Ann. Sci. Math. Québec **27** (2003), no. 2, 169–175.

RELATIONS LINÉAIRES ENTRE LES RACINES D'UN POLYNÔME ET ANNEAUX DE SCHUR

FRANCK LALANDE

RÉSUMÉ. Soient k un corps de caractéristique nulle et (G, H) une paire de groupes finis ($H \subset G$). Le présent article s'intéresse aux éventuelles relations k-linéaires entre un nombre algébrique α et ses k-conjugués, pour lesquels G est le groupe de Galois de la clôture galoisienne de $k(\alpha)$ et H le fixateur de α. Cet article met en évidence l'importance de l'algèbre $A = e_H k[G] e_H$ (où $e_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h$) pour l'étude de ces relations.

ABSTRACT. Let k be a field of characteristic 0 and (G, H) ($H \subset G$) a pair of finite groups. This article deals with possible linear relations between an algebraic number α and its k-conjugates such that G is the Galois group of the Galois closure of $k(\alpha)$ and H the fixator of α. We show the importance of the algebra $A = e_H k[G] e_H$ ($e_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h$) for studing these relations.

Soient k un corps de caractéristique 0, G le groupe de Galois d'une extension galoisienne L/k et H un sous-groupe de G d'indice n. On s'intéresse dans la suite aux relations linéaires éventuelles

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = 0 \tag{1}$$

à coefficients dans k entre un générateur α du sous-corps $K = L^H$ fixé par H et ses conjugués $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sur k. Le cadre naturel pour étudier ces relations a été introduit par Girstmair (*cf.* [G1, G2]); rappelons-le brièvement. Au sous-groupe H fixé de G, on associe $e_H = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h$. C'est un élément idempotent de $k[G]$ et pour $x \in G$, $x \in H$ si et seulement si $xe_H = e_H$. Notons V le $k[G]$-module $k[G]e_H$ et $s_1, \ldots, s_n$ un système de représentants des classes à gauche de G modulo H. Ce choix étant fait, un élément de V s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_i b_i s_i e_H$ où $b_i \in k$ et dans ce contexte, la relation (1) s'écrit $\sum a_i s_i e_H.\alpha = 0$. Ceci amène la définition suivante (*cf.* [G2]). Un $k[G]$-sous-module W de $k[G]e_H$ est *admissible* s'il existe $\alpha \in L$ tel que $W\alpha = 0$ et $G_\alpha = H$. En d'autres termes, les éléments de W sont les relations linéaires entre un générateur α de L^H et ses conjugués sur k. Par exemple, le sous-module $k[G]e_G = ke_G$ est admissible, il lui correspond la *relation triviale* $\sum_1^n \alpha_i = 0$. Dans ce travail, nous montrons qu'il existe une correspondance entre

Reçu le 20 mai 2003 et, sous forme définitive, le 9 septembre 2003.

certaines relations de type (1) et les éléments non-inversibles de l'anneau de Schur $A = e_H k[G] e_H$. Les relations ainsi obtenues sont importantes car elles engendrent sur $k[G]$ toutes les relations possibles; c'est l'objet du théorème 1. Dans la suite, la représentation de permutation induite par H (qui à $g \in G$ associe $\varphi_g \in \mathrm{Perm}(G/H)$) sera supposée fidèle, ce qui revient à dire que L est la clôture normale de $K = k(\alpha)$. Si H est maximal, cette représentation de permutation est appelée *primitive*. En termes de corps, cela veut dire qu'il n'y a pas de corps entre k et L^H. Enfin, rappelons un critère d'admissibilité dû à Girstmair (théorème 1 de [G2]). Pour qu'un sous-module W de $k[G]e_H$ soit admissible, il faut et il suffit que $(s-1)e_H \in W$ $(s \in G)$ entraîne $s \in H$, ou de manière équivalente que W ne contienne aucun des $(s_i - 1)e_H$ non-nuls. Dans le cas d'une paire (G, H) primitive, cette condition revient à dire que W ne contient pas le sous-module $k[G](e_H - e_G)$, c'est-à-dire le sous-module de $k[G]e_H$ formé des éléments $\sum a_i s_i e_H$ pour lesquels la somme $\sum a_i$ est nulle. Ces éléments seront appelés dans la suite des éléments de poids nul ou encore les éléments x de $k[G]e_H$ tels que $xe_G = 0$. Remarquons cependant que dans tous les cas, et pas seulement dans le cas de paires primitives, un sous-module admissible W ne peut pas contenir $k[G](e_H - e_G)$. En effet, dans le cas contraire, pour $s \notin H$, comme $(s-1)e_H e_G = 0$, $(s-1)e_H$ appartient à $k[G](e_H - e_G)$ et serait alors dans W, ce qui contredit l'admissibilité de W.

