

## LANGAGES DE DYCK GÉNÉRALISÉS

JACQUES LABELLE

RÉSUMÉ. La notion de chemin de Dyck généralisé [LY2] s'obtient lorsqu'on remplace dans les chemins de Dyck classiques l'unique pas  $(1, 1)$  et son symétrique  $(1, -1)$  par des pas provenant d'un sous-ensemble fini  $U$ , possiblement avec répétitions, de  $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{Z}$ , où  $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$  et  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ . Ces chemins, appelés  $U$ -chemins de Dyck, ainsi que d'autres ( $U$ -chemins de Dyck connexes,  $U$ -chemins de Dyck bilatères, «facteurs gauches» de  $U$ -chemins de Dyck, etc.) correspondent à des mots de langages algébriques intéressants. La méthodologie, appelée DSV par Schützenberger [Sc, Go, DV, Vi3, Vi4], est employée pour trouver des systèmes d'équations et des «formes closes» pour les séries génératrices à  $|U|$  variables non commutatives (resp. commutatives) de ces langages (resp. ces familles de chemins). Les cas  $U = \{u_0, u_1, \bar{u}_1\}$  et  $\{u_0, u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2\}$ , où  $u_0 = (x_0, 0)$ ,  $u_1 = (x_1, 1)$ ,  $\bar{u}_1 = (x_1, -1)$ ,  $u_2 = (x_2, 2)$  et  $\bar{u}_2 = (x_2, -2)$ , sont entièrement résolus; dans le cas général les équations deviennent vite de degré très grand. L'étude des paires de  $U$ -chemins sans croisement (resp. sans intersection) se ramène à l'étude des  $U'$ -chemins de Dyck (resp.  $U'$ -chemins de Dyck connexes) où  $U'$  est décrit [La] à partir de  $U$ . De plus le lien avec les fractions continuées ainsi que la relation entre le cas «avec paliers» et «sans palier» sont étudiés.

ABSTRACT. Generalized Dyck paths [LY2] are obtained from classical Dyck paths when the unique steps  $(1, 1)$  and  $(1, -1)$  are replaced by steps from a finite subset (with repetitions)  $U$  of  $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{Z}$ , where  $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$  and  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ . This family of paths, called  $U$ -Dyck paths, and others (connected  $U$ -Dyck paths, two-sided  $U$ -Dyck paths, left factors of  $U$ -Dyck paths, etc.) correspond to words of interesting algebraic languages. The so-called "DSV or Schützenberger methodology" [Sc, Go, DV, Vi3, Vi4] is used to find systems of algebraic equations and closed forms for the  $|U|$  noncommutative (resp. commutative) variables generating functions of these languages (resp. families of paths). The cases  $U = \{u_0, u_1, \bar{u}_1\}$  and  $\{u_0, u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2\}$ , where  $u_0 = (x_0, 0)$ ,  $u_1 = (x_1, 1)$ ,  $\bar{u}_1 = (x_1, -1)$ ,  $u_2 = (x_2, 2)$  and  $\bar{u}_2 = (x_2, -2)$ , are completely solved; in the general case the degree of the equations becomes rapidly very high. Pairs of non-crossing (resp. non-intersecting)  $U$ -paths lead naturally to  $U'$ -Dyck paths (resp. connected  $U'$ -Dyck paths) where  $U'$  is easily described [La] from  $U$ . The relation with continued fractions and a formula relating the presence or not of horizontal steps are considered. See the English extended abstract at the end of the paper

**0. Introduction.** Soit  $U$  un ensemble fini (appelé l'alphabet),  $U^*$  le monoïde libre engendré par  $U$ . Supposons que  $U$  soit muni d'une fonction hauteur  $h: U \rightarrow \mathbb{Z}$  ainsi que d'une involution partiellement définie,  $\sigma: V \rightarrow V$ ,  $V \subseteq U$  telle que  $h(\sigma(v)) = -h(v)$ . Étendons  $h$  à  $U^*$  en posant, pour  $w = x_1 x_2 \dots x_n$ ,  $h(w) = \sum_i h(x_i)$ .

Les langages de Dyck, noté  $D$ , de Dyck connexe, noté  $DC$ , de Dyck bilatère, noté  $DB$ , de Dyck bilatère connexe, noté  $DBC$ , et de facteur gauche de mots de Dyck, noté  $DG$ , sont les

Reçu le 4 octobre 1991 et, sous forme définitive, le 25 septembre 1992.  
Avec le support financier du FCAR (Québec) et du CRSNG (Canada).



plus, ici la dernière partie de la méthode, l'extraction du coefficient à partir d'une forme close pour la série génératrice, est rarement complétée car les séries génératrices obtenues sont souvent d'expression plutôt monstrueuse.

Introduisons, pour  $i, j \geq 0$ , les langages  $D_i, DC_i$  et  $D_{i,j}$  comme suit:

$$D_i = \{w \in U^* \mid h(w) = i \text{ et } w = w_1 w_2 \implies h(w_1) \geq 0\} \quad (0.6)$$

$$DC_i = \{w \in U^* \mid w \neq e, h(w) = i \text{ et } w = w_1 w_2, w_1 \neq e w_2 \neq e, \implies h(w_1) > 0\} \quad (0.7)$$

$$D_{i,j} = \{w \in U^* \mid h(w) = j - i \text{ et } w = w_1 w_2 \implies h(w_1) \geq -i\}. \quad (0.8)$$

On identifie un mot dans  $D_i$  à un chemin dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  partant de l'origine, restant au-dessus de l'axe des  $x$  et se terminant au niveau  $i$ ; de même un mot dans  $D_{i,j}$  s'identifie à un chemin dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  partant du point  $(0, i)$ , restant au-dessus de l'axe des  $x$  et se terminant au niveau  $j$ . On a par définition  $D_i = D_{0,i}$ .

