Ann. Sci. Math. Québec, **17** (1), 1993, 99–113.

INTERPOLATION PAR FONCTIONS SPLINES ET BORNES D'ERREURS

JEAN SAVOIE

RÉSUMÉ. Nous établissons des relations de dépendances linéaires entre une fonction spline s et sa $(n-1)$–ième dérivée. Pour Δ une partition quelconque de l'intervalle $[a, b]$, nous montrons que l'existence et l'unicité d'une fonction spline périodique d'interpolation définie sur Δ est équivalente à l'inversibilité d'une certaine matrice U. Nous en déduisons des bornes d'erreurs de la forme

$$||f^{(k)} - s^{(k)}||_\infty \leq V_k ||U^{-1}||_\infty ||f^{(n+1)}||_\infty ||\Delta||^{n-k+1}$$

avec des valeurs V_k explicites. De plus, nous donnons une borne pour $||U^{-1}||_\infty$ lorsque $n = 2$.

ABSTRACT. We establish some linear relationships between a spline s and its $(n-1)$–th derivative. Let Δ be any partition of the interval $[a, b]$. We show that there exits an unique periodic interpolating spline over Δ if and only if some matrix U is invertible. We deduce error bounds of the form

$$||f^{(k)} - s^{(k)}||_\infty \leq V_k ||U^{-1}||_\infty ||f^{(n+1)}||_\infty ||\Delta||^{n-k+1}$$

in which the values V_k are explicit. Moreover, we obtain a bound for $||U^{-1}||_\infty$ if $n = 2$. See the English extended abstract at the end of the paper.

1. Introduction. Soit $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^N$ une partition d'un intervalle $[a, b]$ où $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ et soit des valeurs $t_i \in [x_i, x_{i+1})$. Nous dirons qu'une fonction s est une fonction spline de degré n sur Δ si s est un polynôme de degré au plus n sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et si $s \in C^{n-1}[a, b]$. De plus, $s(x)$ est dite périodique lorsqu'elle satisfait les conditions

$$s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b), \qquad 0 \leq k \leq n-1. \tag{1.1}$$

Notons par SG_n, l'ensemble des fonctions f telles que

$$f \in \bigcap_{i=0}^{N-1} C^{n+1}(x_i, x_{i+1}) \cap C^{n-1}[a, b]$$

et telles que les valeurs $f^{(l)}(x_i^+)$ et $f^{(l)}(x_{i+1}^-)$ sont bien définies pour $l = n$ et $n+1$, et pour $0 \leq i \leq N-1$. Notons par SG_n^p, le sous-ensemble de SG_n où les éléments satisfont à (1.1).

Le premier problème que nous abordons est celui de l'existence d'une relation de dépendances linéaires de la forme

$$\sum_{i=0}^{n} A_i^k s(t_i) = \sum_{i=0}^{n} B_i^k s^{(k)}(x_i), \tag{1.2}$$

Reçu le 14 février 92 et, sous forme définitive, le 10 mars 92.

entre les valeurs $s(t_i)$ d'une fonction spline et les valeurs $s^{(k)}(x_i)$ de sa $k-$ ième dérivée. De telles relations existent lorsque la partition Δ est uniforme avec des t_i uniformément translatées (v. [5], [7]). Lorsque Δ n'est pas uniforme, il n'est pas possible, en général, d'obtenir de telles relations pour tout k, $0 \le k \le n$. Nous avons de telles relations lorsque $n = 2$ et $k = n - 1$ (v. [3]), ou lorque $n \ge 1$, $k = n-1$ et $t_i = x_i$ (v. [1]). Dans cet article nous obtenons de telles relations lorque $n \ge 1$, $k = n - 1$ et $t_i \in [x_i, x_{i+1})$.

Nous abordons ensuite le problème de l'existence d'une fonction spline périodique d'interpolation s telle que

$$s(t_i) = f(t_i), \qquad 0 \le i \le N-1, \tag{1.3}$$

lorsque $f \in SG_n^p$. Certains résultats sont connus. Nous avons l'existence et l'unicité de s lorsque N est impair (v. [11]) ou lorsque n est impair avec $t_i = x_i$ (v. [1]). De plus, si N est pair, Δ est uniforme et les t_i sont uniformément translatées ($t_i = x_i + \mu h$ et $\mu \in [0,1)$), nous avons l'existence et l'unicité de s, si et seulement si

$$(\ \mu \neq 0 \text{ et } n \text{ pair}) \text{ ou } (\mu \neq 1/2 \text{ et } n \text{ impair})$$

(v. [10] et [6]). Dans cet article, nous montrons que l'existence et l'unicité de s est équivalente à l'existence de l'inverse d'une certaine matrice U. Comme cas particuliers, nous obtenons la matrice U de [3] lorsque $n = 2$ et celle de [12] lorsque $n = 3$ avec $t_i = x_i$.

Les coefficients des matrices U sont difficilles à évaluer en général mais permettent d'établir des bornes d'erreurs de la forme,

$$\|e^{(k)}\|_\infty \le V_k \|U^{-1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty \|\Delta\|^{n+1-k} \tag{1.4}$$

avec des valeurs numériques pour les V_k ($k = 0, \dots, n-1$). La valeur V_{n-1} est d'abord obtenue d'une relation de dépendances linéaires du type (1.2) avec $k = n - 1$ tandis que les autres valeurs V_k sont obtenues de V_{n-1} et d'une application du théorème de Rolle.

Nous appliquons ces derniers résultats au cas $n = 2$. Nous obtenons d'abord une borne supérieure pour $\|U^{-1}\|_\infty$ lorsque les t_i sont suffisamment éloignées des x_i, pour obtenir

$$\|e^{(k)}\|_\infty \le W_k \|f^{(n+1)}\|_\infty \|\Delta\|^{n+1-k} \tag{1.5}$$

avec des W_k explicites. Remarquons que certaines inégalités du type (1.5) avec des W_k optimaux sont connues pour certaines splines non périodiques lorsque $n = 3$ et $t_i = x_i$ (v. [9]).

Nous utilisons les notations suivantes. Pour des suites $\{x_i\}_0^N$ et $\{t_i\}_0^{N-1}$ données, nous étendons ces suites de telle sorte que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $x_{i+N} = x_i + b - a$ et $t_{i+N} = t_i + b - a$. Pour toute matrice C d'ordre N, nous étendons la définition de C pour avoir $C_{i,j+N} = C_{i,j}$ avec $j \in \mathbb{Z}$. $\|\Delta\| = \max |x_{i+1} - x_i|$. Lorsque $f \in SG_n^p$, nous considérons l'extension périodique de f sur $\mathbb{R}$ lorsque nécessaire. La fonction erreur est $e(x) = f(x) - s(x)$.

