Ann. Sci. Math. Québec **27** (2003), no. 2, 123–134.

SUR LE 2-GROUPE DE CLASSES DU CORPS DE GENRES DE CERTAINS CORPS BIQUADRATIQUES

ABDELMALEK AZIZI ET ALI MOUHIB

RÉSUMÉ. Soient K un corps biquadratique, $K^{(*)}$ le corps de genres de K, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$, $G = \text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ et C_2 la 2-partie du groupe de classes de K. On suppose que $C_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; alors on montre que la 2-partie du groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique, et si $[K^{(*)} : K] = 2$, alors le groupe G ne peut jamais être semi-diédral.

ABSTRACT. Let K be a biquadratic field, $K^{(*)}$ the genus field of K, $K_2^{(1)}$ the 2-Hilbert class field of K, $K_2^{(2)}$ the 2-Hilbert class field of $K_2^{(1)}$, $G = \text{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ and C_2 the 2-component of the class group of K. If $C_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, then the 2-component of the class group of $K^{(*)}$ is cyclic, and if $[K^{(*)} : K] = 2$, then the group G can never be semi-dihedral.

1. Introduction. Soient K un corps de nombres, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$, $K^{(*)}$ le corps de genres de K, G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$ et C_2 la 2-partie du groupe de classes de K. On suppose que $C_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; alors $K_2^{(1)}$ contient trois sous-extensions quadratiques sur K qu'on désigne par K_1, K_2 et K_3. Dans [Ki-76], Kisilevsky a lié le problème de capitulation dans les extensions K_1/K, K_2/K et K_3/K à la structure du groupe G et aussi à la structure de la 2-partie du groupe de classes de ces trois extensions (voir théorème 1).

Dans le cas d'un corps biquadratique K, le corps de genres $K^{(*)}$ est inclus dans $K_2^{(1)}$. Si $K^{(*)}/K$ est une extension quadratique, alors $K^{(*)}$ est l'un des corps K_1, K_2 ou K_3. D'où l'intérêt d'étudier la structure du 2-groupe de classes de $K^{(*)}$, afin de trouver des informations sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de K dans les extensions intermédiaires de $K_2^{(1)}/K$.

Dans le présent travail on suppose que K est un corps biquadratique tel que $C_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on montre le résultat principal suivant.

Reçu le 22 octobre 2000 et, sous forme définitive, le 12 septembre 2001.

Théorème.

1) *Le 2-groupe de classes de* $K^{(*)}$ *est cyclique.*
2) *Si de plus* $[K^{(*)} : K] = 2$, *alors le groupe* G *n'est jamais semi-diédral.*

2. Résultats préliminaires. Ce paragraphe est réservé à certains résultats utiles dans le reste de l'article. Le premier résultat concerne la finitude des p-corps de classes de Hilbert d'un corps de nombres dont le p-groupe de classes est cyclique.

Proposition 1. *Soient* F *un corps de nombres et* p *un nombre premier. On note par* $F_p^{(1)}$ *le* p*-corps de classes de Hilbert de* F *et par* $F_p^{(2)}$ *le* p*-corps de classes de Hilbert de* $F_p^{(1)}$. *Si* $F_p^{(1)}/F$ *est cyclique alors* $F_p^{(1)} = F_p^{(2)}$.

Preuve. Voir [Ta-37]. □

Dans la suite on va rappeler deux résultats concernant la théorie des groupes. Soient Q_n le groupe des quaternions, D_n le groupe diédral et S_n le groupe semi-diédral d'ordres 2^n. On définit ces groupes comme suit :

$Q_n = \langle x, y\rangle$ où $x^{2^{n-2}} = y^2 = a,\ a^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1}$;
$D_n = \langle x, y\rangle$ où $x^{2^{n-1}} = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{-1}$;
$S_n = \langle x, y\rangle$ où $x^{2^{n-1}} = y^2 = 1,\ y^{-1}xy = x^{2^{n-2}-1}$.

Proposition 2. *Soient* H *un groupe d'ordre* 2^n *où* $n > 1$ *et* H' *le groupe des commutateurs de* H. *Si le groupe* H/H' *est de type* $(2, 2)$, *alors* H' *est cyclique.*

Preuve. Voir [Ta-37]. □

Proposition 3. *Soient* H *un groupe d'ordre* 2^n *où* $n > 1$ *et* H' *le groupe des commutateurs de* H. *Si le groupe* H/H' *est de type* $(2, 2)$, *alors* H *est isomorphe à* D_n, Q_n *ou à* S_n.

Preuve. Voir [Ki-76]. □

Concernant le problème de capitulation, pour un corps de nombres dont le 2-groupe de classes est de type $(2, 2)$, on cite les résultats suivants :

Soit K un corps de nombres, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et G le groupe de Galois de $K_2^{(2)}/K$. Soit L une sous-extension propre de $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K)$; on note par C_K (resp. C_L) le groupe de classes de K (resp. L). Soient j l'application de C_K vers C_L qui fait correspondre à la classe d'un idéal I de K la classe de l'idéal engendré par I dans L et $\mathcal{N}$ la norme de L/K.