Dénotons  $D, DC, DB, DBC, DG, D_i, DC_i$  et  $D_{i,j}$ , aussi bien les familles de chemins, les langages ou les séries formelles en variables non commutatives  $U$  associées, (i.e. éléments de l'algèbre  $\mathbb{Z}\langle\langle U \rangle\rangle$ ); dénotons  $\mathbf{D}, \mathbf{DC}, \mathbf{DB}, \mathbf{DBC}, \mathbf{DG}, \mathbf{D}_i, \mathbf{DC}_i$  et  $\mathbf{D}_{i,j}$ , les séries formelles correspondantes en variables commutatives  $U$  (i.e. éléments de l'algèbre  $\mathbb{Z}[[U]]$ ).

Nous nous consacrerons surtout au cas symétrique  $U = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ ,  $h(u_0) = 0, h(u_i) = i = -h(\bar{u}_i), \sigma(u_0) = u_0, \sigma(u_i) = u_i, \sigma(\bar{u}_i) = \bar{u}_i$ . Le calcul des séries  $\mathbf{D}, \mathbf{DC}, \mathbf{DB}, \mathbf{DBC}, \mathbf{DG}, \mathbf{D}_i, \mathbf{DC}_i$  et  $\mathbf{D}_{i,j}$ , dans ce cas est suffisamment général car, à partir de  $\mathbf{D}(u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)$ , on retrouve le cas où  $U$  est arbitraire et  $m = \max |h(u)|$  en posant  $u_i = \sum_{h(u)=i} u$  et  $\bar{u}_i = \sum_{h(u)=-i} u$ .

Pour un langage  $L \subseteq U^*$ , où  $U = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ , notons  $\bar{L} = \{\bar{w} \mid w \in L\}$  et  $\tilde{L} = \{\tilde{w} \mid w \in L\}$  les langages où pour  $w = x_1 x_2 \dots x_n$ , on pose  $\bar{w} = \sigma(x_1)\sigma(x_2)\dots\sigma(x_n)$  et  $\tilde{w} = \sigma(x_n)\dots\sigma(x_2)\sigma(x_1)$ . De plus, pour  $\mathbf{F} \in \mathbb{Z}[[U]]$ , notons  $\bar{\mathbf{F}}$ , la série définie par  $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m, u_1, u_2, \dots, u_m)$ . Notez qu'en passant aux séries en variables commutatives les séries  $\bar{D}$  et  $\tilde{D}$ , par exemple, deviennent toutes deux  $\bar{\mathbf{D}}$ .

**Théorème 1.** Soit  $U = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ ,  $h(u_0) = 0, h(u_i) = i = -h(\bar{u}_i)$ . Dans  $\mathbb{Z}\langle\langle U \rangle\rangle$ , on a

$$D = 1 + DC \cdot D \quad (0.9)$$

$$DC = u_0 + \sum_{1 \leq i, j \leq m} u_i D_{i-1, j-1} \bar{u}_j \quad (0.10)$$

$$D_{i-1, j-1} = \sum_{k=1}^{\min(i, j)} (\tilde{D}_{i-k})(DC_{j-k}) \text{ pour } i, j \geq 1, \quad (0.11)$$

$$D_i = D \cdot DC_i - D \left( \sum_{j=1}^m u_j D_{j-1, i-1} \right) \text{ pour } i \geq 1, \quad (0.12)$$

$$\tilde{D}_{i,j} = D_{j,i} \quad (0.13)$$

*Preuve.* (0.9) est standard. Pour (0.10), un  $U$ -chemin de Dyck connexe est, ou bien  $u_0$ , ou bien commençant par  $u_i$  et se termine par  $\bar{u}_j$ , avec entre les deux un  $D_{i-1, j-1}$ -chemin. Pour obtenir (0.11), dans un  $D_{i-1, j-1}$ -chemin, il suffit de considérer la droite visitée la plus basse, d'équation  $x = k - 1$  (voir la figure 2) et de couper le chemin au point où cette droite est visitée pour la dernière fois. Pour (0.12), un  $D_i$ -chemin,  $i \geq 1$ , commence par un  $D$ -chemin puis un

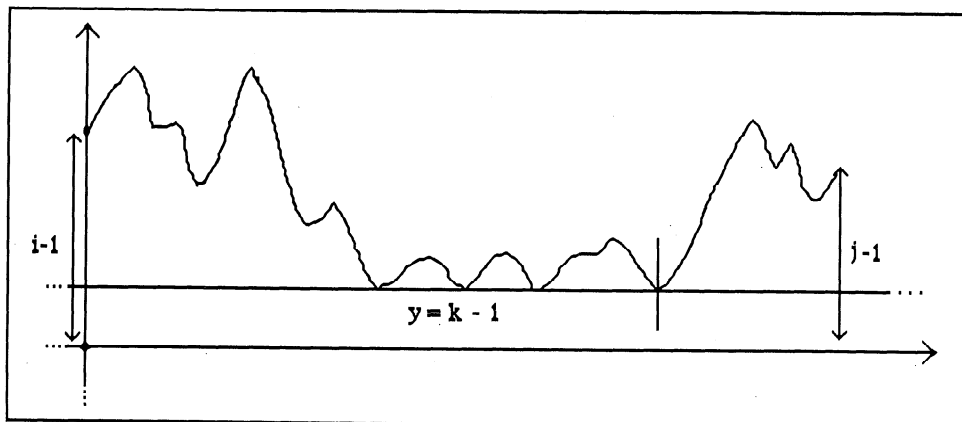


FIGURE 2.  $D_{i-k,0} \cdot DC_{j-k} = \tilde{D}_{i-k} \cdot DC_{j-k}$

pas  $u_j$ ,  $j \geq 1$ , là où le chemin quitte «pour de bon» l'axe des  $x$ , puis un  $D_{j-1,i-1}$ -chemin. Un  $D_{i,j}$ -chemin, lu de droite gauche, devient un  $D_{j,i}$ -chemin où un pas de hauteur  $b$  devient de hauteur  $-b$ , d'où (0.13).  $\square$

