Ann. Sci. Math. Québec **23** (1999), no. 1, 37–48.

UNE FAMILLE D'ONDELETTES BIORTHOGONALES SUR L'INTERVALLE OBTENUE PAR UN SCHÉMA D'INTERPOLATION ITÉRATIVE

GILLES DESLAURIERS, SERGE DUBUC ET DANIEL LEMIRE

RÉSUMÉ. Nous avons déjà montré dans [4] que l'on pouvait obtenir les ondelettes biorthogonales de Cohen, Daubechies et Feauveau en dérivant un certain nombre de fois les fonctions fondamentales de l'interpolation itérative de Lagrange. Nous avons mis au point un nouveau schéma d'interpolation itérative sur l'intervalle dont les dérivées nous permettent de construire des ondelettes sur l'intervalle avec des filtres en nombres rationnels. Nous retrouverons comme cas particulier les ondelettes de l'interpolation des moyennes [5].

ABSTRACT. In [4], we showed that we could get the Cohen-Daubechies-Feauveau biorthogonal wavelets by deriving a certain number of times the fundamental functions of the Lagrange iterative interpolation. We designed a new iterative interpolation scheme from which we get wavelets on the interval with filters having only rational numbers. As a particular case, we get Donoho's average interpolation [5].

1. Interpolation itérative sur l'intervalle.

1.1. Interpolation itérative de Lagrange. Rappelons brièvement le schéma d'interpolation dyadique sur l'axe des réels introduit dans [3]. Nous dirons des réels de la forme $k/2^j$ pour k et j entiers qu'ils sont des nombres dyadiques. Si j est le plus petit entier tel que $x = k/2^j$ pour un certain k entier, alors nous dirons que x est un nombre dyadique de profondeur j. Étant donné une fonction y définie sur les entiers, on prolonge cette fonction sur tous les nombres dyadiques. Pour n entier, $y(n+1/2)$ est définie comme étant $p(n+1/2)$ où p est le polynôme de Lagrange de degré maximal $2N-1$ tel que $p(k) = y(k)$ $\forall k \in [n-N+1, n+N] \cap \mathbf{Z}$. Cette construction peut être itérée.

Si l'on choisit $y(k) = \delta_{k,0}$, alors nous obtiendrons la fonction fondamentale F. F peut être prolongée sur les réels puisqu'elle est uniformément continue sur les nombres dyadiques et on peut obtenir $F \in C^m$ $\forall m$ en choisissant N suffisamment grand ($F \in C^1$ pour $N \geq 2$). Nous noterons par $R(m)$ l'entier minimal tel que pour $N \geq R(m)$, nous avons $F \in C^m$.

Reçu le 27 juillet 1997 et, sous forme définitive, le 7 février 1998.

1.2. Interpolation mixte généralisée. Il existe déjà une généralisation de l'interpolation itérative de Lagrange sur l'intervalle appelée *interpolation mixte* [8]. La dérivée de cette interpolation peut être utilisée pour obtenir les ondelettes de l'interpolation des moyennes sur l'intervalle (voir [5] où Donoho construit une multirésolution duale à la multirésolution de Haar). Pour généraliser cette idée aux splines de degré arbitraire, il nous faut introduire une nouvelle famille de schémas d'interpolation qui généralisent l'interpolation mixte.

Soit $N \geq 2$ un entier : le cas $N = 1$ est traité en détail dans [8]. Choisissons un autre entier $\widetilde{N} > N$, pair si N est pair et impair si N est impair. On sait que $N + \widetilde{N}$ sera pair, on définit donc $K = (N + \widetilde{N})/2$. On supposera aussi que $\widetilde{N}$ est suffisamment grand pour que l'interpolation itérative de Lagrange par des polynômes de degré $\widetilde{N} + N - 1$ ait au moins une régularité C^N (exemples : pour $N = 1$, $\widetilde{N} \geq 3$ et pour $N = 2$, $\widetilde{N} \geq 4$). Étant donné une fonction y définie sur les nombres dyadiques de profondeur j sur l'intervalle $[0, 1]$, on prolonge cette fonction sur tous les nombres dyadiques (j est un entier arbitraire suffisamment grand : $2^j > \widetilde{N}$). Il faut choisir $N - 1$ valeurs pour chacun des bords qui symboliseront les valeurs des $N - 1$ dérivées à chacun des bords correspondants; notons ces valeurs par $\left\{d_k^G\right\}_{k=1}^{N-1}$ et $\left\{d_k^D\right\}_{k=1}^{N-1}$ où les lettres G et D représentent le bord de gauche ($x = 0$) et celui de droite ($x = 1$). Lorsque c'est possible, $y(2^{-j}n + 2^{-j-1})$ est définie comme étant $p(2^{-j}n + 2^{-j-1})$ où p est le polynôme de Lagrange de degré maximal $\widetilde{N} + N - 1$ tel que $p\left(2^{-j}k\right) = y\left(2^{-j}k\right)$ $\forall k \in [n - K + 1, n + K] \cap \mathbf{Z}$. Autrement, si $n - K + 1 < 0$, alors on utilise toujours la valeur $p\left(2^{-j}n + 2^{-j-1}\right)$, mais on définit le polynôme p comme le polynôme de degré maximal $\widetilde{N} + N - 1$ tel que $p(2^{-j}k) = y(2^{-j}k)$ $\forall k \in [0, \widetilde{N}] \cap \mathbf{Z}$ et tel que pour $k = 1, \ldots, N - 1$, nous avons $d^k p/dx^k(0) = d_k^G$. On traite le cas $n + K > 2^j$ d'une façon symétrique. Cette construction peut être itérée.

