf{M}_j = \mathbf{K}_0(\xi_j)$. Soient j un entier supérieur ou égal à 3, ξ_j une racine primitive 2^j-ième de l'unité, $\mathbf{K}_0$ un corps réel tel que $\mathbf{K}_0 \cap \mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \mathbf{Q}$ et $\mathbf{M}_j = \mathbf{K}_0(\xi_j)$. L'extension $\mathbf{M}_j$ est galoisienne sur $\mathbf{K}_0$ de groupe de Galois $G \simeq \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2^{j-2}\mathbf{Z}$. Le groupe G est engendré par deux éléments τ et σ, où τ est la conjugaison complexe et σ est un élément d'ordre 2^{j-2}. Soit $\mathbf{M}_{0,j}$ le sous-corps réel maximal de $\mathbf{M}_j$; alors son groupe de Galois est cyclique engendré par la restriction de σ à $\mathbf{M}_{0,j}$ et cette restriction est aussi d'ordre 2^{j-2}. De plus, on a

$$\mathbf{M}_j = \mathbf{K}_0(i, \mu_j) = \mathbf{K}_0(i, \lambda_j), \text{ où } \mu_j = \sqrt{2 + \mu_{j-1}},$$

$$\lambda_j = \sqrt{2-\mu_{j-1}},\ \mu_j\lambda_j = \lambda_{j-1},\ \mu_3 = \lambda_3 = \sqrt{2},\ \mu_2 = 0 \text{ et } \lambda_2 = 2.$$

Plus précisément, on a

$$\mu_j = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}} \text{ avec } j-2 \text{ radicaux.}$$

Par suite, on a

$$\mathbf{M}_{0,3} = \mathbf{K}_0(\sqrt{2}) \text{ et } \mathbf{M}_{0,j} = \mathbf{M}_{0,j-1}(\sqrt{2-\mu_{j-1}}).$$

Si $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})$, alors $\mathbf{M}_j = \mathbf{K}_0(\xi_j) = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m}, \xi_j)$. Soient $\mathbf{E}_j$ le groupe des unités de $\mathbf{M}_j$, $\mathbf{W}_j$ le groupe des racines de l'unité appartenant à $\mathbf{M}_j$, $\mathbf{E}_{0,j}$ le groupe des unités de $\mathbf{M}_{0,j}$ et $Q_j = [\mathbf{E}_j : \mathbf{W}_j\mathbf{E}_{0,j}]$. On garde toujours les notations des paragraphes précédents.

Proposition 17. *On suppose que $Q_2 = 1$. Alors $Q_j = 1$ pour tout $j \geq 2$.*

Preuve. On raisonne par récurrence sur j. Pour $j = 2$, la propriété est vraie par hypothèse. On suppose le résultat vrai pour $j \geq 2$, donc $Q_j \neq 2$. Ceci est équivalent à

$$\forall \varepsilon_j \in \mathbf{E}_{0,j},\ \mathbf{M}_{0,j+1} \neq \mathbf{M}_{0,j}(\sqrt{\varepsilon_j}).$$

Comme $\mathbf{M}_{0,j+1} = \mathbf{M}_{0,j}(\sqrt{2-\mu_j})$, on a

$$\forall \varepsilon_j \in \mathbf{E}_{0,j},\ \forall x_j \in \mathbf{M}_{0,j},\ 2-\mu_j \neq x_j^2\varepsilon_j.$$

On suppose que $Q_{j+1} = 2$; alors il existe $\varepsilon_{j+1} \in \mathbf{E}_{0,j+1}$ tel que $\mathbf{M}_{0,j+2} = \mathbf{M}_{0,j+1}(\sqrt{\varepsilon_{j+1}})$. D'où

$$\exists\, \varepsilon_{j+1} \in \mathbf{E}_{0,j+1},\ \exists\, x_{j+1} \in \mathbf{M}_{0,j+1} \text{ tels que } 2-\mu_{j+1} = x_{j+1}^2\varepsilon_{j+1}.$$