Définition. On dit que L est de type (A) si et seulement si $|\,\mathrm{Ker}(j) \cap \mathcal{N}(C_L)| > 1$; dans le cas contraire, on dit que L est de type (B).

Le groupe G' des commutateurs de G est isomorphe au groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K_2^{(1)})$, tandis que le groupe G/G' est isomorphe au groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K)$ qui est encore isomorphe à la 2-partie du groupe C_K. On suppose que la 2-partie de C_K est de type

$(2,2)$, donc G/G' est de type $(2,2)$. Alors d'après la proposition 3, le groupe G est isomorphe à D_n, Q_n ou à S_n. Dans tous ces cas, $G' = \langle x^2 \rangle$ et les trois sous-groupes d'indice 2 de G sont $H_1 = \langle x \rangle$, $H_2 = \langle x^2, y \rangle$ et $H_3 = \langle x^2, xy \rangle$. Soient K_1, K_2 et K_3 les trois extensions de $K_2^{(1)}/K$ telles que K_i est le sous-corps de $K_2^{(2)}$ laissé fixe par H_i et j_i l'application j définie pour $L = K_i$. Si $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$, il existe une sous-extension $M/K_2^{(1)}$ de $K_2^{(2)}/K_2^{(1)}$ de degré 2 sur $K_2^{(1)}$.

Théorème 1. *On suppose que G/G' est de type $(2,2)$. Alors on a :*

1) *Si $K_2^{(2)} = K_2^{(1)}$ alors les corps K_i sont de type (A), $|\operatorname{Ker}(j_i)| = 4$ pour $i = 1,2,3$ et G est de type $(2,2)$.*
2) *Si $\operatorname{Gal}(M/K) \simeq Q_3$ alors chaque K_i est de type (A), $|\operatorname{Ker}(j_i)| = 2$ pour $i = 1,2,3$ et $G \simeq Q_3$.*
3) *Si $\operatorname{Gal}(M/K) \simeq D_3$ alors K_2 et K_3 sont de type (B) et $|\operatorname{Ker}(j_2)| = |\operatorname{Ker}(j_3)| = 2$. De plus, si K_1 est de type (B), alors $|\operatorname{Ker}(j_1)| = 2$ et $G \simeq S_m$. Si K_1 est de type (A) et $|\operatorname{Ker}(j_1)| = 2$ alors $G \simeq Q_m$. Enfin si K_1 est de type (A) et $|\operatorname{Ker}(j_1)| = 4$ alors $G \simeq D_m$.*

Preuve. Voir [Ki-76]. □

Remarque 1. Le 2-groupe de classes de K_2 (resp. K_3) est cyclique si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1) $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$;
2) $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ et $G \simeq Q_3$.

On finit par un résultat concernant le 2-groupe de classes des corps de nombres de type $(2^m, 2^n)$ où m et n sont deux entiers strictement positifs.

Proposition 4. *Soient L un corps de nombres dont le 2-groupe de classes est de type $(2^m, 2^n)$ où m et n sont deux entiers strictement positifs et L^1 le 2-corps de classes de Hilbert de L. S'il existe une extension quadratique non ramifiée de L dont la 2-partie du nombre de classes est égale à 2^{m+n-1}, alors la 2-partie du nombre de classes des trois extensions quadratiques non ramifiées de L est égale à 2^{m+n-1} et la tour des 2-corps de classes de Hilbert de L s'arrête en L^1.*

Preuve. Voir [Be-Le-Sn-98]. □

3. Étude de la structure du 2-groupe de classes de $K^{(*)}$. Dans ce paragraphe, on désigne par K un corps biquadratique, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et $K^{(*)}$ le corps de genres de K.

Théorème 2. *On garde les mêmes notations et on suppose que $\operatorname{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors le cas $K^{(*)} = K$ ne peut pas se produire. De plus si $K^{(*)} = K_2^{(1)}$, alors le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique.*

Preuve. Le cas $K^{(*)} = K$ ne peut pas se produire. En effet, soit $H = \operatorname{Gal}(K_2^{(1)}/\mathbb{Q})$; alors le groupe des commutateurs de H est $H' = \operatorname{Gal}(K_2^{(1)}/K)$. Comme $H/H' \simeq$

$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors d'après la proposition 2, H' est cyclique. Ce qui est contraire aux hypothèses, d'où la première partie du théorème.

Si $K^{(*)} = K_2^{(1)}$, alors le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique. En effet, on pose $H = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$; le groupe H' des commutateurs de H est égal à $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K^{(*)})$. Comme $H/H' \simeq \mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors, d'après la proposition 2, le groupe H' est cyclique. Ainsi, le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique. $\square$

Dans la suite de cet article on garde les mêmes notations. De plus on suppose que $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et que $[K^{(*)} : K] = 2$. On note par K_1 et K_2 les deux extensions quadratiques non ramifiées de K autres que $K^{(*)}$. De plus, on note par F_i où $i \in \{1, 2, 3\}$ les trois sous-corps quadratiques de K. Notre but est de montrer que le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique.