Remarque 1. Par construction, les polynômes de degré (maximal) $\widetilde{N} + N - 1$ seront préservés c'est-à-dire que si la fonction y choisie à l'origine était un polynôme p de degré $\widetilde{N} + N - 1$ (avec les valeurs $\{d_k^G\}_{k=1}^{N-1}$ et $\{d_k^D\}_{k=1}^{N-1}$ obtenues des dérivées correspondantes), alors le prolongement de y par notre algorithme correspondra exactement au polynôme de départ. Cette propriété nous permettra de construire des ondelettes duales ayant $\widetilde{N}$ moments nuls (les ondelettes primaires auront N moments nuls).

Exemple 1. Supposons que $N = 2$ et $\widetilde{N} = 4$. Pour $1 < k < 2^j - 2$, nous avons

$$y_{j+1,2k+1} = \frac{3y_{j,k-2}}{256} - \frac{25y_{j,k-1}}{256} + \frac{75y_{j,k}}{128} + \frac{75y_{j,k+1}}{128} - \frac{25y_{j,k+2}}{256} + \frac{3y_{j,k+3}}{256}\,.$$

Ensuite, nous donnons les filtres du bord de gauche (les filtres du bord de droite sont obtenus par symétrie) :

$$\begin{aligned} y_{j+1,1} = {} & \frac{35}{256} 2^{-j} d_1^G + \frac{1715}{3072} y_{j,0} + \frac{35}{64} y_{j,1} \\ & - \frac{35}{256} y_{j,2} + \frac{7}{192} y_{j,3} - \frac{5}{1024} y_{j,4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_{j+1,3} = & -\frac{15}{256}2^{-j}d_1^G - \frac{165}{1024}y_{j,0} + \frac{45}{64}y_{j,1} \\ & +\frac{135}{256}y_{j,2} - \frac{5}{64}y_{j,3} + \frac{9}{1024}y_{j,4}. \end{aligned}$$

Exemple 2. Supposons que $N = 3$ et $\widetilde{N} = 5$. Pour $2 < k < 2^j - 3$, nous avons

$$\begin{aligned} y_{j+1,2k+1} = & -\frac{5}{2048}y_{j,k-3} + \frac{49}{2048}y_{j,k-2} - \frac{245}{2048}y_{j,k-1} \\ & +\frac{1225}{2048}y_{j,k} + \frac{1225}{2048}y_{j,k+1} - \frac{245}{2048}y_{j,k+2} \\ & +\frac{49}{2048}y_{j,k+3} - \frac{5}{2048}y_{j,k+4}. \end{aligned}$$

Nous donnons maintenant les filtres du bord de gauche (encore une fois, les filtres du bord de droite sont obtenus par symétrie) :

$$\begin{aligned} y_{j+1,1} = & \frac{7}{25600}y_{j,5} - \frac{45}{16384}y_{j,4} + \frac{7}{512}y_{j,3} \\ & -\frac{105}{2048}y_{j,2} + \frac{315}{1024}y_{j,1} + \frac{300013}{409600}y_{j,0} \\ & +\frac{5397}{20480}d_1^G 2^{-j} + \frac{63}{2048}d_2^G 4^{-j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{j+1,3} = & -\frac{27}{25600}y_{j,5} + \frac{189}{16384}y_{j,4} - \frac{35}{512}y_{j,3} \\ & +\frac{945}{2048}y_{j,2} + \frac{945}{1024}y_{j,1} - \frac{133693}{409600}y_{j,0} \\ & -\frac{3717}{20480}d_1^G 2^{-j} - \frac{63}{2048}d_2^G 4^{-j} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y_{j+1,5} = & \frac{3}{1024}y_{j,5} - \frac{625}{16384}y_{j,4} + \frac{625}{1536}y_{j,3} \\ & +\frac{1875}{2048}y_{j,2} - \frac{625}{1024}y_{j,1} + \frac{15883}{49152}y_{j,0} \\ & +\frac{805}{4096}d_1^G 2^{-j} + \frac{75}{2048}d_2^G 4^{-j}. \end{aligned}$$