Soit N_{j+1} la norme de $\mathbf{M}_{0,j+1}/\mathbf{M}_{0,j}$, alors comme $\mu_{j+1} = \sqrt{2+\mu_j}$ et $\mu_j \in \mathbf{M}_{0,j}$ on a

$$N_{j+1}(2-\mu_{j+1}) = (2-\mu_{j+1})(2+\mu_{j+1}) = 4-(2+\mu_j) = 2-\mu_j.$$

Si on pose $x_j = N_{j+1}(x_{j+1})$ et $\varepsilon_j = N_{j+1}(\varepsilon_{j+1})$, alors $x_j \in M_{0,j}, \varepsilon_j \in E_{0,j}$ et $2-\mu_j = x_j^2\varepsilon_j$, ce qui implique que $Q_j = 2$. Mais ceci est contraire à l'hypothèse $Q_j = 1$. Par conséquent, on a $Q_j = 1$ pour tout $j \geq 2$. $\square$

Corollaire 18. *Soit $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})$. On suppose toujours que ε_1 et ε_2 sont de norme -1 et que $\mathbf{I} = \{0, 1\}$ et $\mathbf{J} = \{-1, 1\}$. Soit $j \geq 2$; alors $Q_j = 1$ dans chacun des cas suivants :*

1) $m \equiv n \equiv 1 \bmod 4$ *;*
2) $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ *est un SFU de* $\mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})$ *;*
3) $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ *est un SFU de* $\mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})$ *;*
4) *L'unité ε_3 est de norme 1 et pour tout $a \in \mathbf{J}$, $4(x+a)$ et $4n(x+a)$ ne sont pas des carrés dans $\mathbf{N}$;*
5) *L'unité ε_3 est de norme -1 et pour tout $(j_0, j_1) \in \mathbf{I}^2$, $n^{j_0}m^{j_1}c$ n'est pas un carré dans $\mathbf{N}$, où $c = \mathrm{trace}_{\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}}(2(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3))$.*

Preuve. Comme pour tous ces cas $Q_2 = 1$, le résultat s'ensuit d'après la proposition précédente. $\square$

4. SFU de $\mathbf{K}_{n,m,d}$. Soient n, m et d des entiers naturels différents et sans facteurs carrés, $\mathbf{K}_{n,m,d} = \mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m}, \sqrt{-d})$ et $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m})$ le sous-corps réel maximal de $\mathbf{K}$. On suppose que $\mathbf{K}_0$ ne contient pas $\sqrt{d}$ et que n et m sont tels que les unités fondamentales ε_1 et ε_2 de $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$ et de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ sont de norme -1. Soit comme auparavant ε_3 l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{nm})$. L'indice des unités de $\mathbf{K}/\mathbf{K}_0$, $Q = [\mathbf{E} : \mathbf{W}\mathbf{E}_0]$, est égal à 1 ou à 2 ; Q est égal à 2 si et seulement si le sous-corps réel maximal $\mathbf{L}_0$ de $\mathbf{L} = \mathbf{K}(i)$ est le corps $\mathbf{K}_0(\sqrt{\varepsilon})$, où ε est une unité de $\mathbf{K}_0$. D'autre part, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{K}_0(\sqrt{d})$; donc l'indice Q est égal à 2 si et seulement s'il existe une unité ε de $\mathbf{K}_0$ telle que $\mathbf{K}_0(\sqrt{d}) = \mathbf{K}_0(\sqrt{\varepsilon})$. Cette dernière égalité est équivalente à la condition

$$\exists\, \varepsilon \in \mathbf{E}_0, \exists\, \alpha \in \mathbf{K}_0 \text{ tels que } d = \alpha^2\varepsilon.$$

Proposition 19. *Soit p un diviseur premier de d. Alors on a :*

1) *Si p est impair et ne divise pas nm, alors $Q = 1$.*
2) *Si $p = 2$ et $n \equiv m \equiv 1 \bmod 4$, alors $Q = 1$.*