Proposition 5. *On garde les notations précédentes et on suppose qu'il existe* $i \in \{1, 2, 3\}$ *tel que le nombre des 2-classes ambiguës de l'extension* K/F_i *est égal à 2. Alors le 2-groupe de classes de* $K^{(*)}$ *est cyclique.*

Preuve. Comme le corps de genres $K^{(*)}$ est différent de $K_2^{(1)}$, alors $K_2^{(1)}/\mathbb{Q}$ est une extension non abélienne. Soit $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que le nombre des 2-classes ambiguës de l'extension K/F_i est égal à 2. Soit $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/F_i)$. Puisque $K^{(*)}$ est la plus grande extension abélienne de F_i quit soit contenue dans $K_2^{(2)}$, alors le groupe G' des commutateurs de G est égal à $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K^{(*)})$ et G/G' est isomorphe à $\mathrm{Gal}(K^{(*)}/F_i)$. Comme $\mathrm{Gal}(K^{(*)}/F_i)$ est de type $(2, 2)$, alors d'après la proposition 2, le groupe $G' = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K^{(*)})$ est cyclique. $\square$

Dans la suite on va distinguer les deux cas suivants :

1) il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que l'extension K/F_i est non ramifiée ;
2) $\forall\, i \in \{1, 2, 3\}$, l'extension K/F_i est ramifiée.

On commence par le premier cas.

3.1. Cas où K/F_i est non ramifiée pour un $i \in \{1, 2, 3\}$. On suppose que l'extension K/F_1 est non ramifiée ; alors on a le théorème suivant :

Théorème 3. *On garde les notations précédentes et on suppose que* K/F_1 *est non ramifiée. Alors le 2-groupe de classes de* $K^{(*)}$ *est cyclique.*

Preuve. On suppose que K/F_1 est non ramifiée. Comme $K^{(*)}/F_1$ est une extension abélienne, non ramifiée de degré 4, alors $h(F_1) = 4$ ou $h(F_1) = 8$ ($h(M)$ désigne le 2-nombre de classes de M).

On suppose que $h(F_1) = 8$; alors on distingue les cas suivants :

Si le 2-groupe de classes de F_1 est de type $(2, 2, 2)$, alors le corps de genres de F_1 est de degré 8 sur F_1. Par suite $K_2^{(1)}$ est le corps de genres de F_1 et $K^{(*)} = K_2^{(1)}$, ce qui est contraire aux hypothèses.

Si le 2-groupe de classes de F_1 est cyclique, alors $K_2^{(1)}/K$ est cyclique. Ce qui est contraire au fait que le 2-groupe de classes de K est de type $(2, 2)$.

Si le 2-groupe de classes de F_1 est de type $(2, 2^2)$, alors d'après la proposition 4, on trouve que $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$. Par conséquent, le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique d'ordre 2.

On suppose que $h(F_1) = 4$; alors le 2-groupe de classes de F_1 est de type $(2, 2)$. Sinon, le 2-groupe de classes de F_1 serait cyclique, ce qui entraîne que $K^{(*)}/F_1$ est cyclique. Ce qui est impossible car $K^{(*)}/\mathbb{Q}$ est de type $(2, 2, 2)$. Ainsi, F_1 est de 2-groupe de classes de type $(2, 2)$ et dont le 2-corps de classes de Hilbert est égal à $K^{(*)}$. Enfin, par application de la proposition 5, on trouve que le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique. Ainsi le théorème est démontré. $\square$

3.2. Cas où K/F_i est ramifiée pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. On garde les notations du paragraphe précédent. De plus, on désigne par $h(M)$ le 2-nombre de classes de M.

Proposition 6. *On suppose que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, l'extension K/F_i est ramifiée. Alors les corps F_i sont de 2-nombre de classes égal à 1 ou à 2.*

Preuve. Comme l'extension K/F_i est ramifiée de degré 2, alors $h(F_i)$ divise $h(K)$. Ce qui entraîne que $h(F_i) = 1, 2$ ou 4. On suppose que $h(F_i) = 4$, alors on distingue deux cas :

Si le 2-groupe de classes de F_i est de type $(2, 2)$, alors le corps de genres $F_i^{(*)}$ de F_i est de degré 4 sur F_i. Comme $F_i^{(*)}$ est contenue dans $K^{(*)}$ et $[K^{(*)} : F_i] = 4$, alors $K^{(*)}$ est le corps de genres de F_i. Ce qui est impossible, car $K^{(*)}/F_i$ est ramifiée.