1. Le rôle de l'algèbre $A = e_H k[G] e_H$. On rappelle que le *rang* d (*cf.* [DM]) de la paire (G, H) est le nombre d'orbites de H pour l'action de G sur G/H. On note $I_1, \ldots, I_d$ ces orbites. L'orbite I_1 est égale à $\{s_1 H\} = H$, et l'orbite I_j est égale à $\{s_{i_j} H, \ldots, s_{i_j + d_j - 1} H\}$, d_j désignant le cardinal de l'orbite I_j. Nous noterons désormais A la k-algèbre $e_H k[G] e_H$; c'est une algèbre d'élément unité e_H et un exemple de ce qu'on appelle un anneau de Schur (*cf.* [T]).

Lemme 1. *Un élément de A s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{j=1}^{d} b_j f_j$ où $b_j \in k$ et $f_j = e_H s_{i_j} e_H$. De plus, $f_j = e_H s_{i_j} e_H = (1/d_j)(s_{i_j} + \cdots + s_{i_j + d_j - 1})e_H$.*

Preuve. Pour $a \in k[G]$, ae_H s'écrit de manière unique sous la forme $\sum a_i s_i e_H$. Par ailleurs, on voit aisément que sur une orbite,

$$e_H \left(\sum_{i=i_j}^{i_j + d_j - 1} a_i s_i e_H \right) = \left(\sum_{i=i_j}^{i_j + d_j - 1} a_i \right) e_H s_{i_j} e_H = \left(\sum_{i=i_j}^{i_j + d_j - 1} a_i \right) f_j$$

et ainsi

$$e_H a e_H = \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{i=i_j}^{i_j + d_j - 1} a_i \right) e_H s_{i_j} e_H = \sum_{j=1}^{d} b_j f_j.$$

Enfin, puisque I_j est une orbite sous l'action de H,

$$f_j = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h s_{i_j} e_H = \frac{1}{|H|} \frac{|H|}{d_j} (s_{i_j} + \cdots + s_{i_j + d_j - 1}) e_H. \ \square$$

Considérons maintenant l'application $\psi : A \longrightarrow \mathrm{End}_k(K)$ qui à $a \in A$ associe $\psi_a : K \to K$ définie par $\psi_a(\alpha) = a\alpha$. C'est un homomorphisme d'algèbres injectif.

En effet, si $(s(\theta))_{s\in G}$ est une base normale de L/k et $\beta = e_H(\theta)$, les $s_i(\beta)$ sont alors k-linéairement indépendants et donc si $\psi_a(\beta) = 0$, alors $a = 0$. On a alors le résultat suivant.

Lemme 2. *Pour que ψ_a soit injective, il faut et il suffit que a soit inversible dans A.*

Preuve. Si a est inversible, il existe $b \in A$ tel que $ba = e_H$ et ainsi, si $\psi_a(x) = 0$, $\psi_b\psi_a(x) = x = 0$ et ψ_a est injective. Réciproquement, si a n'est pas inversible, comme A est une algèbre de dimension finie, il existe $c \neq 0$ tel que $ac = 0$ et $\psi_{ac} \equiv 0$. Mais comme ψ est injective, $\psi_c \not\equiv 0$ et par suite $\mathrm{Ker}(\psi_a) \neq \{0\}$. □

Pour $a = \sum a_s s \in k[G]$, on définit le *poids* de a comme étant $p(a) = \sum a_s$. C'est une fonction multiplicative et additive sur $k[G]$. Pour un élément $a \in A$ de poids nul, l'application ψ_a est nulle sur k. Cette remarque étant faite, on a le résultat suivant.