Preuve. Soit p un nombre premier tel que l'une des deux hypothèses 1 ou 2 soit vérifiée. Alors p est non-ramifié dans $\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}$. D'autre part si $Q = 2$, alors

$$\exists\, \varepsilon \in \mathbf{E}_0, \exists\, \alpha \in \mathbf{K}_0 \text{ tels que } d = \alpha^2\varepsilon.$$

Il vient donc que l'idéal engendré par d dans $\mathbf{K}_0$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$. Ceci implique que tout diviseur premier de d est ramifié dans $\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}$. D'où on a une contradiction, puisque p est non ramifié dans $\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}$. On conclut que $Q = 1$. $\square$

Proposition 20. *On suppose que ε_3 est de norme 1.*

1) *Si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$, alors $Q = 1$;*
2) *Si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$, alors $Q = 2$ ssi il existe $a \in \mathbf{J}$ tel que $2d(x+a)$ ou $2nd(x+a)$ est un carré dans $\mathbf{N}$.*

Preuve. Le problème est de savoir sous quelles conditions l'équation $d = \alpha^2\varepsilon$, avec $\varepsilon \in \mathbf{E}_0$, admet une solution α dans $\mathbf{K}_0$. On procède de la même façon que dans la proposition 13. On trouve que dans le premier cas $Q = 1$, tandis que dans le deuxième cas $Q = 2$ si et seulement s'il existe a dans $\mathbf{J}$ tel que $2d(x+a)$ ou $2nd(x+a)$ est un carré dans $\mathbf{N}$. $\square$

Corollaire 21. *On suppose que ε_3 est de norme +1 et que $Q = 2$. Alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{-\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}$.*

Preuve. C'est une conséquence des propositions 4 et 20. $\square$

Proposition 22. *On suppose que ε_3 est de norme -1. Soient $\alpha_1 = d(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3)$ et $c = \operatorname{trace}_{\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}}(\alpha_1)$. Alors on a :*

1) *Si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$, alors $Q = 1$.*
2) *Si $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$, alors $Q = 2$ ssi il existe $(j_0, j_1) \in \mathbf{I}^2$ tel que $n^{j_0}m^{j_1}c$ est un carré dans $\mathbf{N}$.*

Preuve. On sait que

$$Q = 2 \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathbf{E}_0, \exists\, \alpha \in \mathbf{K}_0 \text{ tels que } d = \alpha^2\varepsilon.$$

On raisonne de la même façon que dans la proposition 15. Le seul cas où Q peut être égal à deux est lorsque $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$. Dans ce cas, on pose

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= d(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ \alpha_2 &= d(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \alpha_3 &= d(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \alpha_4 &= d(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\ c_j &= \text{trace}(\alpha_j), \quad j = 2, 3, 4 \\ c &= c_1. \end{aligned}$$

Alors on a

$$\frac{\alpha_j^2}{d\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = c_j \text{ pour tout } j \text{ et } \sqrt{d\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = \frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2} + \sqrt{c_3} + \sqrt{c_4}}{4}.$$

D'où $d\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$ si et seulement si c est un carré dans $\mathbf{K}_0$. Comme c est un entier, alors $d\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est un carré dans $\mathbf{K}_0$ si et seulement s'il existe $(j_0, j_1) \in \mathbf{I}^2$ tel que $n^{j_0}m^{j_1}c$ est un carré dans $\mathbf{N}$. Par suite, on a

$$Q = 2 \Longleftrightarrow \exists\, (j_0, j_1) \in \mathbf{I}^2 \text{ tel que } n^{j_0}m^{j_1}c \text{ est un carré dans } \mathbf{N}. \qquad \square$$