Si le 2-groupe de classes de F_i est cyclique d'ordre 4, on note par L le 2-corps de classes de Hilbert de F_i et Gal(L/F_i) est cyclique d'ordre 4. Comme L et K sont F_i-linéairement disjoints, alors Gal(LK/K) est isomorphe à Gal(L/F_i). Par conséquent Gal(LK/K) est cyclique d'ordre 4, ce qui est contraire aux hypothèses. Ainsi la proposition est démontrée. $\square$

Théorème 4. *On suppose que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, l'extension K/F_i est ramifiée. Alors le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique.*

Preuve. On distingue deux cas :

1) On suppose qu'il existe une sous-extension quadratique F_i de K telle que le nombre des 2-classes ambiguës de K/F_i est égal à 2. Alors d'après la proposition 5, le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique.

2) On suppose que $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, le nombre des 2-classes ambiguës de K/F_i est égal à 4. Ceci entraîne que $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, l'extension $K_2^{(1)}/F_i$ est abélienne ; ainsi K_1/F_i est abélienne pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Soit σ un $\mathbb{Q}$-isomorphsime de K_1 ; alors il existe $i_0 \in \{1, 2, 3\}$ tel que σ est un F_{i_0}-isomorphisme ; par suite $\sigma(K_1) \subset K_1$, car K_1/F_{i_0} est galoisienne. On tire ainsi que l'extension $K_1/\mathbb{Q}$ est galoisienne. De plus, $K_1/\mathbb{Q}$ est non abélienne car sinon, $K_2^{(1)} = K^{(*)}K_1/\mathbb{Q}$ serait abélienne.

Comme K est l'extension abélienne maximale de $\mathbb{Q}$ contenue dans K_1, alors le groupe H' des commutateurs de $H =$ Gal$(K_1/\mathbb{Q})$ est égal à Gal(K_1/K). Puisque H/H' est de type $(2, 2)$, alors d'après la proposition 3, le groupe H est isomorphe à

D_3, Q_3 ou à S_3. Ainsi H est isomorphe à Q_3 ou à D_3 (car H est non abélien). Par conséquent, il existe un sous-groupe cyclique de H d'indice 2 ; on note par F_j où $j \in \{1,2,3\}$, le sous-corps quadratique de K tel que $\mathrm{Gal}(K_1/F_j)$ est cyclique. Comme $\mathrm{Gal}(K_1/F_j)$ est cyclique, alors il existe une infinité de premiers de F_j qui restent inertes dans K_1 (voir [Ja-73], page 136). Soit $\mathcal{P}$ un premier de F_j qui reste inerte dans K_1. On pose $\mathcal{P}O_K = \mathcal{Q}$ un premier de K (O_M désigne l'anneau des entiers de M). L'idéal premier $\mathcal{Q}$ de K est non principal. En effet :

Comme K_1/K est une extension abélienne non ramifiée, alors la loi de réciprocité est vérifiée pour cette extension, c'est-à-dire $i(K^*) \subset \mathrm{Ker}(\phi_{K_1/K})$ où $\mathrm{Ker}(\phi_{K_1/K})$ désigne le noyau de l'application d'Artin dans l'extension K_1/K et $i(K^*)$ désigne le groupe des idéaux fractionnaires principaux de K. On note par l la partie impaire du nombre de classes de K. L'idéal $\mathcal{Q}^l$ est non principal, car sinon on aura $\mathcal{Q}^l \in \mathrm{Ker}(\phi_{K_1/K})$ et comme l est impair et l'extension K_1/K est de degré une puissance de deux, alors $\mathcal{Q} \in \mathrm{Ker}(\phi_{K_1/K})$, et par suite $\mathcal{Q}$ se décompose dans K_1. Ce qui est contraire au fait que $\mathcal{Q}$ est inerte dans K_1. Ainsi la classe $[\mathcal{Q}^l]$ est une 2-classe de K non triviale ; par suite, l'idéal $\mathcal{P}^l$ est non principal.

Soit S le 2-corps de classes de Hilbert de F_j, comme $[\mathcal{P}^l]$ est une 2-classe non triviale de F_j, alors $\mathcal{P}^l O_S$ est principal. D'après la proposition 5, on a $[S : F_j] = 2$ (car $\mathcal{P}^l$ est non principal) et S est le coprs de genres de F_j. Ainsi on a $S \subset K^{(*)}$. D'autre part, l'extension $K^{(*)}/F_j$ est de type $(2,2)$ et comme $\mathcal{P}$ est inerte dans K, alors $\mathcal{Q}$ doit se décomposer dans $K^{(*)}$. On pose $\mathcal{Q}O_{K^{(*)}} = \mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2$ où $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont deux idéaux premiers de $K^{(*)}$.