1.3 Régularité. Nous allons utiliser la linéarité de notre schéma d'interpolation (voir [8] pour une preuve similaire d'un résultat moins général). Soit y une fonction sur l'intervalle prolongée à tous les nombres dyadiques par notre schéma à partir des nombres dyadiques de profondeur j ($2^j > \widetilde{N}$). Soit P l'unique polynôme de degré maximal $N + \widetilde{N} - 1$ satisfaisant

$$\frac{d^k}{dx^k}P(0) = d_k^G$$

pour $k = 1, \ldots, N-1$ et tel que $P(2^{-j}k) = y(2^{-j}k)\ \forall k \in [0, \widetilde{N}] \cap \mathbf{Z}$. Définissons g sur les nombres dyadiques de profondeur j par

$$g\left(2^{-j}k\right) = y\left(2^{-j}k\right) - P\left(2^{-j}k\right).$$

On peut prolonger g sur tous les nombres dyadiques en supposant que $d_k^G = 0$ et $d_k^D = 0\ \forall k$. Nous aurons alors $y = P + g$ sur les nombres dyadiques. Notons que par construction, pour $k = 0, \ldots, \widetilde{N}$, nous avons $g(2^{-j}k) = 0$. Par induction (en se contentant d'appliquer à la lettre le schéma), on peut montrer facilement que ceci est vrai pour $j' > j$, c'est-à-dire que pour $k = 0, \ldots, \widetilde{N}$, nous avons $g(2^{-j'}k) = 0$. En d'autres mots, pour ce qui est du bord de gauche ($x = 0$), le prolongement de g à tous les nombres dyadiques se fait uniquement par les polynômes de Lagrange. Par symétrie, ceci est aussi vrai du bord de droite ($x = 1$). Nous avons donc établi le résultat suivant.

Théorème 3. *Notre schéma d'interpolation mixte généralisée par polynômes de degré $N + \widetilde{N} - 1$ aura la même régularité globale que le schéma d'interpolation itérative de Lagrange correspondant, c'est-à-dire qu'une fonction prolongée à tous les nombres dyadiques par l'interpolation mixte généralisée aura un prolongement de régularité C^m sur les réels si $\widetilde{N} \geq R(m)$.*

Nous savons que pour $k = 0, \ldots, \widetilde{N} > N \geq 2$, nous avons $g(2^{-j'}k) = 0$. Puisque g est C^N (uniformément sur les nombres dyadiques), nous avons $d^k g(0)/dx^k = 0$ pour $k = 1, \ldots, N-1$. La même chose peut être faite au bord de droite ($x = 1$). Nous avons donc la proposition suivante.

Proposition 4. *Soit y, une fonction prolongée par notre schéma d'interpolation mixte généralisée; alors, les valeurs $\left\{d_k^G\right\}_{k=1}^{N-1}$ et $\left\{d_k^D\right\}_{k=1}^{N-1}$ seront bien les dérivées correspondantes, c'est-à-dire*

$$\frac{d^k}{dx^k} y(0) = d_k^G$$
$$\frac{d^k}{dx^k} y(1) = d_k^D$$

pour $k = 1, \ldots, N-1$.

Remarque 2. En général, le prolongement aux nombres dyadiques d'une fonction y sur l'intervalle ne pourra pas être obtenu par la restriction à l'intervalle d'une fonction obtenue par l'interpolation itérative de Lagrange. Dans ce sens donc, il s'agit bel et bien d'un nouveau schéma d'interpolation.

Définition 5. Tout comme avec l'interpolation itérative de Lagrange, il est possible de définir les fonctions fondamentales de l'interpolation mixte généralisée. Fixons j; pour $k = 0, \ldots, 2^j$, nous noterons par $F_{j,k}$ le prolongement sur l'intervalle de la fonction $F_{j,k}\left(l/2^j\right) = \delta_{k,l}$ et tel que $d_l^G = d_l^D = 0$ pour $l = 1, \ldots, N-1$. Pour $k \in \{1, \ldots, N-1\}$, on note par $F_{j,-k}$ le prolongement sur l'intervalle de la fonction $F_{j,k}\left(l/2^j\right) = 0\ \forall l$ et tel que $d_k^G = 1$ (autrement : $d_l^G = d_l^D = 0$ pour $l = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, N-1$ et $d_l^D = 0$ pour $l = 1, \ldots, N-1$). Pour $k \in \{1, \ldots, N-1\}$, on définit d'une façon similaire les $F_{j,2^j+k}$. Symboliquement donc, on traite les dérivées aux bords comme des noeuds supplémentaires. Il est facile de montrer que nos fonctions fondamentales sont localisées, c'est-à-dire que

$$\operatorname{supp} F_{j,k} \subset \left[2^{-j}\left(k-\widetilde{N}\right), 2^{-j}\left(k+\widetilde{N}\right)\right].$$