Remarque 23. Dans le cas où μ_1 (resp. μ_2, μ_3) est une unité de $\mathbf{Q}(\sqrt{a})$ (resp. $\mathbf{Q}(\sqrt{b})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{ab})$) de norme +1, alors $d\mu_1\mu_2\mu_3$ est un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \Longleftrightarrow \exists\, (i, j) \in \mathbf{I}^2$ tel que a^ib^jc est un carré dans $\mathbf{N}$, où $c = d \times \text{trace}_{\mathbf{K}_0/\mathbf{Q}}(\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$. De plus, si $\mu_1 = s + t\sqrt{a}, \mu_2 = x + y\sqrt{b}$, et $\mu_3 = 1$, alors $d\mu_1\mu_2$ est un carré dans $\mathbf{K}_0 \Longleftrightarrow \exists\, (i, j) \in \mathbf{I}^2$ tel que $4a^ib^jd(x+1)(s+1)$ est un carré dans $\mathbf{N}$.

Corollaire 24. *On suppose que ε_3 est de norme -1 et $Q = 2$. Alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un SFU de* $\mathbf{K}$.

Preuve. C'est une conséquence des propositions 4 et 22. $\square$

Remarque 25. Les caractérisations que nous avons trouvées, pour que l'indice des unités Q soit égal à 2, ont été trouvées indépendamment des résultats de [8], où M. Hirabayashi et K. I. Yoshino ont donné des caractérisations équivalentes.

5. Exemples numériques. Dans cette partie, nous donnons des exemples numériques pour tous les paragraphes de cette section. Les résultats que nous avons mis en évidence, dans chaque paragraphe, nous donnent des moyens pour déterminer la forme explicite du SFU.

5.1. SFU de $\mathbf{K}_{n,2}$, $n = 174$. Les unités fondamentales des corps $\mathbf{Q}(\sqrt{2}), \mathbf{Q}(\sqrt{17})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{34})$ sont

$$\varepsilon_1 = 1 + \sqrt{2}, \ \varepsilon_2 = 4 + \sqrt{17} \text{ et } \varepsilon_3 = 35 + 6\sqrt{34}.$$

L'unité ε_3 est de norme +1 et 35 + a est un carré dans **N** pour $a = 1$. Par suite,, on a

$$\sqrt{\varepsilon_3} = 3\sqrt{2} + \sqrt{17}.$$

Il vient que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{17})$ et de $\mathbf{K}_{17,2}$ (propositions 6 et 10).

5.2. SFU de $\mathbf{K}_{n,2}$, $n = 73$. On trouve que

$$\varepsilon_2 = 1068 + 125\sqrt{73} \;\text{ et } \varepsilon_3 = 145 + 12\sqrt{146}.$$

L'unité ε_3 est de norme +1 et pour $a = -1$, $145 + a$ est un carré dans **N**. Par suite, $\sqrt{\varepsilon_3}$ appartient à $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{73})$. On trouve que

$$\sqrt{\varepsilon_3} = 6\sqrt{2} + \sqrt{73}.$$

On conclut que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{73})$ et de $\mathbf{K}_{73,2}$ (propositions 6 et 10).

5.3. SFU de $\mathbf{K}_{n,2}$, $n = 5$. Dans ce cas, on a

$$\varepsilon_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \;\text{ et }\; \varepsilon_3 = 3 + \sqrt{10}.$$

On se trouve dans le cas de la proposition 8. L'unité ε_3 est de norme -1 et l'entier $c = 4\,\mathrm{trace}(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) = 2^2 \times 5$. Comme $5c$ est un carré dans **N**, alors d'après la proposition 8, $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{2})$ et on a

$$\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Par conséquent, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ et de $\mathbf{K}_{5,2}$ (propositions 8 et 10).