Proposition 1. *Soit $a = \sum_j b_j f_j$ un élément de A non-inversible et de poids non-nul. Si H est maximal, il existe un générateur α de $K = L^H$ tel que $\psi_a(\alpha) = 0$, c'est-à-dire dont les conjugués sur k vérifient la relation $a\alpha = \sum_j \frac{b_j}{d_j}(\alpha_{i_j} + \cdots + \alpha_{i_j+d_j-1}) = 0$.*

Preuve. D'après le lemme 2, ψ_a est non injective. Puisque a est de poids non nul, ψ_a ne s'annule pas sur k et enfin puisque H est maximal, tout élément de K qui n'est pas dans k est un générateur. □

Par exemple, $e_G = \frac{|H|}{|G|}\sum_j d_j f_j$ est non-inversible puisque pour tout $a \in k[G]$, $e_G a = a e_G = p(a) e_G$ et de poids non nul égal à 1. Il lui correspond la relation triviale où tous les a_i de (1) sont égaux à 1.

Remarque. La condition sur le poids permet d'affirmer qu'un tel a est admissible mais est cependant une condition beaucoup trop forte. Un élément de poids nul peut être admissible. Pour insister, tout sous-module de V qui ne contient pas e_G ne contient que des éléments de poids nul.

Exemple. Le groupe alterné A_5 admet une représentation primitive en degré 10 correspondant au sous-groupe maximal $H =< (12)(45), (123) >$ d'ordre 6. Un système de représentants de G/H est par exemple $s_1 = id$, $s_2 = (345)$, $s_3 = (354)$, $s_4 = (234)$, $s_5 = (235)$, $s_6 = (24)(35)$, $s_7 = (134)$, $s_8 = (135)$, $s_9 = (14)(35)$ et $s_{10} = (15)(24)$. Le rang d est égal à 3 et sous ces notations, les orbites sont $I_1 = \{s_1\}$, $I_2 = \{s_6, s_9, s_{10}\}$ et $I_3 = \{s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8\}$. Les lois de multiplication sont les suivantes: $f_2 f_3 = (1/3)(f_2 + 2f_3)$, $f_2^2 = (1/3)(f_1 + 2f_3)$ et $f_3^2 = (1/6)(f_1 + 2f_2 + 3f_3)$. Un simple calcul de déterminant permet de voir qu'un élément $af_1 + bf_2 + cf_3 \in A$ est non-inversible si et seulement si a, b, c vérifient $(a+b+c)(3a-2b+c/2)(3a+b-c) = 0$. Par exemple $f_1 - 3f_2$ et $2f_1 + 3f_2$ sont non-inversibles de poids respectifs -2 et 5. Ils existe donc deux générateurs α et β de K dont les conjugués sur k vérifient les relations $\alpha_1 = \alpha_6 + \alpha_9 + \alpha_{10}$ et $2\beta_1 + \beta_6 + \beta_9 + \beta_{10} = 0$.

Remarques. L'algèbre A est commutative si la paire (G, H) est de rang 2 ou 3. Des exemples de relations pour le groupe A_5 apparaissent déjà dans [G1].

2. Éléments non-inversibles et éléments admissibles de l'anneau A. Nous proposons maintenant de préciser davantage la structure des éléments non-inversibles de

$A = e_H k[G] e_H$. En tant qu'anneau, A est anti-isomorphe à $\mathrm{End}_{k[G]}(k[G]e_H)$ (*cf.* [B], ex. 3, ch. 1). Cette correspondance résulte du fait qu'une application $k[G]$-linéaire φ de $k[G]e_H$ est complètement déterminée par $\varphi(e_H)$ qui est un élément de A puisque $\varphi(e_H) = \varphi(e_H^2) = e_H\varphi(e_H)$. La structure de $\mathrm{End}_{k[G]}(k[G]e_H)$ est bien connue, rappelons la brièvement. Soit χ un caractère absolument irréductible de G. Il lui correspond à conjugaison près (*cf.* [F]) un unique caractère k-irréductible $\mu = m\sum\chi^\sigma = m\chi'$ où m est l'indice de Schur de χ sur k et les χ^σ, les caractères conjugués de χ sur k. La décomposition isotypique du $k[G]$-module $k[G]e_H$ s'écrit alors