2. Analyse multirésolution sur l'intervalle.

2.1. B-Splines. On se rappelera qu'une *B-spline* de degré N peut être définie comme étant le résultat de N convolutions de la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,1]$, $\chi_{[0,1]}$, avec elle-même. On définit donc

$$_N\phi(x) = \underbrace{\chi_{[0,1]} * \cdots * \chi_{[0,1]}}_{N \text{ convolutions}}(x).$$

Les fonctions $\left\{_N\phi\left(2^j x - k\right)\right\}_{j,k}$ génèrent une multirésolution dans $L^2(\mathbf{R})$.

On introduit la quantité κ définie par $\kappa = 1$ si N est impair et $\kappa = 0$ si N est pair. On retient les $2^j + N - 1$ *B-splines* sur $\mathbf{R}$ dont le support rencontre l'intervalle $[0,1]$

$$\left\{_N\phi\left(2^j x - k\right)\right\}_{k=-[N/2]+1-\kappa}^{2^j-1+[N/2]}$$

et prend leur restriction à l'intervalle $[0,1]$:

$$_N\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}{}_N\phi_{|[0,1]}\left(2^j x - k\right).$$

Nous aurons alors une multirésolution dans $L^2[0,1]$. Nous aurons

$$_N\phi_{j,k} = \frac{1}{2^N\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}{}_N\phi_{j+1,2k+n-1} \tag{1}$$

où par définition $_N\phi_{j,\left(m<-[N/2]+1-\kappa\right)} \equiv 0$ et $_N\phi_{j,\left(m>2^j-1+[N/2]\right)} \equiv 0$.

2.2. Fonctions d'échelle duales. On sait que les fonctions d'échelle de Cohen-Daubechies-Feauveau formant une multirésolution biorthogonale avec les splines [1] dans $L^2(\mathbf{R})$ peuvent s'écrire

$$_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}^{CDF}(x) = (-1)^N\sum_{k=0}^{\infty}\binom{N-1+k}{N-1}\frac{d^N}{dx^N}F\left(x+k+\kappa+\left[N/2\right]\right) \tag{2}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{N-1-k}{N-1}\frac{d^N}{dx^N}F\left(x-k-\kappa-\left[N/2\right]\right)$$

où F est la fonction fondamentale de l'interpolation itérative de Lagrange avec des polynômes de degré $\widetilde{N}+N-1$ (voir [4] et [6]). $[x]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x et $\kappa = 1$ si N est impair et $\kappa = 0$ si N est pair.

On peut généraliser cette formule à l'intervalle en utilisant les fonctions fondamentales définies précédemment (interpolation mixte généralisée). Pour $l = -\left[N/2\right]+1-$

$\kappa, \ldots, 2^j - 1 + [N/2]$, nous avons

$$\begin{aligned} {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}(x) &= 2^{j/2} \sum_{k=0}^{2^j-l-\kappa-[N/2]} \binom{N-1+k}{N-1} F^{(N)}_{j,l+k+\kappa+[N/2]}(x) \\ &+ 2^{j/2} \sum_{m=1}^{N-1} d^D_{l,m} F^{(N)}_{j,2^j+m}(x) \\ &= 2^{j/2} \sum_{k=0}^{2^j-l-\kappa-[N/2]} \binom{N-1+k}{N-1} 2^{-Nj} \frac{d^N F_{j,l+k+\kappa+[N/2]}(x)}{dx^N} \\ &+ 2^{j/2} \sum_{m=1}^{N-1} d^D_{l,m} 2^{-Nj} \frac{d^N F_{j,2^j+m}(x)}{dx^N} \end{aligned} \tag{3}$$

avec la convention que $\sum_{k=0}^{a<0}$ est automatiquement nulle. On remarque que nous aurons $2^j + N - 1$ fonctions duales, car $2[N/2] + \kappa - 1 = N - 1$. On définit les $d^D_{l,k}$ par la formule

$$d^D_{l,m} = 2^{jm} \frac{d^m}{dk^m} \binom{N-1+k}{N-1}_{|k=2^j-l-\kappa-[N/2]}.$$

C'est une conséquence directe du fait que les fonctions $\{F_{j,k}\}_k$ permettent la reconstruction exacte des polynômes de degré $\widetilde{N} + N - 1$ que les fonctions $\{{}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,k}\}_k$ permettent la reconstruction exacte des polynômes de degré $\widetilde{N} - 1$.