5.4. SFU de $\mathbf{K}_{n,2}$, $n = 41$. On trouve que

$$\varepsilon_2 = 32 + 5\sqrt{41} \;\text{ et }\; \varepsilon_3 = 9 + \sqrt{82}.$$

On se trouve dans le cas de la propositions 8. L'unité ε_3 est de norme -1 et l'entier $c = 2^3 \times 19^2$ est tel que $2c$ est un carré dans **N**. On trouve que

$$\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = 13 + \frac{19\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{41} + \frac{3\sqrt{82}}{2}.$$

Par suite, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{41})$ et de $\mathbf{K}_{41,2}$ (propositions 8 et 10).

5.5. SFU de $\mathbf{K}_{n,2}$, $n = 113$. Dans ce cas on a

$$\varepsilon_2 = 776 + 73\sqrt{113} \;\text{ et } \varepsilon_3 = 15 + \sqrt{226}.$$

On se trouve dans le cas de la proposition 8. L'unité ε_3 est de norme -1 et l'entier $c = 2^4 \times 5^2 \times 17^2$ est un carré dans **N**. Par suite, d'après la proposition 8 $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{113})$. Il vient alors que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{113})$ et de $\mathbf{K}_{113,2}$ (proposition 10).

5.6. SFU de $\mathbf{K}_{n,2}$, $n = 145$. Dans ce cas on a

$$\varepsilon_2 = 12 + \sqrt{145} \text{ et } \varepsilon_3 = 17 + \sqrt{290}.$$

On se trouve dans le cas de la proposition 8. L'unité ε_3 est de norme -1 et l'entier $c = 2^3 \times 5 \times 7^2$ est tel que $2^i \times 145^j \times c$ n'est un carré dans $\mathbf{N}$ pour aucun $(i, j) \in \{0, 1\}^2$. Par suite, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{145})$ et de $\mathbf{K}_{145,2}$ (propositions 8 et 10).

5.7. SFU de $\mathbf{K}_{n,2}$, $n = 445$. Dans ce cas on a

$$\varepsilon_2 = \frac{21 + \sqrt{445}}{2} \text{ et } \varepsilon_3 = 179 + 6\sqrt{890} \text{ est de norme } +1.$$

On se trouve dans le cas de la proposition 6. Comme $179 + a$ n'est pas un carré dans $\mathbf{N}$ pour tout $a \in \mathbf{J}$, alors $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{445})$ et de $\mathbf{K}_{445,2}$ (proposition 10).

5.8. SFU de $\mathbf{K}_{n,m,d} = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m}, \sqrt{-d})$, $n = 2$, $m = 145$ et $d = 5$. Les unités fondamentales des corps $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{145})$ et $\mathbf{Q}(\sqrt{290})$ sont respectivement :

$$\varepsilon_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad \varepsilon_2 = 12 + \sqrt{145} \quad \text{et} \quad \varepsilon_3 = 17 + \sqrt{290}.$$

L'unité ε_3 est de norme -1 et, d'après l'exemple 6, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{145})$. Soit $c = \text{trace}(5(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3))$. Alors $c = 2^3 \times 7^2 \times 5^2$. D'après la proposition 22 on a : $5\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{145})$ si et seulement s'il existe $(j_0, j_1) \in \mathbf{I}^2$ tel que $2^{j_0} \times 145^{j_1} \times c$ est un carré dans $\mathbf{N}$, ce qui est équivalent à $Q = 2$. Or pour $j_0 = 1$ et $j_1 = 0$, on a $2^{j_0} \times 145^{j_1} \times c = 2^4 \times 7^2 \times 5^2$ est un carré dans $\mathbf{N}$. Donc $5\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est un carré dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{145})$ et par suite $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{145}, \sqrt{-5})$. De plus, on a

$$\sqrt{5\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = 25 + \frac{35}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{145} + \frac{3}{2}\sqrt{290}.$$

D'où

$$\sqrt{-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3} = 5\sqrt{-5} + \frac{7}{2}\sqrt{-10} + 2\sqrt{-29} + \frac{3}{2}\sqrt{-58}.$$

On remarque que $\sqrt{-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}$ est bien un élément de l'extension $\mathbf{K}_{n,m,d} = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{145}, \sqrt{-5})$.