**Théorème 2.** Soit  $U = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ ,  $h(u_0) = 0$ ,  $h(u_i) = i = -h(\bar{u}_i)$ . Dans  $\mathbb{Z}[[U]]$ , les  $m$  séries  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{D}_i$ ,  $1 \leq i < m$ , satisfont aux  $m$  équations quadratiques suivantes : (où on pose  $\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}$  et  $\mathbf{D}_{-n} = 0$  pour  $n > 0$ )

$$\mathbf{D} = 1 + u_0 \mathbf{D} + \sum_{1 \leq i, j \leq m} u_i \bar{u}_j \left( \sum_{k \geq 1} \bar{\mathbf{D}}_{i-k} \mathbf{D}_{j-k} \right) \quad (0.14)$$

$$\mathbf{D}_i = \sum_{j=1}^m u_j \left( \sum_{k \geq 1} \bar{\mathbf{D}}_{j-k} \mathbf{D}_{i-k} \right), \quad 1 \leq i < m \quad (0.15)$$

*Preuve.* (0.14) Dans  $\mathbf{D} = 1 + \mathbf{DC} \cdot \mathbf{D}$ , remplaçons  $\mathbf{DC}$  par  $u_0 + \sum_{1 \leq i, j \leq m} u_i \bar{u}_j \mathbf{D}_{i-1, j-1}$ ; puis utilisons (0.11) et (0.13) qui précèdent. On dérive (0.15) de façon similaire.  $\square$

**1. Le cas classique (chemins de Dyck et de Motzkin classiques).** Soit  $U = \{u_0, u_1, \bar{u}_1\}$ , où  $h(u_0) = 0$ ,  $h(u_1) = 1 = -h(\bar{u}_1)$ .

**Proposition 1.** En posant  $u_0 = h$ ,  $u_1 = u$  et  $\bar{u}_1 = \bar{u}$ , la fonction génératrice  $\mathbf{D}(h, u, \bar{u})$  satisfait, dans  $\mathbb{Z}[[h, u, \bar{u}]]$ , l'équation quadratique suivante :

$$u\bar{u}\mathbf{D}^2 - (1-h)\mathbf{D} + 1 = 0. \quad (1.1)$$

*Preuve.* Ici  $m = 1$  et (0.15) est absente; de plus  $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$  et (0.14) devient (1.1).  $\square$

D'où l'on tire :

$$\mathbf{D}(h, u, \bar{u}) = \frac{1}{2u\bar{u}} \left\{ 1 - h - \sqrt{(1-h)^2 - 4u\bar{u}} \right\}. \quad (1.2)$$

Bien sûr,  $\mathbf{D}(0, t, t) = (1 - \sqrt{1 - 4t^2})/2t^2$  est la série génératrice des chemins de Dyck classiques,  $\mathbf{D}(t, t, t) = (1 - t - \sqrt{1 - 2t - 3t^2})/2t^2$  celle des chemins de Motzkin classiques et  $\mathbf{D}(2t, t, t) = (1 - 2t - \sqrt{1 - 4t})/2t^2$  celle des chemins de Motzkin colorés [Vi1] (i.e. à paliers bicolorés).

**Proposition 2.** Dans  $\mathbb{Z}[[h, u, \bar{u}]]$ , on a :

$$\mathbf{DC} = 1 - \mathbf{D}^{-1} \quad ; \quad \mathbf{DB} = (1 - \mathbf{DBC})^{-1} \quad ; \quad \mathbf{DBC} = 2\mathbf{DC} \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{D}$  est donné par (1.2).

*Preuve.* Découle, en passant aux variables commutatives, des équations évidentes suivantes dans  $\mathbb{Z}\langle\langle h, u, \bar{u} \rangle\rangle$  :  $D = 1 + DC \cdot D$ ,  $DB = 1 + DBC \cdot DB$  et  $DBC = DC + \overline{DC}$ .  $\square$

**Proposition 3.** Dans  $\mathbb{Z}[[h, u, \bar{u}]]$ , on a :

$$\mathbf{D}_i = u^i \mathbf{D}^{i+1} \quad \text{et} \quad \mathbf{DC}_i = u^i \mathbf{D}^i \quad (1.4)$$

$$\mathbf{DG} = \sum_{i \geq 0} \mathbf{D}_i = \frac{\mathbf{D}}{(1 - u\mathbf{D})}. \quad (1.5)$$

*Preuve.* Un  $D_i$ -chemin doit pour la dernière fois quitter l'axe des  $x$  avec un pas  $u$  puis c'est un  $D_{i-1}$ -chemin. En d'autres mots, on a  $D_i = DuD_{i-1}$ ; ce qui implique (1.4) et (1.5).

Le calcul des séries  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{DC}$ ,  $\mathbf{DB}$ ,  $\mathbf{DBC}$ ,  $\mathbf{DG}$ ,  $\mathbf{D}_i$ ,  $\mathbf{DC}_i$ , et  $\mathbf{D}_{i,j}$  (par (0.11)), aussi bien dans  $\mathbb{Z}[[h, u, \bar{u}]]$  que dans  $\mathbb{Z}[[t]]$  peut maintenant être complété avec MAPLE; inutile d'écrire explicitement ces expressions et les premiers termes de ces séries.