On a $\mathcal{P}^l O_{K^{(*)}} = \mathcal{Q}_1^l \mathcal{Q}_2^l = \mathcal{P}^l O_S O_{K^{(*)}} = \mathcal{Q}^l O_{K^{(*)}}$ qui est principal. Ainsi, le corps $K^{(*)}$ est de type (A) et d'après le théorème 1, le corps $K^{(*)}$ est de 2-groupe de classes cyclique. Ainsi le théorème est démontré. □

Corollaire 1. *On suppose que la suite des 2-corps de classes de Hilbert de K ne s'arrête pas en $K_2^{(1)}$. Alors seulement deux classes de K capitulent dans K_1 et K_2.*

Preuve. Comme le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique, alors d'après le théorème 1 on a le résultat. □

Théorème 5. *Soit K un corps biquadratique tel que son 2-groupe de classes est de type $(2,2)$ et son corps de genres $K^{(*)}$ est différent de K. Alors le groupe $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien, diédral ou quaternionique. Plus précisément G ne peut jamais être semi-diédral.*

Preuve. On garde les notations précédentes et on distingue deux cas.

1) On suppose qu'il existe $i \in \{1,2,3\}$ tel que K/F_i est non ramifiée. Dans la preuve du théorème 3, on a vu que le 2-groupe de classes de F_i est de type $(2,2)$ ou bien de type $(2,2^2)$. Si F_i est de type $(2,2^2)$, alors $K_2^{(2)} = K_2^{(1)}$ (voir proposition 4) ; par conséquent, le groupe G est abélien. Si F_i est de type $(2,2)$, alors $K^{(*)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de F_i. Soit $H = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/F_i)$; comme $H' = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K^{(*)})$,

alors H/H' est de type $(2,2)$. Ainsi, d'après la proposition 3, le groupe H est diédral, quaternionique ou semi-diédral. Comme G est un sous-groupe de H d'indice 2, alors le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien, diédral ou quaternionique.

2) On suppose que pour tout $i \in \{1,2,3\}$, l'extension K/F_i est ramifiée. On distingue deux cas :

Si pour tout $i \in \{1,2,3\}$, le nombre des 2-classes ambiguës de l'extension K/F_i est égal à 4, alors le corps $K^{(*)}$ est de type (A) (voir preuve du théorème 4). Ainsi, d'après le théorème 1, le groupe G est abélien, diédral ou quaternionique.

S'il existe $i \in \{1,2,3\}$ tel que le nombre des 2-classes ambiguës de l'extension K/F_i est égal à 2, alors $K^{(*)}$ est l'extension abélienne maximale de F_i contenue dans $K_2^{(2)}$. En utilisant le même raisonnement que dans 1), on trouve que G est abélien, diédral ou quaternionique. Ainsi le théorème est démontré. $\square$

3.3. Applications. Soit K un corps biquadratique, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K, $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$ et $K^{(*)}$ le corps de genres de K. On note par K_1 et K_2 les deux extensions quadratiques non ramifiées de K autres que $K^{(*)}$ et par Q_K l'indice des unités de K.

Application 1. Soient p_1 et p_2 deux nombres premiers tels que

$$p_1 \equiv 1 \pmod 8, \quad p_2 \equiv 5 \pmod 8 \quad \text{et} \quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1\,.$$

D'après [Az-93], le 2-groupe de classes de $K = \mathbb{Q}\left(i, \sqrt{p_1p_2}\right)$ est de type $(2,2)$.

Le corps de genres de K est $K^{(*)} = \mathbb{Q}\left(i, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}\right)$. Comme $[K^{(*)} : K] = 2$, alors le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique.

D'après [Az-99], $K_2^{(2)} \neq K_2^{(1)}$ et toutes les 2-classes de K capitulent dans $K^{(*)}$. De plus, deux 2-classes de K capitulent dans K_1 et K_2. Par suite le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral.

Application 2. Dans [Az-Be], les corps suivants ont des 2-groupes de classes de type $(2,2)$.

1) $K = \mathbb{Q}\big(\sqrt{-2}, \sqrt{2pq}\,\big)$ où p et q sont des premiers vérifiant

$$p \equiv 1 \pmod 8, \quad q \equiv -1 \pmod 4, \quad \left(\frac{p}{q}\right) = 1$$

et $Q_K = 2$.

2) $K = \mathbb{Q}\big(\sqrt{-2}, \sqrt{p_1p_2}\,\big)$ où p_1 et p_2 sont des premiers vérifiant

$$p_1 \equiv 5 \pmod 8, \quad p_2 \equiv 1 \pmod 8 \quad \text{et} \quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1\,.$$

Dans le cas 1), le corps de genres de K est $K^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{2p}, \sqrt{-2})$. Comme $[K^{(*)} : K] = 2$, alors le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique.

D'après [Az-Be], on a $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ et toutes les 2-classes de K capitulent dans $K^{(*)}$. De plus, seulement deux 2-classes de K capitulent dans K_1 et K_2. Ainsi le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral.

Dans le cas 2), le corps de genres de K est $K^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2})$. Comme $[K^{(*)} : K] = 2$, alors le 2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique.

D'après [Az-Be], on a $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ et il existe deux 2-classes de K qui capitulent dans $K^{(*)}$. Alors, d'après le corollaire 1, on a deux 2-classes de K qui capitulent dans K_1 et K_2. D'après le théorème 1, on trouve que $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est quaternionique ou semi-diédral. Or, on sait d'après le théorème 5 que le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ ne peut jamais être semi-diédral ; donc $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est quaternionique.