$$(*) \qquad k[G]e_H = \bigoplus_{\chi\in B} k[G]\epsilon_{\chi'}e_H$$

où $\epsilon_{\chi'} = \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{s\in G}\chi'(s^{-1})s$ et B est un sous-ensemble d'un ensemble $\mathcal{B}$ de caractères absolument irréductibles de G contenant un et un seul représentant de chaque classe de conjugaison (les caractères de B sont ceux de $\mathcal{B}$ tels que $(1_H^G, \chi) \neq 0$). Il est alors bien connu (*cf.* [B]) que $\mathrm{End}_{k[G]}(k[G]e_H)$ est isomorphe au produit $\Pi_{\chi\in B}\mathrm{End}_{k[G]}(k[G]\epsilon_{\chi'}e_H)$, l'application associant à φ le produit $(\varphi_\chi)_{\chi\in B}$ où φ_χ est la restriction de φ à $k[G]\epsilon_{\chi'}e_H$. De plus, dans le cas de la *multiplicité libre* (*cf.* [G2]), c'est-à-dire lorsque chaque composante isotypique est irréductible, $\mathrm{End}_{k[G]}(k[G]\epsilon_{\chi'}e_H)$ est un corps et ainsi φ_χ est nul ou inversible. Cela nous donne dans ce cas particulier une description des éléments non-inversibles de A.

Proposition 2. *On suppose la paire (G, H) à multiplicité libre. Pour qu'un élément $a \in A$ soit non-inversible, il faut et il suffit qu'il existe un caractère absolument irréductible χ tel que $(1_H^G, \chi) \neq 0$ et $\epsilon_{\chi'}a = 0$.*

Preuve. Soit $a \in A$ et $\varphi \in \mathrm{End}_{k[G]}(k[G]e_H)$ l'application correspondante qui à e_H associe $\varphi(e_H) = a$. Sous les notations précédentes, $\varphi_\chi(\epsilon_{\chi'}e_H) = \epsilon_{\chi'}a$. Ainsi a est inversible si et seulement si pour tout $\chi \in B$, φ_χ est inversible, ce qui revient à dire que $\epsilon_{\chi'}a \neq 0$. $\square$

Remarque. Le caractère du $k[G]$-module $k[G]e_H$ est induit par le caractère trivial de H. Si on note $1_H^G = 1 + \sum n_i\chi_i$ sa décomposition en caractères irréductibles, dire que la paire (G, H) est à multiplicité libre revient à dire que dans cette décomposition, chaque n_i est égal à 1. D'autre part, une simple généralisation de l'exercice de la page 30 de [S] permet de voir que le rang r de la paire (G, H) satisfait $r = 1 + \sum_i n_i^2$. Les paires de rang 2, 3 et 4 sont donc à multiplicité libre.

Dans le cas primitif, le théorème 1 de [G2] (*cf.* Introduction) permet d'exprimer la condition d'admissibilité d'un élément de A. On a la proposition suivante.

Proposition 3. *On suppose (G, H) primitive. Pour qu'un élément $a \in A$ soit admissible, il faut et il suffit qu'il existe $\chi \neq 1 \in B$ pour lequel $a\epsilon_{\chi'}$ soit non-inversible dans le sous-anneau $A\epsilon_{\chi'}$.*