Théorème 6. *Supposons que j soit suffisamment grand : $2^j > 4\widetilde{N} + 2N + 2$. Les ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}$ seront alors biorthogonales aux ${}_N\phi_{j,k}$, c'est-à-dire*

$$\int_0^1 {}_N\phi_{j,k}(x)\, {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}(x)\, dx = \delta_{k,l}.$$

Preuve. Supposons que $2^j > 4\widetilde{N} + 2N + 2$. Les $d^D_{l,m}$ furent choisies de manière à ce que les ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}$ soient symétriques, c'est-à-dire

$${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}(x) = {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,2^j-l}(1-x).$$

Les fonctions d'échelle du centre $\{{}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}\}_{l=2\widetilde{N}+N+1}^{2^j-2\widetilde{N}-N-1}$ ne seront pas affectées par les bords et nous retrouvons donc les ondelettes de Cohen-Daubechies-Feauveau. Pour montrer la biorthogonalité, il suffit donc de considérer le bord de gauche ($x = 0$: $l = -[N/2], \ldots, 2\widetilde{N} + N + 1$).

Pour $l = -[N/2] + 1 - \kappa, \ldots, 2\widetilde{N} + N + 1$, remarquons que

$$\frac{d^k}{dx^k}\, {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}(0) = 0 \text{ pour } k = 0, \ldots, N-1.$$

Ceci nous permet d'ignorer les termes de bords lorsque l'on intègre par parties. En effet, le choix des $d^D_{l,m}$ est fait de telle manière à ce que les fonctions ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}$ soient localisées, c'est-à-dire que pour j suffisamment grand ($2^j > 2\widetilde{N} + N - 1$), les ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}$ pour $l = 0, \ldots, 2\widetilde{N} + N + 1$ seront identiquement nulles dans un voisinage de $x = 1$ (Rappelons que l'on prend la dérivée N ième d'un schéma permettant la reconstruction des polynômes de degré $\widetilde{N} + N - 1 \geq N$ et que nos fonctions fondamentales sont *localisées*, voir remarque 5). Notons par ${}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}^{CDF}_{j,l}$ les fonctions d'échelle de Cohen-Daubechies-Feauveau et ${}_N\phi^{CDF}_{j,k}$ les *B-splines* sur **R**. Pour simplifier la notation, écrivons[1]

$$
{}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}^{CDF}_{j,k} = 2^{j/2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} F^{Lagrange}_{j,k+\kappa+[N/2]}(x),
$$

alors par intégration par parties nous avons que

$$
\begin{aligned}
\delta_{k,l} &= \int_{-\infty}^{\infty} {}_N\phi^{CDF}_{j,k}(x)\, {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}^{CDF}_{j,l}(x)dx \\
&= (-1)^N\, 2^{j/2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^N}{dx^N} {}_N\phi^{CDF}_{j,k}(x) \right) F^{Lagrange}_{j,k+\kappa+[N/2]}(x)\, dx,
\end{aligned}
$$

mais $d^N\, {}_N\phi^{CDF}_{j,k}(x)\, / dx^N$ n'est qu'une combinaison de distributions de Dirac (fonctions de masse) :

$$
\frac{d^N}{dx^N} {}_N\phi^{CDF}_{j,k}(x) = 2^{(N+1/2)j} \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (-1)^n\, \delta\left(2^j x - k - n - [N/2]\right) \tag{4}
$$

Et donc, on peut remplacer les fonctions fondamentales $F^{Lagrange}_{j,k}$ par $F_{j,k}$ puisque les distributions de Dirac apparaissant dans cette dernière équation ne *perçoivent* que les valeurs aux nombres dyadiques de profondeur j. Nous avons donc

$$
\begin{aligned}
\delta_{k,l} &= (-1)^N\, 2^{j/2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{N-1+k}{N-1} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^N}{dx^N} {}_N\phi^{CDF}_{j,k}(x) \right) F_{j,k+\kappa+[N/2]}(x)\, dx \\
&= \int_0^1 {}_N\phi_{j,k}(x)\, {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j,l}(x)dx
\end{aligned}
$$

et ceci est valide pour $k = -[N/2] + 1 - \kappa, \ldots, 2^j - 1 + [N/2]$ (tous les k) ce qui termine la preuve. □

---

[1] Il s'agit d'une somme localement finie parce que $F^{Lagrange}$ est une fonction à support compact.