2. Quelques résultats préléminaires. Rappelons tout d'abord quelques propriétés des différences divisées.

$$[t_0, \dots, t_k : x]f(x) = \frac{[t_1, \dots, t_k : x]f(x) - [t_0, \dots, t_{k-1} : x]f(x)}{t_k - t_0}, \tag{2.1}$$

$$[t_i : x]f(x) = f(t_i), \tag{2.2}$$

$$[t_0, \dots, t_k : x]f(x) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \tag{2.3}$$

$$[t_0, \dots, t_k : x]f(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j^k f(t_j) \quad \text{où} \quad a_j^k = \left[\prod_{\substack{0 \le l \le k \\ l \neq j}} (t_j - t_l) \right]^{-1}. \tag{2.4}$$

Nous notons par $Q_j^n(x)$ la B-spline de degré $n-1$ de support $[t_j, t_{j+n}]$ et par $N_j^n(x)$ la B-spline normalisée. Nous avons (v. [11]):

$$Q_j^n(x) = [t_j, \dots, t_{j+n} : t](t-x)_+^{n-1}, \tag{2.5}$$
$$N_j^n(x) = (t_{j+n} - t_j)Q_j^n(x), \tag{2.6}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_i^n(u)\,du = \frac{1}{n}, \tag{2.7}$$
$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} N_i^n(x) = 1. \tag{2.8}$$

3. Relation de dépendances linéaires. Soit s une fonction spline de degré n sur la partition $\Delta^* : a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots$ de la demi-droite $[a, \infty)$ avec $i \in \mathbb{Z}^+$. Posons

$$H_{n,l}(x) = (x_{l+1} - x_{l-1})[x_{l-1}, x_l, x_{l+1} : u]\frac{(x-u)_+^n}{n!}, \tag{3.1}$$
$$h(x) = \sum_{l=0}^{\infty} H_{n,l}(x)s^{(n-1)}(x_l). \tag{3.2}$$

Puisque pour x donné, la somme dans (3.2) est finie, $h(x)$ est bien définie et ainsi $h(x)$ est une fonction spline de degré n sur Δ^*. Puisque $(x_{l+1} - x_{l-1})[x_{l-1}, x_l, x_{l+1} : u](x_j - u)_+^1 = \delta_{lj}$, nous avons $h^{(n-1)}(x_j) = s^{(n-1)}(x_j)$. Ainsi $q(x) = h(x) - s(x)$ est une fonction spline de degré n telle que

$$q^{(n-1)}(x_l) = 0, \qquad (l = 0, 1, \dots). \tag{3.3}$$

Donc $q^{(n)}(x_l) = 0$ et ainsi $q(x)$ est un polynôme de degré $< n$. En fait, par (3.3), $\deg(q) < n-1$. Maintenant, puisque $[t_i, \dots, t_{i+n-1} : x]q(x) = 0$ et puisque $H_{n,l}(x)$ est un polynôme de degré $n-2$ pour $x > x_{l+1}$, nous obtenons la relation de dépendances linéaires suivante entre les valeurs $s(t_l)$ et les valeurs $s^{(n-1)}(x_l)$:

$$[t_i, \dots, t_{i+n-1} : x]s(x) = \sum_{l=i}^{n+i}[t_i, \dots, t_{i+n-1} : x]H_{n,l}(x)s^{(n-1)}(x_l). \tag{3.4}$$

Le coefficient de $s^{(n-1)}(x_l)$ dans l'équation précédente est donc $[t_i, \dots, t_{i+n-1} : x]H_{n,l}(x)$ tandis que le coefficient de $s(t_l)$ est déterminé par (2.4). L'équation (3.4) nous permet ainsi de définir des fonctionnelles linéaires $L_{n,i}^{n-1}$ qui sont exactes sur les fonctions splines de degré $\leq n$:

$$L_{n,i}^{n-1}(f) = [t_i, \dots, t_{i+n-1} : x]f(x) - \sum_{l=i}^{i+n}[t_i, \dots, t_{i+n-1} : x]H_{n,l}(x)f^{(n-1)}(x_l). \tag{3.5}$$

Puisque ces fonctionnelles sont exactes sur les polynômes de degré $\leq n$, nous obtenons par le théorème de Peano que pour $f \in C^{n+1}[x_i, t_{i+n}]$,

$$L_{n,i}^{n-1}(f) = \int_{x_i}^{t_{i+n}} K_{n,i}^{n-1}(\theta)f^{(n+1)}(\theta)\,d\theta \tag{3.6}$$

où

$$
\begin{aligned}
K_{n,i}^{n-1}(\theta) &= L_{n,i}^{n-1}\left[\frac{(x-\theta)_+^n}{n!}\right] \\
&= [t_i,\ldots,t_{i+n-1}:x]\frac{(x-\theta)_+^n}{n!} - \sum_{l=i}^{i+n}[t_i,\ldots,t_{i+n-1}:x]H_{n,l}(x)(x_l-\theta)_+^1 \\
&= [t_i,\ldots,t_{i+n-1}:x]w_\theta(x), \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

$$
w_\theta(x) = \frac{(x-\theta)_+^n}{n!} - \sum_{l=i}^{i+n} H_{n,l}(x)(x_l-\theta)_+^1. \qquad (3.8)
$$

Remarque 1. Nous pouvons, après analyse du noyau $K_{n,i}^{n-1}(\theta)$, étendre (3.6) aux fonctions $f \in SG_n$. En fait, il suffit de remarquer que $K_{n,i}^{n-1}(x_l) = 0$ pour $l \in \mathbb{Z}$ et d'integrer n fois par partie le second membre de (3.6) pour obtenir (3.5).