*Remarque.* Soit  $U = \{x_1, x_2, \dots, x_a, y_1, y_2, \dots, y_b, z_1, z_2, \dots, z_c\}$  où  $h(x_i) = 1$ ,  $h(y_j) = 0$  et  $h(z_k) = -1$ . La série génératrice  $\mathbf{D}_U(t)$  est alors donnée par  $D(bt, at, ct)$  où  $D(h, u, \bar{u})$  est donnée par (1.2). Notez qu'un  $\mathbf{D}_U$ -chemin (respectivement  $\mathbf{DG}_U$ -chemin) lorsqu'on lui fait subir la réflexion  $(x, y) \mapsto (x, -y)$  puis la rotation de  $45^\circ$  devient un chemin sous-diagonal colorié se terminant sur la diagonale (respectivement un chemin sous-diagonal) tel que considéré dans [BPS2] et dans [BPS1, G-B] lorsque  $a = b = c = 1$ . Un calcul facile de  $\mathbf{D}(bt, at, ct)$  et  $\mathbf{DG}(bt, at, ct)$  redonne les fonctions génératrices suivantes, trouvées en [BPS2], pour ces chemins sous-diagonaux :

$$\frac{1}{2act^2}(1 - bt - \sqrt{\Delta}) \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{2at} \left\{ \frac{1 - (2a + b)t - \sqrt{\Delta}}{(a + b + c)t - 1} \right\} \quad \text{où} \quad \Delta = 1 - 2bt + (b^2 - 4ac)t^2. \quad (1.7)$$

**2. Le cas  $m = 2$ .** Soit  $U = \{u_0, u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2\}$ , où  $h(u_0) = 0$ ,  $h(u_1) = 1 - h(\bar{u}_1)$ ,  $h(u_2) = 2 - h(\bar{u}_2)$ .

**Proposition 4.** On a (en posant  $u_0 = h$ ,  $u_1 = u$ ,  $\bar{u}_1 = \bar{u}$ ,  $u_2 = v$ ,  $\bar{u}_2 = \bar{v}$ ) l'équation polynomiale suivante de degré quatre satisfaite par  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(h, u, v\bar{u}, \bar{v})$  :

$$(v^2\bar{v}^2 + 2u\bar{u}v\bar{v} - u^2\bar{v}^2 - \bar{u}^2v^2)\mathbf{D}^4 - ((u\bar{u} + v\bar{v})(v + \bar{v}) + (1 - h)v\bar{v} - u^2v + u^2\bar{v})\mathbf{D}^3 + (u\bar{u} + (1 - h)(v + \bar{v}) + 2v\bar{v})\mathbf{D}^2 - (1 - h + v + \bar{v})\mathbf{D} + 1 = 0. \quad (2.1)$$

*Preuve.* Pour  $m = 2$ , les équations (0.13) et (0.14) deviennent respectivement :

$$\mathbf{D} = 1 + h\mathbf{D} + u\bar{u}\mathbf{D}^2 + u\bar{v}\mathbf{D}\mathbf{D}_1 + \bar{u}v\mathbf{D}_1\mathbf{D} + v\bar{v}(\overline{\mathbf{D}}_1\mathbf{D}_1 + \mathbf{D}^2) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{D}_1 = u\mathbf{D}^2 + v\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}_1 \quad \text{d'où} \quad \mathbf{D}_1 = u\mathbf{D}^2(1 - v\mathbf{D})^{-1}. \quad (2.3)$$

On en déduit l'équation polynomiale après calcul.  $\square$

En utilisant un logiciel de calcul formel tel MAPLE [CGGMW], MACSYMA [MG] ou MATHEMATICA [Wo], on tire :

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{4t^2} \{1 + t + \Delta - \sqrt{2(1 - 2t - 5t^2 + (1 + t)\Delta)}\} \quad \text{où} \quad \Delta = \sqrt{(1 - t)(1 - 5t)} \quad (2.4)$$

On a également la récurrence suivante dans  $\mathbb{Z}[[h, u, v]]$ , i.e. en posant  $u = \bar{u}$ ,  $v = \bar{v}$

**Proposition 5.** Dans  $\mathbb{Z}[[h, u, v]]$ , on a :

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}, \quad \mathbf{D}_1 = u\mathbf{D}^2(1 - v\mathbf{D})^{-1}, \quad \mathbf{D}_{k+2} = u\mathbf{D}(1 - v\mathbf{D})^{-1} \cdot \mathbf{D}_{k+1} + v\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}_k. \quad (2.5)$$

*Preuve.* Ici (0.15) s'écrit  $\mathbf{D}_1 = u\mathbf{D}^2 + v\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}_1$ ; d'où l'on tire  $\mathbf{D}_1 = u\mathbf{D}^2(1 - v\mathbf{D})^{-1} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{DC}_1$ . Au niveau des chemins on a :  $D_{k+2} = DuD_{k+1} + DvD_{1,k+1}$ , de plus :  $D_{1,k+1} = D_k$  (si le chemin ne visite pas l'axe des  $x$ )  $+ \overline{DC}_1 \cdot D_{k+1}$  (si le chemin visite l'axe des  $x$ ). On en tire  $\mathbf{D}_{k+2} = \mathbf{D} \cdot (u + v\mathbf{DC}_1) \cdot \mathbf{D}_{k+1} + v\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}_k$ , d'où l'expression pour  $\mathbf{D}_{k+2}$ .  $\square$

**Proposition 6.** Dans  $\mathbb{Z}[[h, u, v]]$ , on a :

$$\mathbf{D}_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} v^k \mathbf{D}^{k+1} \mathbf{DC}_1^{2n-2k} \quad \text{où} \quad \mathbf{DC}_1 = u\mathbf{D}(1 - v\mathbf{D})^{-1} \quad (2.6)$$

Le calcul des séries  $\mathbf{DC} = 1 - \mathbf{D}^{-1}$ ,  $\mathbf{D}_n$ ,  $\mathbf{DG} = \sum \mathbf{D}_n$  et  $\mathbf{D}_{i,j}$  (par (0.11)), dans  $\mathbb{Z}[[t]]$  peut être fait avec MAPLE à partir de  $\mathbf{D}$  donnée en (2.4). Inutile d'écrire ces expressions, plutôt monstrueuses, et les premiers termes de ces séries.