Application 3. Avant de donner la dernière application, on va rappeler certains résultats concernant le rang du 2-groupe de classes de certains corps biquadratiques (voir [Az-Mo]).

Soient m et d deux entiers naturels sans facteurs carrés et $S = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ un corps biquadratique tel que $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ est de nombre de classes impair. On note par H le 2-groupe de classes de S, r le nombre des premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ramifiés dans S et e l'entier naturel défini par

$$2^e = \left[E_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})} : \mathcal{N}_{S/\mathbb{Q}(\sqrt{m})}(S^*) \cap E_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}\right]$$

où $E_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$ est le groupe des unités de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ et $\mathcal{N}_{S/\mathbb{Q}(\sqrt{m})}$ l'application norme relativement à l'extension $S/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Alors d'après [Az-Mo] on a $\mathrm{rang}(H) = r - 1 - e$. Si on note par ε_m l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, alors la détermination de l'entier e revient à chercher si -1, ε_m et $-\varepsilon_m$ sont des normes ou non dans l'extension $S/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Ce qui revient à chercher les valeurs

$$\left(\frac{-1, d}{\mathcal{P}}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\varepsilon_m, d}{\mathcal{P}}\right)$$

du symbole du reste normique pour tous les premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ramifiés dans S. Ainsi $e \in \{0, 1, 2\}$ et plus précisément, on a :

i) $e = 0$ si et seulement si -1 et ε_m sont des normes dans $S/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$;

ii) $e = 2$ si et seulement si -1, ε_m et $-\varepsilon_m$ ne sont pas des normes dans $S/\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Dans ce qui suit, on étudie le corps $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{p'qq'})$ tel que p, p', q et q' sont des premiers vérifiant $p \equiv p' \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod 4$ et

$$\left(\frac{p}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{p}{q'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p'}{q}\right)\left(\frac{p'}{q'}\right) = -1\,.$$

On sait d'après [Az-Mo] que le 2-groupe de classes de K est de type $(2, 2)$. Le corps de genres de K est $K^{(*)} = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{p'}, \sqrt{qq'})$. Comme $[K^{(*)} : K] = 2$, alors le

2-groupe de classes de $K^{(*)}$ est cyclique et le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ ne peut jamais être semi-diédral.

On note dans la suite par $h(M)$ le 2-nombre de classes du corps M, $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}}$ la norme relative à l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}$ et par ε_m la norme de l'unité fondamentale de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$.

Théorème 6. *Soient p, p', q et q' des premiers vérifiant :*

$$p \equiv p' \equiv -q \equiv -q' \equiv 1 \pmod 4,$$

$$\left(\frac{p}{p'}\right) = -\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{p}{q'}\right) = 1, \quad \left(\frac{p'}{q}\right)\left(\frac{p'}{q'}\right) = -1$$

et soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{p'qq'})$. Alors $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$ si et seulement si

$$\left(\frac{p}{p'}\right)_4 = \left(\frac{p'}{p}\right)_4 = 1\,.$$

De plus, le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral.

Preuve. On pose $L = \mathbb{Q}(\sqrt{qq'}, \sqrt{pp'})$, alors le 2-groupe de classes H de L est cyclique. En effet, comme $h(\mathbb{Q}(\sqrt{qq'})) = 1$, alors $\mathrm{rang}(H) = r - 1 - e$ où r et e sont les entiers naturels définis relativement à l'extension $L/\mathbb{Q}(\sqrt{qq'})$. Comme

$$\left(\frac{qq'}{p}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{qq'}{p'}\right) = -1,$$

on a $r = 3$ et par suite $\mathrm{rang}(H) = 2 - e$. D'autre part, on a que $K^{(*)}/L$ est une extension abélienne non ramifiée de degré 2, donc $e \neq 2$.

On pose $pO_{\mathbb{Q}(\sqrt{qq'})} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2$ où $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ramifiés dans K et $O_{\mathbb{Q}(\sqrt{qq'})}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$. On remarque que $\varepsilon_{qq'} = qu^2$ où $u \in \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ et par suite

$$\left(\frac{\varepsilon_{qq'}, pp'}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{qu^2, pp'}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{q, p}{\mathcal{P}_1}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -1\,.$$

Ainsi $\varepsilon_{qq'}$ n'est pas norme dans l'extension $K/\mathbb{Q}(\sqrt{qq'})$; donc $e = 1$ et le 2-groupe de classes de L est cyclique.

Comme l'extension $K^{(*)}/L$ est abélienne et non ramifiée et que le 2-groupe de classes de L est cyclique, alors d'après la proposition 1, les corps $K^{(*)}$ et L ont le même 2-corps de classes de Hilbert qui n'est autre que $K_2^{(2)}$. Par suite on a $h(K^{(*)}) = \frac{1}{2}h(L)$, ainsi

$$K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)} \iff 2 \mid h(K_2^{(1)}) \iff 4 \mid h(K^{(*)}) \iff 8 \mid h(L)\,.$$

On se ramène à déterminer le 2-nombre de classes de L.