Lemme 1. *Si $f \in SG_n$ alors*

$$
\int_{x_i}^{t_{i+n}} |K_{n,i}^{n-1}(\theta)|\,d\theta = \sum_{l=i}^{i+n}\int_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{Q_i^{n-1}(u)}{(n-2)!}\frac{(x_{l+1}-u)(u-x_l)}{2}\,du \le \frac{\|\Delta\|^2}{8(n-1)!}, \qquad (3.9)
$$

$$
|L_{n,i}^{n-1}(f)| \le \frac{\|\Delta\|^2}{8(n-1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty. \qquad (3.10)
$$

De plus, lorsque la partition est uniforme et les t_i sont uniformément translatées,

$$
\|K_{n,i}^{n-1}\|_1 = \frac{\|\Delta\|^2}{12(n-1)!}, \qquad (3.11)
$$

$$
|L_{n,i}^{n-1}(f)| \le \frac{\|\Delta\|^2}{12(n-1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty. \qquad (3.12)
$$

Preuve. (1) De [11, éq. 4.38] et de (3.7), nous obtenons

$$
K_{n,i}^{n-1}(\theta) = \int_{t_i}^{t_{i+n-1}} \frac{Q_i^{n-1}(u)}{(n-2)!} w_\theta^{(n-1)}(u)\,du \qquad (3.13)
$$

où

$$
w_\theta^{(n-1)}(x) = (x-\theta)_+^1 - \sum_{l=0}^{\infty}(x_l-\theta)_+^1(x_{l+1}-x_{l-1})[x_{l-1},x_l,x_{l+1}:u](x-u)_+^1. \qquad (3.14)
$$

Remarquons que $w_\theta^{(n-1)}(x)$ est une fonction spline de degré 1 avec noeuds en θ et x_l avec $w_\theta^{(n-1)}(x_l) = 0$. De plus,

$$
w_\theta^{(n-1)}(\theta) = -(x_{k+1}-\theta)(x_{k+2}-x_k)[x_k,x_{k+1},x_{k+2}:u](\theta-u)_+ \qquad (3.15)
$$

pour $\theta \in [x_k, x_{k+1}]$. Ainsi,

$$
w_\theta^{(n-1)}(\theta) = -\frac{(x_{k+1}-\theta)(\theta-x_k)}{x_{k+1}-x_k}, \qquad (3.16)
$$

et

$$w_\theta^{(n-1)}(x) = \begin{cases} -\frac{(x_{k+1}-\theta)(x-x_k)}{x_{k+1}-x_k} & \text{si } x_k \le x \le \theta, \\ -\frac{(x_{k+1}-x)(\theta-x_k)}{x_{k+1}-x_k} & \text{si } \theta \le x \le x_{k+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, par (2.7),

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{t_{i+n}} |K_{n,i}^{n-1}(\theta)|\, d\theta &= -\sum_{l=i}^{i+n} \int_{x_l}^{x_{l+1}} K_{n,i}^{n-1}(\theta)\, d\theta \\ &= -\sum_{l=i}^{i+n} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{Q_i^{n-1}(u)}{(n-2)!} \left(\int_{x_l}^{x_{l+1}} w_\theta^{(n-1)}(u)\, d\theta \right) du \\ &= \sum_{l=i}^{i+n} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{Q_i^{n-1}(u)}{(n-2)!} \frac{(x_{l+1}-u)(u-x_l)}{2}\, du \\ &\le \sum_{l=i}^{i+n} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{Q_i^{n-1}(u)}{(n-2)!} \frac{\|\Delta\|^2}{8}\, du \le \frac{\|\Delta\|^2}{8(n-1)!}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

ce qui prouve (3.9) et (3.10). Pour obtenir (3.11) et (3.12), il suffit de reprendre (3.17) et d'utiliser (2.8). Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{t_{i+n}} |K_{n,i}^{n-1}(\theta)|\, d\theta &= \sum_{l=i}^{i+n} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{Q_i^{n-1}(u)}{(n-2)!} \frac{(x_{l+1}-u)(u-x_l)}{2}\, du \\ &= \sum_{l=i-n}^{i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{Q_l^{n-1}(u)}{(n-2)!} \frac{(x_{i+1}-u)(u-x_i)}{2}\, du \\ &= \frac{\|\Delta\|}{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{l=i-n}^{i} \frac{N_l^{n-1}(u)}{(n-2)!} \frac{(x_{i+1}-u)(u-x_i)}{2}\, du \\ &= \frac{\|\Delta\|^2}{12(n-1)!}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ceci complète la démonstration □

4. Interpolation par splines périodiques. Pour une fonction spline périodique s de degré n sur Δ telle que

$$y_j = s(t_j), \qquad 0 \le j \le N-1, \tag{4.1}$$

nous deduisons de la section 3 que pour $x \in [a, b]$, nous avons

$$s(x) = q(x) + \sum_{i=0}^{N} H_{n,i}(x) s^{(n-1)}(x_i) \tag{4.2}$$

où $q(x)$ un polynôme de degré $\le n-2$. Par conséquent, nous obtenons:

$$y_j = q(t_j) + \sum_{i=0}^{N} H_{n,i}(t_j) s^{(n-1)}(x_i), \qquad 0 \le j \le N-1, \tag{4.3}$$

$$q^{(k)}(x_0) + H_{n,0}^{(k)}(x_0) s^{(n-1)}(x_0) = q^{(k)}(x_N) + \sum_{i=0}^{N} H_{n,i}^{(k)}(x_N) s^{(n-1)}(x_i), \quad 0 \le k \le n-1. \tag{4.4}$$

Puisque $H^{(k)}_{n,0}(x_0) = H^{(k)}_{n,N}(x_N)$ et puisque $s^{(n-1)}(x_0) = s^{(n-1)}(x_N)$, (4.4) devient (4.5)+(4.6) où

$$q^{(k)}(x_0) = q^{(k)}(x_N) + \sum_{i=0}^{N-1} H^{(k)}_{n,i}(x_N) s^{(n-1)}(x_i), \qquad 0 \le k \le n-2, \tag{4.5}$$

$$s^{(n-1)}(x_0) = s^{(n-1)}(x_N). \tag{4.6}$$

Ceci nous amène à considérer le système d'équations S composé des équations (4.7) à (4.9). Ce système possède $N+n$ équations et $N+n$ inconnues, les inconnues étant $s_i^{(n-1)}$ et q_j où $0 \le i \le N$, $0 \le j \le n-2$ et $q(x) = \sum_{j=0}^{n-2} q_j x^j$:

$$y_j = q(t_j) + \sum_{i=0}^{N} H_{n,i}(t_j) s_i^{(n-1)}, \qquad 0 \le j \le N-1, \tag{4.7}$$

$$q^{(k)}(x_0) = q^{(k)}(x_N) + \sum_{i=0}^{N-1} H^{(k)}_{n,i}(x_N) s_i^{(n-1)}, \qquad 0 \le k \le n-2, \tag{4.8}$$

$$s_0^{(n-1)} = s_N^{(n-1)}. \tag{4.9}$$

Lorsque le système S possède une solution, la fonction s suivante:

$$s(x) = q(x) + \sum_{i=0}^{N} H_{n,i}(x) s_i^{(n-1)}, \tag{4.10}$$

définit une fonction spline périodique sur Δ satisfaisant (4.1). Donc l'existence et l'unicité de l'ensemble solution de S est équivalent à l'existence et l'unicité d'une fonction spline périodique s satisfaisant (4.1).