5.9. SFU de $\mathbf{K}_{n,m}$, $n = 10, m = 17$. Soient $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Q}(\sqrt{10}, \sqrt{17})$ et $\mathbf{K}_{n,m} = \mathbf{K}_0(i)$. On détermine, tout d'abord, un SFU de $\mathbf{K}_0$. On a : $\varepsilon_1 = 3 + \sqrt{10}$, $\varepsilon_2 = 4 + \sqrt{17}$ et $\varepsilon_3 = 13 + \sqrt{170}$. D'après la proposition 8, comme ε_3 est de norme -1, on a $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$ si et seulement s'il existe $(j_0, j_1) \in \mathbf{I}^2$ tel que $n^{j_0}m^{j_1}c$ est un carré dans $\mathbf{N}$, où $c = \text{trace}(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3)$. On a que $c = 4(3\times4\times13+170+3+4-13) = 1280$. Pour tout $(j_0, j_1) \in \mathbf{I}^2$, l'entier $10^{j_0} \times 17^{j_1} \times 1280$ n'est pas un carré dans $\mathbf{N}$. Donc $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_0$. D'autre part, d'après la proposition 15, l'indice Q est égal à deux si et seulement s'il existe $(j_0, j_1) \in \mathbf{I}^2$ tel que $n^{j_0}m^{j_1}c'$ est un carré dans $\mathbf{N}$, avec $c' = 2\,\text{trace}(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3)$. Or pour $j_0 = 1$ et $j_1 = 0$, on a $c' = 2 \times 1280$ et $10^{j_0} \times 17^{j_1} \times c' = 10 \times 2 \times 1280 = 160^2$. Il vient donc que $Q = 2$. D'après le Corollaire 16, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sqrt{i\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\}$ est un SFU de $\mathbf{K}_{n,m}$.

Dédicace. Ce travail est dédié à Günter Frei et Claude Lévesque, mes professeurs de l'Université Laval.

English extended abstract. Let $\mathbf{K}$ be an imaginary abelian extension of degree 8 over $\mathbf{Q}$, $\mathbf{K}_0$ the maximal real subfield of $\mathbf{K}$, $\mathbf{E}$ (resp. $\mathbf{E}_0$) the group of units of $\mathbf{K}$ (resp. $\mathbf{K}_0$), $\mathbf{W}$ the group of roots of unity contained in $\mathbf{K}$, w the cardinality of $\mathbf{W}$, 2^j the greatest power of 2 dividing w, and ξ a primitive 2^j-th root of unity. It is always possible to take $\xi = (\mu_j + \lambda_j\sqrt{-1})/2 = (\mu_j + \lambda_j i)/2$, where

$$\mu_2 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \mu_3 = \lambda_3 = \sqrt{2}, \mu_j = \sqrt{2+\mu_{j-1}},$$

$$\lambda_j = \sqrt{2-\mu_{j-1}},\ \ \mu_j\lambda_j = \lambda_{j-1}.$$

It is known that the index of the group $\mathbf{WE}_0$ in the group of units $\mathbf{E}$ is equal to 1 or 2. In the first case, a fundamental system of units FSU of $\mathbf{K}_0$ is also a FSU of $\mathbf{K}$, while the two systems differ in the second case. By distinguishing the case $i = \sqrt{-1} \in \mathbf{K}$ from the case $i = \sqrt{-1} \notin \mathbf{K}$, we have:

First case. Let $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-1})$ and $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ be a FSU of $\mathbf{K}_0$ (whose units are all positive)). Then,

- If there exists a unit ε of $\mathbf{K}_0$ of the form $\varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}\cdots\varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}}\varepsilon_r$ where the $j_k \in \mathbf{I}$, such that $(2+\mu_j)\varepsilon$ is square in $\mathbf{K}_0$, then $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{\xi\varepsilon}\}$ is a FSU of $\mathbf{K}$.
- In the contrary case, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r\}$ is a FSU of $\mathbf{K}$.