On sait d'après [Wa-66] que

$$h(L) = \frac{Q_L h\big(\mathbb{Q}\big(\sqrt{qq'}\,\big)\big) h\big(\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'}\,\big)\big) h\big(\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'qq'}\,\big)\big)}{4}\,.$$

De plus, d'après [Ka-76], on a $h\big(\mathbb{Q}\big(\sqrt{qq'}\,\big)\big) = 1$ et $h\big(\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'qq'}\,\big)\big) \equiv 4 \pmod 8$; par suite $h(L) = Q_L h\big(\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'}\,\big)\big)$. On distingue les cas suivants :

- $\left(\dfrac{p}{p'}\right)_4 \neq \left(\dfrac{p'}{p}\right)_4$

  D'après [Kuv-95], on a $h\big(\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'}\,\big)\big) \equiv 2 \pmod 4$ et $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{pp'}\,)/\mathbb{Q}}(\varepsilon_{pp'}) = 1$. On trouve que le système fondamental des unités de L est $\{\varepsilon_{qq'}, \varepsilon_{pp'}, \sqrt{\varepsilon_{pp'}\varepsilon_{pp'qq'}}\}$; par suite $Q_L = 2$ et $h(L) = 4$. Donc, $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$ et $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien.

- $\left(\dfrac{p}{p'}\right)_4 = \left(\dfrac{p'}{p}\right)_4 = -1$

  D'après [Kuv-95], on a $h\big(\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'}\,\big)\big) \equiv 4 \pmod 8$ et $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{pp'}\,)/\mathbb{Q}}(\varepsilon_{pp'}) = -1$. On trouve que le système fondamental des unités de L est $\{\varepsilon_{qq'}, \varepsilon_{pp'}, \varepsilon_{pp'}\varepsilon_{pp'qq'}\}$; par suite $Q_L = 1$ et $h(L) = 4$. Donc, $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$ et $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est abélien.

- $\left(\dfrac{p}{p'}\right)_4 = \left(\dfrac{p'}{p}\right)_4 = 1$

  D'après [Kuv-95], on a $4 \,\big|\, h\big(\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'}\,\big)\big)$. Si de plus $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{pp'}\,)/\mathbb{Q}}(\varepsilon_{pp'}) = -1$, alors $8 \,\big|\, h\big(\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'}\,\big)\big)$. Par suite, $8 \,\big|\, h(L)$ et $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. Si $\mathcal{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{pp'}\,)/\mathbb{Q}}(\varepsilon_{pp'}) = 1$, le système fondamental des unités de L est $\{\varepsilon_{qq'}, \varepsilon_{pp'}, \sqrt{\varepsilon_{pp'}\varepsilon_{pp'qq'}}\}$; par suite $Q_L = 2$. Donc, $8 \mid h(L)$ et $K_2^{(2)} = K_2^{(1)}$.

D'où la première partie du théorème.

Montrons que $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral. On sait d'après la théorie des genres, que le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'qq'}\,\big)$ est de rang 2. Comme $h\big(\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'qq'}\,\big)\big) \equiv 4 \pmod 8$, alors le 2-groupe de classes de $\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'qq'}\,\big)$ est de type $(2,2)$. On remarque que $K^{(*)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'qq'}\,\big)$ et on a que $K_2^{(2)}$ est le 2-corps de classes de Hilbert de $K^{(*)}$. D'après [Be-Sn], on a $\mathrm{Gal}\big(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'qq'}\,\big)\big)$ est diédral. Or $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est un sous-groupe d'indice 2 dans $\mathrm{Gal}\big(K_2^{(2)}/\mathbb{Q}\big(\sqrt{pp'qq'}\,\big)\big)$, donc le groupe $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ est diédral. De plus, d'après le théorème 1, toutes les classes de C_2 capitulent dans $K^{(*)}$. $\square$

English extended abstract. Let K be a biquadratic field, $K^{(*)}$ the genus field of K, $K_2^{(1)}$ the Hilbert 2-class field of K, $K_2^{(2)}$ the Hilbert 2-class field of $K_2^{(1)}$, $G = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$. The fields F_i, $i \in \{1,2,3\}$, are the three quadratic fields contained in K. We suppose that $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Then $K_2^{(1)}$ contains three extensions K_i/K, $i \in \{1,2,3\}$. It is known by genus theory that $K_2^{(1)}$ contains $K^{(*)}$, and by group theory, we prove that $K^{(*)} \neq K$. If $K^{(*)} = K_2^{(1)}$, then the 2-component of

the class group of $K^{(*)}$ is cyclic (Théorème 2). If $K^{(*)}/K$ is a quadratic extension, then there exists $i_0 \in \{1,2,3\}$ such that $K^{(*)} = K_{i_0}$. Our goal is to prove that if $\mathrm{Gal}(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and $[K^{(*)} : K] = 2$, then we have the following:

1) The 2-component of the class group of $K^{(*)}$ is cyclic (Théorème 3 and Théorème 4).
2) The group $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K)$ can never be semi-dihedral (Théorème 5).