Maintenant montrons que le système S est équivalent au système S' suivant:

$$y_j = q(t_j) + \sum_{i=0}^{\infty} H_{n,i}(t_j) s_i^{(n-1)}, \qquad 0 \le j \le N+n-2, \tag{4.11}$$

où $y_{N+j} = y_j$, $s_{N+i}^{(n-1)} = s_i^{(n-1)}$ et $t_{N+i} = t_i + b - a$ par définition. Remarquons tout d'abord que $H_{n,i}(x)$ est un polynôme de degré $\le n-2$ lorsque $x \ge x_{i+1}$. Ainsi, par (4.8),

$$\begin{aligned} q(t_r) &= \sum_{j=0}^{n-2} (t_r - x_0)^j \frac{q^{(j)}(x_0)}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(t_{N+r} - x_N)^j}{j!} q^{(j)}(x_N) + \sum_{i=0}^{N-1} s_i^{(n-1)} \sum_{j=0}^{n-2} H^{(j)}_{n,i}(x_N) \frac{(t_{N+r} - x_N)^j}{j!} \\ &= q(t_{N+r}) + \sum_{i=0}^{N-1} s_i^{(n-1)} H_{n,i}(t_{N+r}), \qquad 0 \le r \le n-2. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Comme les matrices de Vandermonde sont inversibles, le système d'équations (4.12) est donc équivalent à (4.8). Ainsi,

$$\begin{aligned} y_{N+r} = y_r &= q(t_r) + \sum_{i=0}^{N-1} s_i^{(n-1)} H_{n,i}(t_r) \\ &= \left[q(t_{N+r}) + \sum_{i=0}^{N-1} s_i^{(n-1)} H_{n,i}(t_{N+r}) \right] + \sum_{i=N}^{2N-1} s_i^{(n-1)} H_{n,i}(t_{N+r}) \end{aligned} \tag{4.13}$$

pour $0 \leq r \leq n-2$. Cela démontre l'équivalence des systèmes S et S'.

Considérons maintenant une combinaison linéaire de la j–ième à la $(j+n-1)$–ième équation de (4.11) avec $0 \leq j \leq N-1$. Puisque $[t_j, \ldots, t_{j+n-1} : x]q(x) = 0$, nous obtenons

$$[t_j, \ldots, t_{j+n-1} : x]y(x) = \sum_{i=0}^{N-1} s_i^{(n-1)}[t_j, \ldots, t_{j+n-1} : x]H_{n,i}(x), 0 \leq j \leq N-1, \quad (4.14)$$

où $y(t_i) = y_i$ par définition. Par conséquent, (4.11) est équivalent à (4.14)+(4.15) où

$$y_j = q(t_j) + \sum_{i=0}^{\infty} s_i^{(n-1)} H_{n,i}(t_j), \qquad N \leq j \leq N+n-2. \quad (4.15)$$

Le système d'équations (4.14) a N équations et a N inconnues $s_i^{(n-1)}$, $0 \leq i \leq N-1$. De plus, lorsque (4.14) possède une solution, $q(x)$ est uniquement déterminé par (4.15). Ainsi, (4.14) détermine l'existence et l'unicité de la fonction spline d'interpolation et nous validons le théorème suivant.

Théorème 2. *Soient $N > n$ et $\Delta : a = x_0 < x_1 \cdots < x_N = b$ une partition de $[a, b]$. Alors il existe une unique fonction spline périodique, s, de degré n sur Δ telle que*

$$s(t_j) = y_j, \qquad 0 \leq j \leq N-1,$$

si, et seulement si, la matrice U d'ordre N apparaissant dans l'équation suivante est inversible:

$$B = US^{(n-1)} \quad (4.16)$$

où $B_i = [t_i, \ldots, t_{i+n-1} : x]y(x)$, $S_i^{(n-1)} = s_i^{(n-1)}$ et

$$U_{i,j} = \begin{cases} [t_i, \ldots, t_{i+n-1} : x]H_{n,j}(x) & \text{si } j \geq i \\ [t_i, \ldots, t_{i+n-1} : x]H_{n,N+j}(x) & \text{si } j < i. \end{cases}$$

De plus, $s^{(n-1)}(x_i) = s_i^{(n-1)}$ et U est une matrice bande de largeur $n+1$.

Le théorème suivant donne une relation entre la dérivée $(n-1)$–ième de la fonction erreur e aux points x_i et les fonctionnelles linéaires $L_{n,i}^{n-1}$.

Théorème 3. *Si $f \in SG_n^p$ et si s est une fonction spline périodique de degré n sur Δ telle que $s(t_i) = f(t_i)$, $0 \leq i \leq N-1$, alors*

$$UE^{(n-1)} = R \quad (4.17)$$

où

$$\begin{aligned} e(x) &= f(x) - s(x), \\ E^{(n-1)} &= [e^{(n-1)}(x_0), \ldots, e^{(n-1)}(x_{N-1})]^T, \\ R_i &= -L_{n,i}^{n-1}(f), \\ R &= [R_0, \ldots, R_{N-1}]^T. \end{aligned}$$

Preuve. De la périodicidé de f et de (3.5), nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-1} U_{i,j} f^{(n-1)}(x_j) &= \sum_{j=0}^{i-1} U_{i,j} f^{(n-1)}(x_j) + \sum_{j=i}^{N-1} U_{i,j} f^{(n-1)}(x_j) \\
&= \sum_{j=0}^{i-1} [t_i, \ldots, t_{i+n-1} : x] H_{n,j+N}(x) f^{(n-1)}(x_j) \\
&\quad + \sum_{j=i}^{N-1} [t_i, \ldots, t_{i+n-1} : x] H_{n,j}(x) f^{(n-1)}(x_j) \\
&= \sum_{j=i}^{i+N-1} [t_i, \ldots, t_{i+n-1} : x] H_{n,j}(x) f^{(n-1)}(x_j) \\
&= [t_i, \ldots, t_{i+n-1} : x] f(x) - L_{n,i}^{n-1}(f). \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Nous obtenons par (3.4) et par (4.18) avec $f = s$ que

$$\sum_{j=0}^{N-1} U_{i,j} s^{(n-1)}(t_j) = [t_i, \ldots, t_{i+n-1} : x] s(x) = [t_i, \ldots, t_{i+n-1} : x] f(x). \qquad (4.19)$$