**3. Un cas asymétrique (à la Lukasiewicz).** Notons que la symétrie totale par rapport à la fonction hauteur  $h$  de l'ensemble des pas  $n$  est pas indispensable à l'étude des chemins de Dyck généralisés. Soit  $U = \{u, v, \bar{u}\}$ , où  $h(u) = 1$  et  $h(v) = 2$ .

Au niveau des langages on a :

$$D = 1 + DC \cdot D \quad (3.1)$$

$$DC = uD\bar{u} + (vD\bar{u})D\bar{u}. \quad (3.2)$$

D'où les équations suivantes dans  $\mathbb{Z}[[u, v, \bar{u}]]$  :

$$\mathbf{DC} = u\bar{u}\mathbf{D}(1 + v\mathbf{D}) \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = (1 - \mathbf{DC})^{-1} = (1 - u\bar{u}\mathbf{D} - u\bar{u}v\mathbf{D}^2)^{-1}. \quad (3.3)$$

Ce qui conduit à l'équation de degré trois :

$$u\bar{u}v\mathbf{D}^3 + u\bar{u}\mathbf{D}^2 - \mathbf{D} + 1 = 0. \quad (3.4)$$

Plus généralement, soit  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \bar{u}_1\}$ , où  $h(u_i) = i$  et  $h(\bar{u}_1) = -1$ .

Au niveau des langages on trouve :

$$D = 1 + Du_1Du_1 + Du_2(Du_1)^2 + \dots + Du_n(D\bar{u}_1)^n. \quad (3.5)$$

Ceci conduit, en variables commutatives, à l'équation polynomiale de degré  $n + 1$  :

$$u_n(\bar{u}_1)^n \mathbf{D}^{n+1} + u_{n-1}(\bar{u}_1)^{n-1} \mathbf{D}^n + \dots + u_2(\bar{u}_1)^2 \mathbf{D}^3 + u_1 \bar{u}_1 \mathbf{D}^2 - \mathbf{D} + 1 = 0 \quad (3.6)$$

satisfaite par  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(u_1, u_2, \dots, u_n, \bar{u}_1)$ , et a

$$t^{n+1} \mathbf{D}^{n+1} + t^n \mathbf{D}^n + \dots + t^2 \mathbf{D}^2 - \mathbf{D} + 1 = 0 \quad (3.7)$$

pour la série génératrice selon le nombre de pas  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t)$ .

Le cas  $U = \{u_1, u_2, \dots, \bar{u}_1\}$ , où  $h(u_i) = i$  pour  $i \geq 1$  et  $h(\bar{u}_1) = -1$ , conduit, pour  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t)$ , à l'équation :

$$\mathbf{D} = 1 + t^2 \mathbf{D}^2 (1 + t\mathbf{D} + t^2 \mathbf{D}^2 + \dots) = 1 + t^2 \mathbf{D}^2 (1 - t\mathbf{D})^{-1}. \quad (3.8)$$

D'où

$$(t^2 + t)\mathbf{D}^2 - (1 + t)\mathbf{D} + 1 = 0 \quad (3.9)$$

et

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2t} \left( 1 - \sqrt{\frac{1-3t}{1+t}} \right). \quad (3.10)$$

**4. Chemins de Dyck bilatères (cas  $m = 2$ ).** Considérons les séries génératrices en variables commutatives  $\mathbf{DB}$  et  $\mathbf{DBC}$ .

**Proposition 7.** Si  $U = \{u_0, u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2\}$ , où  $h(u_0) = 0$ ,  $h(u_i) = i = -h(\bar{u}_i)$ , pour  $0 \leq i \leq 2$ , on a (en posant  $u_0 = h$ ,  $u_1 = u = \bar{u}$ ,  $u_2 = v = \bar{v}$ ) les équations suivantes dans  $\mathbb{Z}[[h, u, v]]$ :

$$\mathbf{DB} = 1 + \mathbf{DBC} \cdot \mathbf{DB} \quad \text{et} \quad \mathbf{DBC} = 2(1 - \mathbf{D}^{-1} + u^2 v \mathbf{D}^2 (1 - v \mathbf{D})^{-3}). \quad (4.1)$$

*Preuve.* La première équation est évidente. Pour la seconde, considérons un  $\mathbf{DBC}$ -chemin: S'il ne traverse jamais l'axe des  $x$  avec un pas  $v$  ou  $\bar{v}$ , c'est un  $\mathbf{DC}$ -chemin (i.e. au-dessus de l'axe des  $x$ ) ou bien un  $\overline{\mathbf{DC}}$ -chemin (i.e. au-dessous de l'axe des  $x$ ); d'où le terme  $2\mathbf{DC} = 2(1 - \mathbf{D}^{-1})$ . S'il traverse l'axe des  $x$   $k + 1$  fois (voir figure 1) et commence positivement, c'est un chemin dans  $\mathbf{DC}_1 \bar{v} \mathbf{D} v \mathbf{D} \bar{v} \cdots \mathbf{D} \bar{v} \overline{\mathbf{DC}}_1$ , si  $k$  est pair, ou dans  $\mathbf{DC}_1 \bar{v} \mathbf{D} v \cdots \mathbf{D} v \mathbf{DC}_1$ , si  $k$  est impair; d'où le terme  $2 \sum_{0 \leq k} \mathbf{DC}_1 v (v \mathbf{D})^k \mathbf{DC}_1$  qui à l'aide de  $\mathbf{DC}_1 = u \mathbf{D} (1 - v \mathbf{D})^{-1}$  devient le terme  $2u^2 v \mathbf{D}^2 (1 - v \mathbf{D})^{-3}$ .  $\square$