Two cases occur:

First case. *There exists $i \in \{1,2,3\}$ such that the extension K/F_i is unramified.*

Second case. *For any $i \in \{1,2,3\}$, the extension K/F_i is ramified.*

In the first case, we have $C_{2,F_i} \simeq \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ or $C_{2,F_i} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (C_{2,F_i} is the 2-component of the class group of F_i).

If $C_{2,F_i} \simeq \mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, then the 2-component of the class group of $K^{(*)}$ is cyclic of order 2 and $K_2^{(1)}$ is the Hilbert 2-class field of $K^{(*)}$. Moreover, $K_2^{(1)} = K_2^{(2)}$ and the group G is abelian. If $C_{2,F_i} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, then $K^{(*)}$ is the Hilbert 2-class field of F_i. Hence the 2-component of the class group of $K^{(*)}$ is cyclic. In addition, by group theory, the group $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/F_i)$ is quaternion, dihedral or semi-sihedral. Since G is a subgroup of $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/F_i)$ of index 2, then G can never be semi-dihedral.

In the second case, if there exists $i \in \{1,2,3\}$ such that the number of ambiguous 2-classes of K/F_i is equal to 2, then the commutator subgroup of $H = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/F_i)$ is $H' = \mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/K^{(*)})$. Since $H/H' \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, then H' is cyclic. Moreover the 2-component of the class group of $K^{(*)}$ is cyclic. As before (first case), G is a subgroup of $\mathrm{Gal}(K_2^{(2)}/F_i)$ of index 2, so G can never be semi-dihedral. If the number of ambiguous 2-classes of K/F_i, $i \in \{1,2,3\}$, is equal to 4, then we prove that $K^{(*)}$ is of type (A), i.e. $|\,\mathrm{Ker}(j) \cap \mathcal{N}(C_{K^*})| > 1$. By [Ki-76], the 2-component of the class group of $K^{(*)}$ is cyclic and the group G can never be semi-dihedral.

To illustrate these results, we give at the end of this paper some applications to the capitulation problem.

Bibliographie

[Az-93] A. Azizi, *Capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$*, Thèse de doctorat, Québec, Université Laval, 1993.

[Az-97] A. Azizi, *Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, i)$*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), 127–130.

[Az-99] A. Azizi, *Capitulation of the 2-ideal classes of $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1p_2}, i)$ where p_1 and p_2 are primes such that $p_1 \equiv 1 \pmod 8$, $p_2 \equiv 5 \pmod 8$ and $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -1$*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 208, Dekker, New York, 2000, pp. 13–19.

[Az-00] A. Azizi, *Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2pq}, i)$ où $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$*, Acta Arith. **94** (2000), 383–399.

[Az-Be] A. Azizi et I. Benhamza, *Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2})$*, Oudja, Université Mohamed I, 1999.

[Az-Mo] A. Azizi et A. Mouhib, *Sur le rang du* 2*-groupe de classes de* $\mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ *où* $m = 2$ *ou un premier* $p \equiv 1 \pmod 4$, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 2741–2752.

[Be-Le-Sn-98] E. Benjamin, F. Lemmermeyer et C. Snyder, *Real quadratic fields with abelian* 2*-class field tower*, J. Number Theory **73** (1998), 182–194.

[Be-Sn] E. Benjamin et C. Snyder, *Real quadratic number fields with* 2*-class group of type* $(2, 2)$, Math. Scan. **76** (1995), 161–178.

[Be-97] I. Benhamza, *Unités des corps* $\mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \sqrt{-d})$ *et application au problème de capitulation sur le corps* $\mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{-2})$, Thèse de doctorat, Oudja, Université Mohamed I, 1997.

[Ja-73] G. J. Janusz, *Algebraic Number Fields*, Academic Press, New York-London, 1973.

[Ka-76] P. Kaplan, *Sur le* 2*-groupe des classes d'idéaux des corps quadratiques*, J. Reine Angew. Math. **283/284** (1976), 313–363.

[Ki-76] H. Kisilevsky, *Number fields with class number congruent to* 4 *mod* 8 *and Hilbert's theorem 94*, J. Number Theory **8** (1976), 271–279.

[Kuč-95] R. Kučera, *On the parity of the class number of a biquadratic field*, J. Number Theory **52** (1995), 43–52.

[Ta-37] O. Taussky, *A remark on the class field tower*, J. London Math. Soc. **12** (1937), 82–85.

[Wa-66] H. Wada, *On the class number and the unit group of certain algebraic number fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966), 201–209.

A. AZIZI ET A. MOUHIB

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

FACULTÉ DES SCIENCES

UNIVERSITÉ MOHAMMED 1

OUJDA - MAROC

COURRIEL : `azizi@sciences.univ-oujda.ac.ma`