Ainsi, par (4.18) et (4.19),

$$\sum_{j=0}^{N-1} U_{i,j} (f^{(n-1)}(t_i) - s^{(n-1)}(t_i)) = -L_{n,i}^{n-1}(f). \quad \square$$

5. Bornes d'erreurs. Dans cette section nous nous intéressons à $e^{(k)}$, la dérivée k–ième de l'erreur d'interpolation.

Théorème 4.

(1) $\max_{0 \le i \le N-1} |e^{(n-1)}(x_i)| \le C_{n-1} \|f^{(n+1)}\|_\infty \|\Delta\|^2$,

(2) $\|e^{(n-1)}\|_\infty \le \left[C_{n-1} + \frac{1}{8}\right] \|f^{(n+1)}\|_\infty \|\Delta\|^2$,

(3) $\|e^{(k)}\|_\infty \le \binom{n}{k+1} \|e^{(n-1)}\|_\infty \frac{\|\Delta\|^{n-k-1}}{2^{n-k-1}}, \quad 0 \le k \le n-1$,

où $C_{n-1} = \frac{1}{8(n-1)!} \|U^{-1}\|_\infty$.

Preuve. (1) Nous obtenons le résultat directement de (4.17) et du lemme 1.

(2) $e^{(n-1)}(x)$ est une fonction spline de degré 1 sur Δ. Par une interpolation linéaire, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|e^{(n-1)}(x)| &\le \left| e^{(n-1)}(x_i) \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + e^{(n-1)}(x_{i+1}) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right| \\
&\quad + \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{2} |(x_{i+1} - x)(x_i - x)| \\
&\le \left[C_{n-1} + \frac{1}{8} \right] \|f^{(n+1)}\|_\infty \|\Delta\|^2.
\end{aligned}$$

(3) Pour simplifier la démonstration supposons que $n - k - 1$ est impair ($n - k - 1 = 2m + 1$). En considérant l'extension de e sur $\mathbb{R}$, nous avons $e(t_i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Ainsi, par le théorème de Rolle, il existe pour tout $x \in [a, b]$ des valeurs $\{\phi_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ telles que

(1) $e^{(k)}(\phi_i) = 0$,

(2) $|\phi_{i+j} - \phi_i| \leq (k + j + 1)\|\Delta\|$,
(3) $x \in [\phi_{-i}, \phi_{i+1}]$ pour $i \geq 0$,
(4) $\phi_i < \phi_{i+1}$.

Posons $\psi_i = \phi_{r+i}$ où $1 \leq i \leq n - k - 1$ et

$$r = \begin{cases} -m & \text{si } |x - \phi_{-m}| \leq |x - \phi_{m+1}|, \\ -m + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Après interpolation par un polynôme de degré $n - k - 1$, de (2.3) il vient:

$$e^{(k)}(x) = [\psi_1, \ldots, \psi_{n-k-1}, x : u]e^{(k)}(u) \prod_{i=1}^{n-k-1} (x - \psi_i). \tag{5.1}$$

Ainsi,

$$|e^{(k)}(x)| \leq \frac{\|e^{(n-1)}\|_\infty}{(n - k - 1)!} \left| \prod_{i=1}^{n-k-1} (x - \psi_i) \right|. \tag{5.2}$$

Pour terminer la démonstration il suffit de considérer (5.2) et l'inéquation suivante:

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=1}^{n-k-1} (x - \psi_i) \right| &\leq \frac{|\phi_{m+1} - \phi_{-m}|}{2} \prod_{i=0}^{m-1} |(x - \phi_{-i})(x - \phi_{i+1})| \\ &\leq \frac{|\phi_{m+1} - \phi_{-m}|}{2^{n-k}} \prod_{i=0}^{m-1} |\phi_{i+1} - \phi_{-i}|^2 \\ &\leq (k + 2m + 2)\frac{\|\Delta\|^{n-k-1}}{2^{n-k-1}} \left[\prod_{i=0}^{m-1} (k + 2i + 2)^2 \right] \\ &\leq \frac{n!\|\Delta\|^{n-k-1}}{(k + 1)!2^{n-k-1}}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Ceci termine la preuve. □

Remarque 2. Du théorème précédent, il est facile d'obtenir une inégalité de la forme

$$\|e^{(k)}\|_\infty \leq W_k\|f^{(n+1)}\|_\infty\|\Delta\|^{n+1-k}, \qquad 0 \leq k \leq n - 1, \tag{5.4}$$

avec W_k explicite lorsque la valeur de $\|U^{-1}\|_\infty$ est connue.

6. Splines périodiques de degré 2. Dans cette section (lemme 5.1), nous retrouvons les résultats de [3] donnant la forme matricielle (4.16). Nous présentons une nouvelle preuve de ce résultat puisque notre façon de procéder est différente et permet d'illustrer une méthode plus générale. De plus, nous obtenons un nouveau résultat (théorème 6) qui nous donne la valeur de chacune des bornes explicites W_k.

Posons

$$\phi_i(t) = \frac{4(t - x_i)(x_{i+1} - t)}{(x_{i+1} - x_i)^2}.$$

Ainsi pour $t \in [x_i, x_{i+1}]$ nous avons $0 \leq \phi_i(t) \leq 1$ et $\phi_i(t)$ mesure l'écart entre t et Δ.

Lemme 5.

(1) *U est une matrice bande de largeur* 3 *et*

$$2!U_{i,i} = \frac{x_{i+1}-t_i}{t_{i+1}-t_i} - \frac{1}{4}\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\phi_i(t_i),$$
$$2!U_{i,i+1} = 1 + \frac{1}{4}\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\phi_i(t_i) + \frac{1}{4}\frac{x_{i+2}-x_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\phi_{i+1}(t_{i+1}),$$
$$2!U_{i,i+2} = \frac{t_{i+1}-x_{i+1}}{t_{i+1}-t_i} - \frac{1}{4}\frac{x_{i+2}-x_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\phi_{i+1}(t_{i+1}),$$

(2) $U_{i,i+1} - U_{i,i} - U_{i,i+2} \geq \frac{\epsilon}{4}$ *où* $\epsilon = \min\{\phi_i(t_i)\}$.