Preuve. Soit $\varphi_a \in \mathrm{End}_{k[G]}(k[G]e_H)$ l'application qui à e_H associe a, et soient $\varphi_{a,\chi}$ ses restrictions aux différentes composantes isotypiques $k[G]\epsilon_{\chi'}e_H$. Comme l'anneau $\mathrm{End}_{k[G]}(k[G]\epsilon_{\chi'}e_H)$ est anti-isomorphe à l'anneau $\epsilon_{\chi'}e_H k[G]\epsilon_{\chi'}e_H = A\epsilon_{\chi'}$, on a que $\varphi_{a,\chi}$ est inversible si et seulement si $a\epsilon_{\chi'}$ est inversible dans l'anneau $A\epsilon_{\chi'}$ d'élément unité $\epsilon_{\chi'} e_H$. Supposons $a\epsilon_{\chi'}$ et donc $\varphi_{a,\chi}$ inversible pour tout $\chi \neq 1 \in B$. Puisque $\varphi_{a,\chi}$ est inversible, il existe $x_\chi \in k[G]$ tel que $x_\chi \epsilon_{\chi'} a = \epsilon_{\chi'} e_H$. Soit alors $\alpha \in K$ tel que $a\alpha = 0$. Comme $e_H = \sum_{\chi \in B} \epsilon_{\chi'} e_H$, on a $\alpha = e_H \alpha = e_G \alpha + \sum_{\chi \neq 1} x_\chi \epsilon_{\chi'} a\alpha = e_G \alpha$. Ainsi, α est fixé par tous les éléments de G; il appartient donc à k et a n'est pas admissible. Finalement, si a est admissible, $\varphi_{a,\chi}$ est non-inversible pour un $\chi \neq 1$. Réciproquement, supposons qu'il existe $\chi \neq 1 \in B$ tel que $\varphi_{a,\chi}$ soit non-inversible. Dans ce cas, $\varphi(k[G]e_H) = k[G]a$ ne contient pas $\bigoplus_{\chi \neq 1 \in B} k[G]\epsilon_{\chi'} e_H$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de poids 0, ce qui d'après le théorème 1 de [G2] entraîne que a est admissible. $\square$

Comme corollaire de ces deux propositions, nous retrouvons un résultat de [G2].

Corollaire 1. *Soit (G, H) une paire primitive et à multiplicité libre. Pour qu'un élément $a \in A$ soit admissible, il faut et il suffit qu'il existe $\chi \neq 1 \in B$ tel que $\epsilon_{\chi'} a = 0$.*

On revient sur l'exemple de A_5 en degré 10. La décomposition de $1_H^{A_5}$ en caractères irréductibles s'écrit $1_H^{A_5} = 1 + \chi_1 + \chi_2$ où χ_1 et χ_2 sont les caractères irréductibles de A_5 de degrés respectifs 4 et 5. On a $\epsilon_{\chi_1} e_H = \frac{1}{10}(f_1 - 2f_2 + f_3)$ et $\epsilon_{\chi_2} e_H = \frac{1}{10}(f_1 + f_2 - 2f_3)$. De plus, pour $u = af_1 + bf_2 + cf_3 \in A$, on a $\epsilon_{\chi_1} u = 0$ si et seulement si $6a - 4b + c = 0$ et $\epsilon_{\chi_2} u = 0$ si et seulement si $3a + b - c = 0$. Ainsi, u est admissible si et seulement si $(6a - 4b + c)(3a + b - c) = 0$.

3. Applications. À ce point, une question naturelle est de savoir quel rôle jouent les éléments de A pour décrire les éléments admissibles de $k[G]e_H$. Sans être totalement satisfaisant, le théorème suivant donne une réponse partielle à cette question.

Théorème 1. *Tout élément admissible a de $k[G]e_H$ s'écrit sous la forme $\sum b_i a_i$ où les b_i appartiennent à $k[G]$ et les a_i sont des éléments admissibles de $A \cap k[G]a$.*

Preuve. On pose $W = k[G]a$, et soit $W = \bigoplus U_i$ sa décomposition en sous-modules simples. Comme $k[G]$ est semi-simple, pour chaque U_i, il existe un idempotent e_i tel que $U_i = k[G]e_i$. On rappelle que $e_i e_H = e_i$, ainsi $e_i^2 = e_i e_H e_i e_H = e_i$ et par conséquent $e_H e_i$ est différent de 0. Comme U_i est irréductible, $U_i = k[G]e_H e_i$. On obtient le résultat en posant $a_i = e_H e_i$. $\square$