2.2.1. Les filtres des fonctions d'échelle duales. Pour $\widetilde{N} \leq l \leq 2^j - \widetilde{N}$, nous avons le filtre de Cohen-Daubechies-Feauveau, par exemple pour $\widetilde{N} = 4$ et $N = 2$,

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\phi}_{j,l}}{\sqrt{2}} = & \frac{3}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,2l-4} - \frac{3}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,2l-3} - \frac{1}{8}\widetilde{\phi}_{j+1,2l-2} \\ & + \frac{19}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,2l-1} + \frac{45}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,2l} \\ & + \frac{19}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,2l+1} - \frac{1}{8}\widetilde{\phi}_{j+1,2l+2} \\ & - \frac{3}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,2l+3} + \frac{3}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,2l+4}.\end{aligned}$$

Sur les bords, il y aura $\widetilde{N} + [N/2] - 1 + \kappa$ filtres à calculer (par symétrie, il suffit de considérer le bord de gauche ($x = 0$)). Pour calculer les filtres on utilise essentiellement le fait que le schéma d'interpolation est itératif. Les filtres sont *localisés*, c'est-à-dire qu'il existe un entier indépendant de j, M bornant uniformément la largeur des filtres. La localisation provient essentiellement du fait que notre schéma d'interpolation permet la reconstruction des polynômes de degré $\widetilde{N} + N - 1 \geq N$.

Filtres de bord ($\widetilde{N} = 4, N = 2$). Supposons que $2^j > 4\widetilde{N} + 2N + 2$. Nous donnerons les filtres que pour le bord de gauche ($x = 0$) (c'est suffisant par symétrie).

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\phi}_{j,3}}{\sqrt{2}} = & -\frac{5}{512}\widetilde{\phi}_{j+1,0} + \frac{5}{256}\widetilde{\phi}_{j+1,1} + \frac{1}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,2} \\ & - \frac{9}{256}\widetilde{\phi}_{j+1,3} - \frac{67}{512}\widetilde{\phi}_{j+1,4} \\ & + \frac{19}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,5} + \frac{45}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,6} + \frac{19}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,7} \\ & - \frac{1}{8}\widetilde{\phi}_{j+1,8} - \frac{3}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,9} + \frac{3}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,10},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\phi}_{j,2}}{\sqrt{2}} = & \frac{41}{768}\widetilde{\phi}_{j+1,0} - \frac{41}{384}\widetilde{\phi}_{j+1,1} - \frac{13}{192}\widetilde{\phi}_{j+1,2} \\ & + \frac{31}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,3} + \frac{187}{256}\widetilde{\phi}_{j+1,4} \\ & + \frac{19}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,5} - \frac{1}{8}\widetilde{\phi}_{j+1,6} - \frac{3}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,7} \\ & + \frac{3}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,8},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\phi}_{j,1}}{\sqrt{2}} = & -\frac{241}{1536}\widetilde{\phi}_{j+1,0} + \frac{241}{768}\widetilde{\phi}_{j+1,1} + \frac{245}{384}\widetilde{\phi}_{j+1,2} \\ & + \frac{105}{256}\widetilde{\phi}_{j+1,3} - \frac{93}{512}\widetilde{\phi}_{j+1,4} - \frac{3}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,5} \\ & + \frac{3}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,6},\end{aligned}$$

et

$$\frac{\widetilde{\phi}_{j,0}}{\sqrt{2}} = \frac{93}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,0} + \frac{35}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,1} - \frac{5}{32}\widetilde{\phi}_{j+1,2} - \frac{15}{64}\widetilde{\phi}_{j+1,3} + \frac{15}{128}\widetilde{\phi}_{j+1,4}.$$

2.3. Ondelettes duales.. Nous avons 2^j ondelettes duales, elles sont données par[2]

$$_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_{j,k} = (-1)^{[N/2]}\, 2^{1-N+j/2} \frac{d^N}{dx^N} F_{j+1,2k+1} \tag{5}$$

pour $k = 0, \ldots, 2^j - 1$. Nous pouvons montrer par intégration par parties que $\langle_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_{j,k}, {}_N\phi_{j,l}\rangle = 0$ et l'on observe que

$$_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_{j,k} = \frac{(-1)^{[N/2]}\, 2^{1-N}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \binom{N}{n} {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\phi}_{j+1,2k+n-[N/2]+1-\kappa}.$$

Proposition 7. *Les ondelettes* $_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_{j,k}$ *auront* N *moments nuls (*$\int_0^1 {}_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_{j,k}(x)\, x^n dx = 0$*, pour* $n = 0, \ldots, N-1$*).*

Preuve. Fixons j. Il est clair par les propriétés des *B-splines* que les fonctions $\{_N\phi_{j,l}\}_l$ permettent la reconstruction des polynômes de degré $N-1$, mais $\langle_{N,\widetilde{N}}\widetilde{\psi}_{j,k}, {}_N\phi_{j,l}\rangle = 0$. □