Preuve. (1) Nous avons, de la définition de U et de (2.4),

$$\begin{aligned}2!U_{i,l} &= (x_{l+1}-x_{l-1})[x_{l-1},x_l,x_{l+1}:u][t_i,t_{i+1}:x](x-u)_+^2\\ &= \frac{x_{l+1}-x_{l-1}}{t_{i+1}-t_i}\left(\frac{(t_{i+1}-x_{l-1})_+^2-(t_i-x_{l-1})_+^2}{(x_{l-1}-x_l)(x_{l-1}-x_l)}\right.\\ &\quad\left.+\frac{(t_{i+1}-x_l)_+^2-(t_i-x_l)_+^2}{(x_l-x_{l-1})(x_l-x_{l+1})}+\frac{(t_{i+1}-x_{l+1})_+^2-(t_i-x_{l+1})_+^2}{(x_{l+1}-x_{l-1})(x_{l+1}-x_l)}\right).\end{aligned}$$

Puisque l'opérateur $[x_{l-1},x_l,x_{l+1}:u]$ est exact pour les polynôme de degré ≤ 1, pour $l<i$ ou $l>i+2$ le premier membre de l'équation précédente est nul. Il suffit donc de considérer les cas où $l=i$, $i+1$ et $i+2$.

$$\begin{aligned}2!U_{i,i} &= \frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{t_{i+1}-t_i}\left(\frac{(t_{i+1}-x_{i-1})^2-(t_i-x_{i-1})^2}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i+1})}\right.\\ &\quad\left.+\frac{(t_{i+1}-x_i)^2-(t_i-x_i)^2}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})}+\frac{(t_{i+1}-x_{i+1})^2-(t_i-x_{i+1})^2}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\right)\\ &\quad+\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{t_{i+1}-t_i}\frac{(t_i-x_{i+1})^2}{(x_{i+1}-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\\ &= 0+\frac{(t_i-x_{i+1})^2}{(t_{i+1}-t_i)(x_{i+1}-x_i)},\\ 2!U_{i,i+1} &= \frac{x_{i+2}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\left(\frac{(t_{i+1}-x_i)^2-(t_i-x_i)^2}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})}+\frac{(t_{i+1}-x_{i+1})^2}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})}\right)\\ &= \frac{x_{i+2}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\left(\frac{(t_{i+1}-x_{i+1})^2}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})}\right.\\ &\quad\left.+\frac{(t_{i+1}-x_i)(t_{i+1}-x_{i+1})+(t_{i+1}-t_i)(x_{i+1}-x_i)+(t_i-x_i)(x_{i+1}-t_i)}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})}\right)\\ &= \frac{x_{i+2}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\left(\frac{(t_{i+1}-t_i)(x_{i+1}-x_i)}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})}+\frac{(x_{i+1}-t_i)(t_i-x_i)}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})}\right.\\ &\quad\left.+(t_{i+1}-x_{i+1})\left\{\frac{t_{i+1}-x_i}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})}+\frac{t_{i+1}-x_{i+1}}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})}\right\}\right)\\ &= \frac{(x_{i+2}-x_i)(t_{i+1}-x_{i+1})}{t_{i+1}-t_i}\left(\frac{-(t_{i+1}-x_{i+2})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}\right)\\ &\quad+1+\frac{(x_{i+1}-t_i)(t_i-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)(t_{i+1}-t_i)}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{x_{i+2}-x_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\phi_{i+1}(t_{i+1}) + 1 + \frac{1}{4}\frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\phi_i(t_i).$$

(2) De la partie (1) de ce théorème, nous obtenons

$$U_{i,i+1} - U_{i,i} - U_{i,i+2} = \frac{1}{4}\left(\frac{x_{i+2}-x_{i+1}}{t_{i+1}-t_i}\phi_{i+1}(t_{i+1}) + \frac{x_{i+1}-x_i}{t_{i+1}-t_i}\phi_i(t_i)\right) \geq \frac{\epsilon}{4}, \tag{5.5}$$

ce qui complète la preuve. □

Théorème 6. *Soit $N > 2$ et soit $\Delta : a = x_0 < x_1 \cdots < x_N = b$ une partition de $[a, b]$.*

(1) *Si $y_j \in \mathbb{R}$ alors il existe une unique fonction spline périodique s de degré 2 sur Δ telle que*

$$s(t_j) = y_j, \qquad 0 \leq j \leq N-1,$$

si, et seulement si, il existe un j tel que $x_j \neq t_j$.

(2) *Si $f \in SG_n^p$, $y_j = f(t_j)$ et $e = f - s$ alors*

$$\|e^{(j)}\|_\infty \leq W_j \|f^{(3)}\|_\infty \|\Delta\|^{3-j}, \qquad j = 0, 1,$$

avec $W_1 = \frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{8}$ et $W_0 = W_1$.

Preuve. (1) Supposons qu'il existe un $z \neq 0$ tel que $Uz = 0$. Posons

$$\begin{aligned} D &= \{i / |z_i| = \max |z_l| \neq 0\}, \\ E &= \{i / U_{i-1,i} - U_{i-1,i-1} - U_{i-1,i+1} > 0\}. \end{aligned}$$

Nous avons que $D \cap E = \varnothing$, car sinon, pour $i \in D \cap E$, nous obtenons la contradiction suivante:

$$\begin{aligned} 0 &= |U_{i-1,i}z_i + U_{i-1,i-1}z_{i-1} + U_{i-1,i+1}z_{i+1}| \\ &\geq (U_{i-1,i} - U_{i-1,i-1} - U_{i-1,i+1})|z_i| > 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant $i \in D$. Puisque les coefficients de la matrice U ne sont pas négatifs et $Uz = 0$, nous obtenons du lemme 5.2 que $i+1 \in D$. Ainsi $D = \{0, \ldots, N-1\}$ et $V = \varnothing$. Ainsi, du lemme 5.2, nous obtenons que $\epsilon_i = 0$ pour tout i. Par conséquent $x_i = t_i$ pour tout i, ce qui contredit l'hypothèse. Donc il n'existe pas de tel z et U est ainsi inversible. Donc s existe.
(2) Par le lemme 5.2 et par un argument sur les matrices à dominance diagonale (v. [12, p. 101]), nous avons

$$\|U^{-1}\|_\infty \leq \frac{4}{\epsilon}. \tag{6.1}$$

Ainsi, par le lemme 4, nous obtenons le résultat désiré. □

Remarque 3. Après un peu d'algèbre, nous pouvons montrer que (3.9) devient,

$$\sum_{l=i}^{i+n} \int_{x_l}^{x_{l+1}} \frac{Q_i^1(u)}{(n-2)!} \frac{(x_{l+1}-u)(u-x_l)}{2}\, du \leq \frac{\|\Delta\|^2}{12(n-1)!}. \tag{6.2}$$

si $n = 2$. Ainsi dans ce cas les constantes W_i du théorème 6 peuvent être améliorées en remplaçant 8 par 12.