**Proposition 8.** On a :

$$\mathbf{DB} = \frac{\mathbf{D}(1 - t \mathbf{D})^3}{2 - (1 + 6t) \mathbf{D} + 3t(1 + 2t) \mathbf{D}^2 - t^2(3 + 4t) \mathbf{D}^3 + t^3 \mathbf{D}^4} \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t)$  est donnée par (2.4).

*Preuve.* Découle des deux équations de la proposition précédente.  $\square$

Dans le cas  $U = \{u_0, u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2\}$ , les séries  $\mathbf{DB}$  et  $\mathbf{DBC}$ , dans  $\mathbb{Z}[[t]]$ , s'écrivent donc également en terme de  $\mathbf{D}$  donnée en (2.4).

**5. Paires de chemins sans intersection ou sans croisement.** Dans cette section, nous ne faisons que rappeler le résultat principal de [La]. Soit  $U$  un sous-ensemble fini (avec répétitions possibles) de vecteurs dans  $\{1\} \times \mathbb{N}$ .

**Définition.** Soient  $c$  et  $c'$  deux  $U$ -chemins partant respectivement de  $(0, 0)$  et  $(0, k)$ ,  $0 \leq k$ , et se terminant respectivement en  $(n, j)$  et  $(n, j + l)$ . On dit qu'ils sont *sans croisement* (respectivement *sans intersection*) si  $c$  est au-dessous (resp. strictement au-dessous, sauf aux extrémités si  $k = 0$  ou  $l = 0$ ) de  $c'$ .

**Proposition 9.** Il y a une bijection entre l'ensemble des paires de  $U$ -chemins partant de  $(0, 0)$  et  $(0, k)$ , respectivement, et se terminant respectivement en  $(n, j)$  et  $(n, j + l)$ , et l'ensemble des  $U^l$ -chemins de  $(0, k)$  à  $(n, l)$ , où pour tout  $i$ ,  $0 \leq i$ , le nombre de copies de  $u_i = (1, i)$  dans  $U^l$  est :

$$|\{(v, w) \mid v, w \in U, h(v) - h(w) = i\}|. \quad (5.1)$$

*Preuve.* Il suffit de considérer l'écart entre les deux chemins; on obtient ainsi un  $U^l$ -chemin. Par cette bijection, une paire de chemins sans croisement correspond à un  $U^l$ - $D_{k,l}$ -chemin.  $\square$

**Proposition 10.** Il y a bijection entre l'ensemble des paires de  $U$ -chemins de  $(0, 0)$  jusqu'à un même point et l'ensemble des  $U^l$ -chemins de Dyck; si les deux chemins de la paire sont sans croisement (resp. sans intersection) alors le chemin correspondant est un  $U^l$ -chemin de Dyck (resp.  $U^l$ -chemin de Dyck connexe).

**Exemple.** Pour  $U = \{u_1, \bar{u}_1\}$ , chemins de Dyck classiques, on a  $U' = \{2u_0, u_2, \bar{u}_2\}$ , chemins de Motzkin à paliers bicolores. De plus on a  $U'' = \{6u_0, 4u_2, 4\bar{u}_2, u_4, \bar{u}_4\}$  avec comme série génératrice des  $U''$ -chemins de Dyck :

$$\frac{1}{4t^2} \left\{ 1 - 4t + \Delta - \sqrt{2(1 - 12t + \Delta)} \right\} \quad \text{où } \Delta = \sqrt{1 - 16t}. \quad (5.2)$$

**6. Lien avec les fractions continuées.** Rappelons que dans le cas  $m = 1$ ,  $U = \{u_0, u_1, \bar{u}_1\}$ , où  $h(u_0) = 0$ ,  $h(u_1) = 1 = -h(\bar{u}_1)$ , (en posant  $u_0 = h$ ,  $u_1 = u$  et  $\bar{u}_1 = \bar{u}$ ), on a :

$$\mathbf{D} = (1 - \mathbf{DC})^{-1} = (1 - h - u\bar{\mathbf{u}}\mathbf{D})^{-1}. \quad (6.1)$$

D'où le développement en fractions continuées :

$$\mathbf{D}(h, u, \bar{u}) = \frac{1}{1 - h - \frac{u\bar{u}}{1 - h - \frac{u\bar{u}}{1 - h - \dots}}} \quad (6.2)$$

Ce qui permet de plafonner les  $U$ -chemins de Dyck par la droite  $y = k$  en tronquant la fraction continuée au  $k^{\text{e}}$  niveau (i.e. en prenant son  $k^{\text{e}}$  convergent).