Second case. Let β be a positive, square-free algebraic integer of $\mathbf{K}_0$, and $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0(\sqrt{-\beta})$ be a quadratic extension of $\mathbf{K}_0$, abelian over $\mathbf{Q}$, such that $i = \sqrt{-1} \notin \mathbf{K}$. Let $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r\}$ be FSU of $\mathbf{K}_0$. Then,

- If there exists a unit ε of $\mathbf{K}_0$ of the form $\varepsilon_1^{j_1}\varepsilon_2^{j_2}\cdots\varepsilon_{r-1}^{j_{r-1}}\varepsilon_r$ where the $j_k \in \mathbf{I}$, such that $\beta\varepsilon$ is square in $\mathbf{K}_0$, then $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \sqrt{-\varepsilon}\}$ is a FSU of $\mathbf{K}$.
- In the contrary case, $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_r\}$ is a FSU of $\mathbf{K}$.

Using these results, we see that we have to resolve some equations of the form $\beta\varepsilon = a^2$ where $\beta \in \mathbf{K}_0$ and $a \in \mathbf{K}_0$.

If $\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m}, \sqrt{-d})$ is of degree 8 over $\mathbf{Q}$, where m, n and d are square-free integers, then a FSU of $\mathbf{K}$ is determined if we resolve the equation $d\varepsilon = a^2$ in $\mathbf{K}_0$. If ε_1 (resp. ε_2 and ε_3) is the fundamental unit of $\mathbf{Q}(\sqrt{n})$ (resp. $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ and $\mathbf{Q}(\sqrt{nm})$), then using some conditions on the units ε_1, ε_2 and ε_3 we give a FSU of $\mathbf{K}$ (Proposition 13, Corollaire 14, Proposition 15, Corollaire 16, Proposition 20, Corollaire 21, Proposition 22, Corollaire 24).

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Azizi, *Sur la capitulation des* 2*-classes d'idéaux de* $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **325** (1997), 127–130.
2. A. Azizi, *Sur le* 2*-groupe de classes d'idéaux de* $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **48** (1999), 71–92.
3. A. Azizi, *Unités de certains corps de nombres imaginaires et abéliens sur* $\mathbf{Q}$, Ann. Sci. Math. Québec **23** (1999), 15–21.
4. A. Azizi, *Capitulation of the* 2*-ideal classes of* $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1p_2}, i)$ *where* p_1 *and* p_2 *are primes such that* $p_1 \equiv 1 \pmod 8$*,* $p_2 \equiv 5 \pmod 8$ *and* $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 208, Dekker, New York, 2000, pp. 13–19.

5. A. Azizi, *Sur la capitulation des* 2*-classes d'idéaux de* $k = \mathbf{Q}(\sqrt{2pq}, i)$ *où* $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$, Acta Arith. **94** (2000), 383-399.
6. A. Azizi, *Sur une question de capitulation*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2197–2202.
7. H. Hasse, *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper*, Akademie-Verlag, Berlin, 1952.
8. M. Hirabayashi and K. I. Yoshino, *Unit indices of imaginary abelian number fields of type* $(2, 2, 2)$, J. Number Theory **34** (1990), 346–361.
9. T. Kubota, *Über die Beziehung der Klassenzahlen der Unterkörper des bizyklischen biquadratischen Zahlkörpers*, Nagoya Math. J. **6** (1953), 119–127.
10. T. Kubota, *Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper*, Nagoya Math. J. **10** (1956), 65–85.
11. S. Kuroda, *Über den Dirichletschen Körper*, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo. Sect. I **4** (1943), 383–406.
12. H. Wada, *On the class number and the unit group of certain algebraic number fields*, J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo. Sect. I **13** (1966), 201–209.

A. AZIZI
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ MOHAMMED 1
OUJDA, MAROC
COURRIEL : `azizi@fso.ump.ma`