Exemple. Soient $n = 2$ et $t_i = (x_i + x_{i+1})/2$. Dans ce cas, nous obtenons du théorème (6.1) que $W_1 = W_0 = \frac{5}{8}$. Nous pouvons améliorer ce résultat en remarquant que dans (5.5) on peut remplacer $\frac{\epsilon}{4}$ par $\frac{1}{2}$ pour obtenir $W_0 = W_1 = \frac{3}{8}$. De plus, si l'on utilise (6.2), les résultats deviennent $W_0 = W_1 = \frac{7}{24}$.

Sous certaines conditions il est possible d'obtenir des inégalités de la forme (1.5) avec W_k optimal. Dernièrement, en nous fondant sur des techniques développées dans [9], nous avons obtenu la valeur optimale de $W_0 = \frac{1}{24}$ lorsque $n = 2$ avec $t_i = (x_i + x_{i+1})/2$, et la valeur optimale de $W_0 = \frac{5}{384}$ et $W_1 = \frac{1}{24}$ lorsque $n = 3$ avec $t_i = x_i$. De plus, nous avons obtenu la valeur optimale de W_0 lorque la partition est uniforme avec les t_i uniformément translatées par un paramètre μ. Ces résultats seront présentés prochainement.

7. Conclusions. Remarquons que la borne supérieure de $\|U^{-1}\|_\infty$ que nous avons obtenue est indépendante du rapport $K = \max|x_{i+1} - x_i|/\min|x_{i+1} - x_i|$ lorsque $n = 2$ et lorsque $n = 3$ et $t_i = x_i$ (v. [12]). Alors qu'en est-t-il de $\|U^{-1}\|_\infty$ pour $n \geq 3$ avec des t_i quelconques? Le problème est ouvert.

D'autre part, il est possible d'obtenir une relation semblable à (3.4) entre une spline et sa dérivée n–ième et d'obtenir une équation de la forme (4.17) avec $E^{(n)}$ remplaçant $E^{(n-1)}$. Mais cette fois-ci, $\|U^{-1}\|_\infty$ dépend de K.

English extended abstract. Throughout this paper we use the following notation. Let

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$$

be any partition of the interval $[a, b]$. A function s is said to be a spline of degree n over Δ if s is a polynomial of degree n on each interval $[x_i, x_{i+1}]$ and $s \in C^{n-1}[a, b]$. It is said to be periodic if

$$s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b), \qquad (0 \leq k \leq n-1). \tag{1.1}$$

Let $\|\Delta\| = \max\{x_{i+1} - x_i\}$ be the mesh size of the partition, and $t_j \in [x_j, x_{j+1})$, $(0 \leq j \leq N-1)$ be any fixed values. The extended sequences $\{x_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ and $\{t_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ are defined such that we have $x_{j+N} = b - a + x_j$ and $t_{j+N} = b - a + t_j$ for all $j \in \mathbb{Z}$. Finally let us consider SG_n and SG_n^p two function spaces. SG_n is the space of functions f such that

$$f \in \bigcap_{i=0}^{N-1} C^{n+1}(x_i, x_{i+1}) \cap C^{n-1}[a, b],$$

and $f^{(l)}$ $(l = n, n+1)$ are well defined at x_i^+ and x_i^-.

$$SG_n^p = \{f \in SG_n \mid (1.1) \text{ is satisfied by } f\}.$$

In section 3, we first show that there exists linear dependance relations connecting a spline and its $(n-1)$–th derivative. We note that other results about linear dependance relationships can be found in [8], [10], [5], [6], and [1]. For a given i, we obtain:

$$\sum_{j=i}^{n+i} A_j^{n-1} s(t_j) = \sum_{j=i}^{n+i} B_j^{n-1} s^{(n-1)}(x_j)$$

where A_j^{n-1} and B_j^{n-1} are defined by the following two equations:

$$\sum_{j=i}^{i+n-1} A_j^{n-1} f(t_j) = [t_i, \dots, t_{i+n-1} : x],$$
$$B_j^{n-1} = [t_i, \dots, t_{i+n-1} : x] H_{n,j}(x),$$

in which

$$H_{n,j}(x) = (x_{j+1} - x_j)[x_{j-1}, x_j, x_{j+1} : u] \frac{(x-u)_+^n}{n!}$$

(see eqs. (2.1) to (2.4) for more details about divided differences).

From these relations, we build linear operators $L_{n,i}^{n-1}$ (see eq. (3.5)) which are exact on polynomials of degree $\leq n$. We therefore obtain the following lemma which will be useful to obtain error bounds for an interpolating problem.

Lemma 1. *If $f \in SG_n$ and $K_{n,i}^{n-1}$ is the Peano kernel associated to $L_{n,i}^{n-1}$ then*

$$\|K_{n,i}^{n-1}\|_1 \leq \frac{\|\Delta\|^2}{8(n-1)!}, \tag{3.9}$$

$$|L_{n,i}^{n-1}(f)| \leq \frac{\|\Delta\|^2}{8(n-1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty. \tag{3.10}$$

Moreover, if the partition is a uniform partition of mesh size h and the values t_i are uniformly shifted ($t_i = x_i + \mu h$ with $0 \leq \mu < 1$) then

$$\|K_{n,i}^{n-1}\|_1 \leq \frac{\|\Delta\|^2}{12(n-1)!}, \tag{3.11}$$

$$|L_{n,i}^{n-1}(f)| \leq \frac{\|\Delta\|^2}{12(n-1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty. \tag{3.12}$$

In section 4 and after, we consider an interpolation problem where periodic splines of degree n are used as interpolants.