Pour  $m \geq 2$ , l'approche fractions continuées ne s'applique pas (du moins pas trivialement). Par exemple, dans le cas  $m = 2$ ,  $U = \{u_0, u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2\}$ , où  $h(u_0) = 0$ ,  $h(u_i) = i = -h(\bar{u}_i)$ , pour  $0 \leq i \leq 2$ , on a (en posant  $u_0 = h$ ,  $u_1 = u = u_1$ ,  $u_2 = v = u_2$ ) les équations suivantes dans  $\mathbb{Z}[[h, u, v]]$  :

$$\mathbf{D} = (1 - \mathbf{DC})^{-1}$$

$$\text{où } \mathbf{DC} = h + (u^2 + v^2)\mathbf{D} + \frac{2u^2v\mathbf{D}^2}{1 - v\mathbf{D}} + \frac{u^2v^2\mathbf{D}^3}{(1 - v\mathbf{D})^2} = \frac{P(\mathbf{D})}{Q(\mathbf{D})} = R(\mathbf{D}). \quad (6.3)$$

On en tire:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1 - R(\mathbf{D})} = \frac{1}{1 - R\left(\frac{1}{1 - R(\mathbf{D})}\right)} = \dots \quad (6.4)$$

où

$$R(x) = \frac{(1 - vx)^2}{h + (u^2 + v^2 - 2hv)x + v^2(h - 2v)x^2 + v^4x^3}. \quad (6.5)$$

**7. Lien entre les séries des chemins avec ou sans de paliers.** Soit  $U = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ , et  $V = U - \{u_0\}$ .

**Proposition 11.** Dans  $\mathbb{Z}[[u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m]]$ , les séries génératrices  $\mathbf{D}_U(u_0, \dots, u_m, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$  et  $\mathbf{D}_V(u_1, \dots, u_m, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)$  sont liées par les identités suivantes :

$$\mathbf{D}_V(u_1, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m) = \mathbf{D}_U(0, u_1, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m), \quad (7.1)$$

$$\mathbf{D}_U(u_0, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)$$

$$= \frac{1}{1 - u_0} \mathbf{D}_V\left(\frac{u_1}{1 - u_0}, \frac{u_2}{1 - u_0}, \dots, \frac{u_m}{1 - u_0}, \frac{\bar{u}_1}{1 - u_0}, \frac{\bar{u}_2}{1 - u_0}, \dots, \frac{\bar{u}_m}{1 - u_0}\right). \quad (7.2)$$

*Preuve.* Bien sûr en posant  $u_0 = 0$ , on interdit la présence de paliers d'où la formule (7.1). Par ailleurs un  $\mathbf{D}_U$ -chemin est une suite de paliers (de série  $1/(1 - u_0)$ ), puis une suite de « vrais pas » chacun étant suivi d'une suite de paliers; d'où (7.2).  $\square$



**Corollaire 12.** Dans  $\mathbb{Z}[[t]]$ , on a

$$\mathbf{D}_U(t) = \frac{1}{1-t} \mathbf{D}_V \left( \frac{t}{1-t} \right). \quad (7.3)$$

Par exemple, pour  $m = 1$ , on retrouve le cas des chemins de Dyck et de Motzkin classiques, dont les séries génératrices,  $\mathbf{D}(t)$  et  $\mathbf{M}(t)$ , sont donc liées par l'équation fonctionnelle:

$$\mathbf{M}(t) = \frac{1}{1-t} \mathbf{D} \left( \frac{t}{1-t} \right).$$

**8. Conclusion.** Dans l'étude des chemins de Dyck généralisés, et autres familles semblables de chemins, les difficultés proviennent de la hauteur,  $h(u)$ , des pas  $u$  autorisés. S'il s'agit de  $U$ -chemins de Dyck où pour tout  $u \in U$ ,  $|h(u)| \leq 1$ , les choses sont relativement simples; cependant l'ajout d'autres contraintes (comme par exemple une altitude maximum pour les chemins) peut compliquer grandement les choses [Ke, GJ, G-B]. Dans ce cas (i.e. pour tout  $u \in U$ ,  $|h(u)| \leq 1$ ) l'approche fractions continuées permet également de pondérer les pas suivant l'altitude où ils ont lieu [F1, GJ, Vi2]. Comme on l'a vu jusqu'ici la présence de pas de hauteur deux ou plus complique rapidement la situation. L'auteur remercie l'arbitre anonyme pour de très judicieuses suggestions.

**English extended abstract.** Let  $U$  be a finite set (called the alphabet) and  $U^*$  be the free monoid generated by  $U$ . Suppose there is an height function  $h: U \rightarrow \mathbb{Z}$  which we extend to  $U^*$  by setting  $h(w) = \sum_i h(x_i)$ , for a word  $w = x_1 x_2 \cdots x_n$ . In most cases, there is also given a partially defined involution,  $\sigma: V \rightarrow V$ ,  $V \subseteq U$  such that  $h(\sigma(v)) = -h(v)$ .

The following languages (i.e. subsets of  $U^*$ ) are introduced:

$$D = \{w \in U^* \mid h(w) = 0 \text{ and } w = w_1 w_2 \implies h(w_1) > 0\} \quad (\text{Dyck}) \quad (0.1)$$

$$DC = \{w \in D \mid w \neq e, w = w_1 w_2, w_1 \neq e, w_2 \neq e \implies h(w_1) > 0\} \quad (\text{Connected Dyck}) \quad (0.2)$$

$$DB = \{w \in U^* \mid h(w) = 0\} \quad (\text{Two-sided Dyck}) \quad (0.3)$$

$$DBC = \{w \in DB \mid w \neq e, w = w_1 w_2, w_1 \neq e, w_2 \neq e \implies h(w_1) \neq 0\} \quad (\text{Connected two-sided Dyck}) \quad (0.4)$$

$$DG = \{w \in U^* \mid w = w_1 w_2 \implies h(w_1) \geq 0\} \quad (\text{Left-factors of Dyck words}) \quad (0.5)$$

$$D_i = \{w \in U^* \mid h(w) = i \text{ and } w = w_1 w_2 \implies h(w_1) \geq 0\} \quad \text{for } i \geq 0 \quad (0.6)$$

$$DC_i = \{w \in U^* \mid w \neq e, h(w) = i \text{ and } w = w_1 w_2, w_1 \neq e \implies h(w_1) > 0\} \quad \text{for } i \geq 0 \quad (0.7)$$

$$D_{i,j} = \{w \in U^* \mid h(w) = j - i \text{ and } w = w_1 w_2 \implies h(w_1) \geq -i\} \quad \text{for } i, j \geq 0. \quad (0.8)$$