Ce théorème fournit une nouvelle démonstration de l'un des premiers résultats sur le sujet (*cf.* [G1, D]). Nous aurons besoin de supposer que le corps k est un sous-corps du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Corollaire 2. *Dans le cas d'une paire (G, H) 2-transitive, les seuls éléments admissibles de $k[G]e_H$ sont les λe_G ($\lambda \in k$). Autrement dit, la seule relation possible est la relation triviale.*

Preuve. Par hypothèse, le rang de la paire (G, H) est égal à 2. En conservant les notations précédentes, (f_1, f_2) (où $f_1 = e_H$ et $f_2 = e_H s_2 e_H = \frac{1}{n-1}(s_2 + s_3 + \cdots + s_n)e_H$) est une base de $A = e_H k[G]e_H$. Soit $a = \alpha f_1 + \beta f_2$ un élément de A. Comme $f_2^2 = \frac{1}{n-1}(f_1 + (n-2)f_2)$, il est aisé de vérifier que a est non-inversible dans A si et seulement si $\beta = -\alpha$ ou $\beta = (n-1)\alpha$. Les seuls éléments non-inversibles de A sont donc $\alpha(f_1 - f_2)$ et $\alpha(f_1 + (n-1)f_2) = \alpha\frac{|G|}{|H|}e_G$ ($\alpha \in k$). Mais $f_1 - f_2$ n'est pas admissible. En effet, dans le cas contraire, il existerait une extension L/k de groupe G et un générateur θ de L^H tel que $(f_1 - f_2)\theta = \theta_1 - \frac{1}{n-1}(\theta_2 + \theta_3 + \cdots + \theta_n) = 0$; ceci est impossible d'après le théorème 3' de [D]. Les seuls éléments admissibles de A sont donc les λe_G ($\lambda \in k$) et d'après le théorème 1, tout élément admissible de $k[G]e_H$ est de la forme λe_G. □

Remarque. Le théorème 3' de [D] affirme qu'une relation $\sum a_i x_i = 0$ est impossible si $\max(|a_i|) = |a_j| \geq \sum_{i \neq j} |a_i|$.

Dans le cas de paires à multiplicité libre, le théorème 1 peut être précisé à l'aide d'une condition de finitude. C'est l'objet du corollaire suivant :

Corollaire 3. *On suppose la paire (G, H) à multiplicité libre. Il existe un nombre fini d'éléments de A idempotents et admissibles $e_1, \ldots, e_k$ possédant la propriété suivante : pour tout élément admissible a de $k[G]e_H$, il existe une partie $J \subset \{1, \ldots, k\}$ telle que $a = \sum_{j \in J} b_j e_j$ où $b_j \in k[G]$. De plus, si $a\alpha = 0$, $e_j \alpha = 0$ pour tout $j \in J$.*

Preuve. On rappelle que la décomposition isotypique du $k[G]$-module $k[G]e_H$ s'écrit $k[G]e_H = \bigoplus_{\chi \in B} k[G]\epsilon_{\chi'} e_H$. Celle de $k[G]a$ est alors $k[G]a = \bigoplus_{\chi \in C} k[G]a\epsilon_{\chi'} e_H$ où $C = \{\chi \in B, a\epsilon_{\chi'} \neq 0\}$, et comme par hypothèse chaque composante isotypique est simple, on a $k[G]a = \bigoplus_{\chi \in C} k[G]\epsilon_{\chi'} e_H$. Les e_i du corollaire sont donc les $\epsilon_{\chi'} e_H$ pour $\chi \in B$ qui sont clairement des éléments idempotents de A puisque $\epsilon_{\chi'}$ est idempotent central. La dernière affirmation résulte du fait que pour chaque $\chi \in C$, $\epsilon_{\chi'} e_H$ appartient à $k[G]a$. □