Theorem 2. *Let $N > n$, $\Delta : a = x_0 < x_1 \cdots < x_N = b$ be any partition of $[a, b]$, and y_j ($0 \leq j < N$) be any values in $\mathbb{R}$. Then there exists a unique periodic spline s of degree n over Δ such that*

$$s(t_j) = y_j, \qquad 0 \leq j \leq N-1,$$

if and only if the matrix U of order N appearing in the next equation is invertible:

$$B = US^{(n-1)} \tag{4.16}$$

where $B_i = [t_i, \dots, t_{i+n-1} : x]s(x)$, $S_i^{(n-1)} = s_i^{(n-1)}$, and

$$U_{i,j} = \begin{cases} [t_i, \dots, t_{i+n-1} : x] H_{n,j}(x) & \text{if } j \geq i, \\ [t_i, \dots, t_{i+n-1} : x] H_{n,N+j}(x) & \text{if } j < i. \end{cases}$$

Moreover, $s^{(n-1)}(x_i) = s_i^{(n-1)}$ and U is a $(n+1)$–banded matrix.

The following theorem gives a relation between the $(n-1)$–th derivative of the error function $e = f - s$ at knots x_i and operators $L_{n,i}^{n-1}$.

Theorem 3. *If $f \in SG_n^p$, and s is the unique periodic spline of degree n over Δ such that $s(t_i) = f(t_i)$, $0 \leq i \leq N-1$ then*

$$UE^{(n-1)} = R \tag{4.17}$$

where

$$\begin{aligned} e(x) &= f(x) - s(x) \\ E^{(n-1)} &= [e^{(n-1)}(x_0), \dots, e^{(n-1)}(x_{N-1})]^T, \\ R_i &= -L_{n,i}^{n-1}(f), \\ R &= [R_0, \dots, R_{N-1}]^T. \end{aligned}$$

In section 5, we obtain from Theorem 3 error bounds for derivatives of e.

Theorem 4.

(1) $\max_{0\leq i\leq N-1} |e^{(n-1)}(x_i)| \leq C_{n-1}\|f^{(n+1)}\|_\infty\|\Delta\|^2$,
(2) $\|e^{(n-1)}\|_\infty \leq \left[C_{n-1} + \frac{1}{8}\right] \|f^{(n+1)}\|_\infty\|\Delta\|^2$,
(3) $\|e^{(k)}\|_\infty \leq \binom{n}{k+1}\|e^{(n-1)}\|_\infty \frac{\|\Delta\|^{n-k-1}}{2^{n-k-1}}, \quad 0 \leq k \leq n-1$,

where $C_{n-1} = \frac{1}{8(n-1)!}\|U^{-1}\|_\infty$.

We therefore obtain

$$\|e^{(k)}\|_\infty \leq V_k\|U^{-1}\|_\infty\|f^{(n+1)}\|_\infty\|\Delta\|^{n+1-k} \tag{1.4}$$

where the values V_k are explicit and can be easily obtained from Theorem 4. We have not obtained upper bound for $\|U^{-1}\|_\infty$ in equation (1.4) for a general $n \geq 1$ but we can get a upper bound for the quadratic case ($n = 2$).

In section 6, we consider the quadratic case. The coefficients of the matrix U are given in Lemma 5. These coefficients also appear in [3] albeit in a different form. Since the proof of Lemma 5 is quite different from that given in [3], and illustrates a more general method to obtain U, this proff is given in this paper.

In Theorem 6, we obtain new results for periodic quadratic spline interpolation which gives explicit error bounds for e and $e^{(1)}$.

Theorem 6. *Let $N > 2$, $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ be a partition of $[a,b]$, and $t_j \in [x_j, x_{j+1})$.*

(1) *If $y_j \in \mathbb{R}$, $(0 \leq j \leq N-1)$ then there exits a unique periodic spline s of degree 2 over Δ such that*

$$s(t_j) = y_j, \qquad 0 \leq j \leq N-1,$$

if and only if there exits a j such that $x_j \neq t_j$.

(2) *If $f \in SG_n^p$, $y_j = f(t_j)$ and $e(x) = f(x) - s(x)$ then*

$$\|e^{(j)}\|_\infty \leq W_j\|f^{(3)}\|_\infty\|\Delta\|^{3-j} \qquad j = 0, 1$$

in which $W_1 = \frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{8}$ and $W_0 = W_1$.

We note that ϵ is defined in Lemma 5.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh, *The theory of splines and their applications*, Academic Press,, New York and London, 1967.
2. H. P. Dikshit, *Cubic interpolatory splines with nonuniform meshes*, J. Approx. Theory **45** (1985), 350–357.
3. S. Demko, *Interpolation by quadratic splines*, J. Approx. Theory **23** (1978), 392–400.
4. F. Dubeau, J. Savoie, *Développements asymptotiques de fonctions splines avec partage uniforme de la droite réelle*, SIAM J. Math. Anal. **26** (1989), 468–479.
5. F. Dubeau, J. Savoie, *On consistency relations for polynomial splines on a uniform partition*, BIT **27** (1987), 368–373.
6. F. Dubeau, J. Savoie, *Splines périodiques avec partage uniforme de la droite réelle*, Utilitas Math. **32** (1987), 111–120.
7. F. Dubeau, J. Savoie, *Relations de dépendance linéaire d'une fonction spline avec partage uniforme de la droite réelle*, Ann. Sci. Math. Québec **10** (1986), 5–15.
8. D. J. Fyfe, *Linear dependence relations connecting equal interval Nth degree splines and their derivatives*, J. Inst. Math. Appl. **7** (1971), 398–406.
9. C. A. Hall, W. Meyer, *Optimal error bounds for cubic spline interpolation*, J. Approx. Theory **16** (1976), 105–122.
10. H. ter Morsche, *On the relations between finite differences and derivatives of cardinal spline functions*, Spline Functions (Proc. Internat. Sympos., Karlsruhe, 1975), 1976, pp. 210–219.
11. L. Schumaker, *Spline functions: basic theory*, John Wiley & Sons, New York, 1981.
12. J. Stoer, R. Burlirsch, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag,, New York, 1980.

J. SAVOIE
COLLÈGE MILITAIRE ROYAL DE SAINT-JEAN
RICHELAIN, QUÉBEC, CANADA, J0J 1R0