2.4. Ondelettes primaires. La construction des ondelettes primaires $\{\psi_{j,k}\}_{k=0}^{2^j-1}$ ne pose pas de problème. Supposons que $\left\{h_k^{CDF}\right\}$ soit le filtre des ondelettes primaires de Cohen-Daubechies-Feauveau, c'est-à-dire

$$\psi_{j,k}^{CDF} = \sum_{l=0}^{2^j} h_{l-2k}^{CDF}\, \phi_{j+1,l}^{CDF}$$

Il suffit de prendre

$$\psi_{j,k} = \psi_{j,k}^* - \sum_l \left\langle \widetilde{\phi}_{j,l}, \psi_{j,k}^* \right\rangle \phi_{j,l} \tag{6}$$

où $\psi_{j,k}^* = \sum_{l=-[N/2]+1-\kappa}^{2^{j+1}+[N/2]-1} h_{l-2k}^{CDF} \phi_{j+1,l}$. On peut calculer $\left\langle \widetilde{\phi}_{j,l}, \psi_{j,k}^* \right\rangle$ d'une façon efficace puisque

$$\left\langle \widetilde{\phi}_{j,l}, \psi_{j,k}^* \right\rangle = \sum_{m=-[N/2]+1-\kappa}^{2^{j+1}+[N/2]-1} h_{m-2k}^{CDF} \left\langle \widetilde{\phi}_{j,l}, \phi_{j+1,m} \right\rangle = \sum_{m=-[N/2]+1-\kappa}^{2^{j+1}+[N/2]-1} h_{m-2k}^{CDF} \widetilde{h}_{l,m}$$

[2]La dépendance sur $\widetilde{N}$ est ici implicite : les fonctions F dépendent bien sûr de N et de $\widetilde{N}$.

où $\widetilde{\phi}_{j,k} = \sum_{l=-[N/2]+1-\kappa}^{2^{j+1}+[N/2]-1} \widetilde{h}_{k,l}\widetilde{\phi}_{j+1,l}$. Par notre définition (équation 6) , nous avons automatiquement

$$\left\langle \psi_{j,k}, \widetilde{\phi}_{j,l} \right\rangle = 0 \quad \forall k, l$$

et à partir de là,

$$\left\langle \psi_{j,l}, \widetilde{\psi}_{j,k} \right\rangle = \left\langle \psi_{j,l}^{*}, \widetilde{\psi}_{j,k} \right\rangle .$$

Maintenant, nous avons

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_{j,l}^{*}, \widetilde{\psi}_{j,k} \right\rangle &= \frac{(-1)^{[N/2]}\, 2^{1-N}}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{N} (-1)^{n} \binom{N}{n} h_{2k+n-2l-[N/2]+1-\kappa}^{CDF} \\ &= \delta_{k,l} \text{ pour } k, l = 0, \ldots, 2^{j} - 1 \end{aligned}$$

ce qui montre que notre choix était judicieux.

Proposition 8. *Les ondelettes $\psi_{j,k}$ auront $\widetilde{N}$ moments nuls.*

Preuve. Fixons j. Nous savons que les fonctions $\{\widetilde{\phi}_{j,k}\}_k$ génèrent par des combinaisons linéaires tous les polynômes de degré $\widetilde{N}-1$ et, en même temps, nous avons $\langle \psi_{j,k}, \widetilde{\phi}_{j,l} \rangle = 0$. □

2.4.1. Exemple de filtre ($\widetilde{N} = 4$, $N = 2$). Alors que pour $2 \leq k \leq 2^{j} - 3$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{j,k}}{\sqrt{2}} = & \frac{3}{128}\phi_{j+1,2k-3} + \frac{3}{64}\phi_{j+1,2k-2} - \frac{1}{8}\phi_{j+1,2k-1} \\ & - \frac{19}{64}\phi_{j+1,2k} + \frac{45}{64}\phi_{j+1,2k+1} \\ & - \frac{19}{64}\phi_{j+1,2k+2} - \frac{1}{8}\phi_{j+1,2k+3} \\ & + \frac{3}{64}\phi_{j+1,2k+4} + \frac{3}{128}\phi_{j+1,2k+5}, \end{aligned}$$