Remarque. Le corollaire 2 fournit des exemples de paires (G, H) pour lesquelles e_G est le seul élément admissible du module $k[G]e_H$, autrement dit pour lesquelles seule la relation triviale est possible. Girstmair a caractérisé ces paires (*cf.* [G2], prop. 12). Ce sont celles pour lesquelles le caractère $1_H^G - 1$ est k-irréductible. En termes de A-modules, ce sont les paires (G, H) pour qui le A-module $A(e_H - e_G)$ est irréductible. Ces paires sont primitives car s'il existait un sous-groupe H' tel que $H < H' < G$, l'élément $e_{H'}$ serait admissible. En effet, considérons une extension galoisienne L/k de groupe G et θ un élément de L tel que $(s\theta)_{s \in G}$ en soit une base normale. Dans ce cas, $\beta = e_H(\theta)$ est un générateur de L^H dont les conjugués sur k ne vérifient aucune relation k-linéaire. Il est alors évident que $\alpha = \beta - e_{H'}(\beta)$ est un générateur de L^H dont les conjugués sur k vérifient la relation $\sum_{h \in H'} h(\alpha) = 0$. Plus simplement, pour une paire (G, H) imprimitive sur des blocs de taille d, la relation $x_1 + x_2 + \cdots + x_d = 0$ est une vraie relation. Les paires (G, H) pour lesquelles $A' = A(e_H - e_G)$ est un A-module irréductible contiennent donc les paires 2-transitives et sont incluses dans les paires primitives. Ces inclusions sont strictes.

English extended abstract. Let k be a field of characteristic 0, G the Galois group of a finite Galois extension L/k and H a subgroup of G of index n. This article deals with possible linear relations

$$(1) \qquad a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = 0, \quad a_i \in k$$

between a primitive element α of the field $K = L^H$ and its k-conjugates $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. The natural context for the study of these relations was introduced by Girstmair (see

[G1] and [G2]). Put $e_H = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h$. It's an idempotent element of $k[G]$ and if $x \in G$, $x \in H$ if and only if $xe_H = e_H$. Call $\overline{s_i} = s_iH$, $i = 1, 2, \ldots, n$, the left cosets of the subgroup H in G. With these notations, every element of the $k[G]$-module $k[G]e_H$ can be written as $\sum_i b_is_ie_H$ ($b_i \in k$) and the relation (1) is equivalent to $\sum a_is_ie_H.\alpha = 0$. We can now give the following definition (see [G2]). A $k[G]$-submodule W of $k[G]e_H$ is *admissible* if there exits $\alpha \in L$ such that $W\alpha = 0$ and $G_\alpha = H$. Basically this should be interpreted as saying that W consists of linear relations between α and its conjugates where α generates the fixed field of H. For example, the submodule $k[G]e_G = ke_G$ is admissible; it corresponds to the trivial relation $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$. In this paper, we show that there exists a correspondence between some relations of type (1) and the non-invertible elements of the Schur-ring $A = e_Hk[G]e_H$. According to theorem 1, these particular relations generate over $k[G]$ all the relations of type (1). Finally, in all this work, we suppose that $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ acts faithfully on G/H; this is equivalent to say that L is the normal closure of $K = L^H$. This action is said *primitive* when H is a maximal subgroup of G.

Remerciements. Ce travail a été supporté par NSERC A7171. L'auteur tient à remercier le département de Mathématiques de l'Université Carleton d'Ottawa pour son hospitalité durant la période au cours de laquelle ce travail a été accompli, ainsi que le Professeur J. D. Dixon pour son enseignement.

BIBLIOGRAPHIE

[B] N. Bourbaki, *Algèbre*, Hermann, Paris, 1958.

[D] J. D. Dixon, *Polynomials with nontrivial relations between their roots*, Acta Arith. **82** (1997), 293–302.

[DM] J. D. Dixon et B. Mortimer, *Permutation groups*, Springer-Verlag, New York, 1996.

[F] W. Feit, *Characters of finite groups*, W. A. Benjamin, New York-Amsterdam, 1967.

[G1] K. Girstmair, *Linear dependence of zeros of polynomials and construction of primitive elements*, Manuscripta Math. **39** (1982), 81–97.

[G2] K. Girstmair, *Linear relations between roots of polynomials*, Acta Arith. **89** (1999), 53-96.

[S] J. P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis, 5e édition*, Hermann, Paris, 1998.

[T] O. Tamaschke, *Schur-Ringe*, B. I. Hochschulskripten, vol. 735a*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1970.

F. LALANDE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS SUD-BAT 425
91405 ORSAY CEDEX
FRANCE
COURRIEL : Franck.Lalande@math.u-psud.fr