pour $k = 0$ et $k = 1$, nous avons respectivement,

$$\begin{aligned} \frac{\psi_{j,0}}{\sqrt{2}} = & -\frac{35}{64}\phi_{j+1,0} + \frac{875}{1536}\phi_{j+1,1} \\ & - \frac{241}{768}\phi_{j+1,2} - \frac{53}{512}\phi_{j+1,3} \\ & + \frac{41}{384}\phi_{j+1,4} + \frac{67}{1536}\phi_{j+1,5} \\ & - \frac{5}{256}\phi_{j+1,6} - \frac{5}{512}\phi_{j+1,7} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\psi_{j,1}}{\sqrt{2}} = {} & \frac{15}{64}\phi_{j+1,0} - \frac{45}{512}\phi_{j+1,1} \\ & - \frac{105}{256}\phi_{j+1,2} + \frac{345}{512}\phi_{j+1,3} \\ & - \frac{31}{128}\phi_{j+1,4} - \frac{53}{512}\phi_{j+1,5} \\ & + \frac{9}{256}\phi_{j+1,6} + \frac{9}{512}\phi_{j+1,7}.\end{aligned}$$

Le bord de droite est traité de façon symétrique.

2.5. Remarque. Il existe déjà une adaptation des ondelettes de Cohen-Daubechies-Feauveau à l'intervalle [DaKuUr] obtenue par une approche similaire à celle introduite par Yves Meyer [Me] (restriction à $L^2(0,1)$ de la base sur $L^2(\mathbf{R})$) ce qui est différent de ce que nous avons fait ici (voir remarque 2).

English extended abstract. We know that if F is the fundamental function of the Lagrange iterative interpolation scheme [DeDu], then we can obtain the Cohen-Daubechies-Feauveau scaling functions by differentiation as in equation 2 (see [4] and [6]). Starting from a modified version of the Lagrange iterative interpolation scheme on the interval [8], we define a new iterative interpolation scheme on the interval which allows us to set various derivatives on the boundaries. In theorem 3 and proposition 4, we show that this new scheme is sufficiently regular and that the set values of the derivatives on the boundaries are met. In the usual Cohen-Daubechies-Feauveau multiresolution [1], the B-splines are used as the primary scaling functions. Here we take the restrictions of the B-splines to the interval (say $[0,1]$) as the primary scaling functions (see equation 1). The dual scaling functions are then obtained by a new formula (see equation 3) which again is based on a differentiation of the (modified) iterative interpolation scheme. Proving that these functions are dual is achieved with integration by parts (see theorem 6). The dual wavelets are given by the equation 5 and showing that it is perpendicular to the primary scaling functions is again done with integration by parts. Finally, we compute the primary wavelets which are spline-wavelets. Starting with pseudo-wavelets ψ^* dual to the dual wavelets, we apply the general formula 6 to get primary wavelets which are both dual to the dual wavelets and perpendicular to the dual scaling functions. Numerous examples of filters are given throughout the text.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Cohen, I. Daubechies et J.-C. Feauveau, *Biorthogonal bases of compactly supported wavelets*, Comm. Pure and Appl. Math. **45** (1992), 485–560.

[2] W. Dahmen, A. Kunothet K. Urban, *Biorthogonal Spline-Wavelets on the Interval - Stability and Moment Conditions*, WIAS-Preprint **265** (August 1996), 64.

[3] G. Deslauriers et S. Dubuc, *Symmetric Iterative Interpolation Processes*, Constructive Approximation **5** (1989), 49–68.

[4] G.Deslauriers, S. Dubuc et D. Lemire,*Dérivées de l'interpolation itérative de Lagrange et les ondelettes b-adiques de Cohen-Daubechies-Feauveau*, Rapport technique EPM/RT-97/28,

Département de mathématiques appliquées et de génie industriel, École Polytechnique de Montréal, Montréal, avril 1997.

[5] D.L. Donoho, *Smooth wavelet decompositions with blocky coefficient kernels* dans Recent Advances in Wavelet Analysis. Larry L. Schumaker et Glenn Webb (ed.), Academic Press, Inc., Boston, 1993, 1–43.

[6] P. G. Lemarié-Rieusset, *Analyses multi-résolutions non orthogonales, commutation entre projecteurs et dérivation et ondelettes vecteurs à divergence nulle*, Rev. Mat. Iberoamericana **8** (1992), no.2, 221–237.

[7] Y. Meyer, *Ondelettes sur l'intervalle*, Rev. Mat. Iberoamericana **7** (1991), no.2, 115–133.

[8] Jean-Pierre Mongeau, Serge Dubuc et Gilles Deslauriers, *Interpolation itérative et compression de données*, Rapport technique, Département de mathématiques appliquées, École Polytechnique de Montréal, Montréal, avril 1990.

G. DESLAURIERS ET D. LEMIRE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECNIQUE DE MONTRÉAL
CASE POSTALE 6079, SUCCURSALE CENTRE-VILLE
MONTRÉAL QC H3C 3A7
CANADA

S. DUBUC
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE CENTRE-VILLE
MONTRÉAL QC H3C 3J7
CANADA