Denote by  $D, DC, DB, DBC, DG, D_i, DC_i$  and  $D_{i,j}$ , either the languages, the corresponding families of paths (when  $U \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{Z}$ , and  $h(u) = b$  for  $u = (a, b)$ ) or the noncommutative variables formal power series, (i.e. elements of the algebra  $\mathbb{Z}\langle\langle U \rangle\rangle$ ); denote by  $\mathbf{D}, \mathbf{DC}, \mathbf{DB}, \mathbf{DBC}, \mathbf{DG}, \mathbf{D}_i, \mathbf{DC}_i$  and  $\mathbf{D}_{i,j}$ , the commutative variables formal power series, (i.e. elements of the algebra  $\mathbb{Z}[[U]]$ ). The so-called "DSV or Schützenberger methodology" is used to find systems of algebraic equations and closed forms for the  $|U|$  noncommutative (resp. commutative) variables generating functions of these languages (resp. families of paths).

We mainly consider the (suffisantly general) symmetric case  $U = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ ,  $h(u_0) = 0$ ,  $h(u_i) = i = -h(\bar{u}_i)$ ,  $\sigma(u_0) = u_0$ ,  $\sigma(u_i) = \bar{u}_i$ ,  $\sigma(\bar{u}_i) = u_i$ . The case

of an arbitrary  $U$  follows from that one (where  $m = \max |h(u)|$ ) by setting  $u_i = \sum_{h(u)=i} u$  and  $\bar{u}_i = \sum_{h(u)=-i} u$ .

Given a language  $L \subseteq U^*$ , where  $U = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ , let  $\bar{L} = \{\bar{w} | w \in L\}$  and  $\tilde{L} = \{\tilde{w} | w \in L\}$  where for  $w = x_1 x_2 \dots x_n$ , we set  $\bar{w} = \sigma(x_1)\sigma(x_2)\dots\sigma(x_n)$  and  $\tilde{w} = \sigma(x_n)\dots\sigma(x_2)\sigma(x_1)$ . Moreover for  $\mathbf{F} \in \mathbb{Z}[[U]]$ , let  $\bar{\mathbf{F}}$  be  $\mathbf{F}(u_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m, u_1, u_2, \dots, u_m)$ .

**Theorem 2.** Let  $U = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ ,  $h(u_0) = 0$ ,  $h(u_i) = i = -h(\bar{u}_i)$ . In  $\mathbb{Z}[[U]]$ , the series  $\mathbf{D}$  and  $\mathbf{D}_i$ ,  $1 \leq i < m$ , satisfy the following system of  $m$  quadratic equations: (we set  $D_0 = D$  and  $D_{-n} = 0$  for  $n > 0$ )

$$\mathbf{D} = 1 + u_0 \mathbf{D} + \sum_{1 \leq i, j \leq m} u_i \bar{u}_j \left( \sum_{k \geq 1} \bar{D}_{i-k} D_{j-k} \right) \quad (0.14)$$

$$\mathbf{D}_i = \sum_{j=1}^m u_j \left( \sum_{k \geq 1} \bar{D}_{j-k} D_{i-k} \right), 1 \leq i < m. \quad (0.15)$$

*Proof.* We first find equations (0.9) to (0.13) in the algebra  $\mathbb{Z}\langle\langle U \rangle\rangle$ .  $\square$

**1. Classical Dyck and Motzkin paths.** If  $U = \{u_0, u_1, \bar{u}_1\}$ , where  $h(u_0) = 0$ ,  $h(u_1) = 1 = -h(\bar{u}_1)$ , then (setting  $u_0 = h$ ,  $u_1 = u$  and  $\bar{u}_1 = \bar{u}$ ) we get:

$$\mathbf{D}(h, u, \bar{u}) = \frac{1}{2u\bar{u}} \left\{ 1 - h - \sqrt{(1-h)^2 - 4u\bar{u}} \right\} \quad (1.2)$$

An explicit computation of  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{DC}$ ,  $\mathbf{DB}$ ,  $\mathbf{DBC}$ ,  $\mathbf{DG}$ ,  $\mathbf{D}_i$ ,  $\mathbf{DC}_i$ , and  $\mathbf{D}_{i,j}$  in  $\mathbb{Z}[[h, u, \bar{u}]]$  or  $\mathbb{Z}[[t]]$  may be completed (using MAPLE) in this case (see formulas (1.3), (1.4) and (1.5)).

**2. The case  $m = 2$ .** If  $U = \{u_0, u - 1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2\}$ , where  $h(u_0) = 0$ ,  $h(u_1) = 1 = -h(\bar{u}_1)$ ,  $h(u_2) = 2 = -h(\bar{u}_2)$ , then (setting  $u_0 = h$ ,  $u_1 = u$  and  $\bar{u}_1 = \bar{u}$ ,  $u_2 = v$ ,  $\bar{u}_2 = \bar{v}$ ) Theorem 2 leads to the following fourth degree polynomial satisfied by  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(h, u, v, \bar{u}, \bar{v})$ :

$$\begin{aligned} & (v^2 \bar{v}^2 + 2u\bar{u}v\bar{v} - u^2 \bar{v}^2 - \bar{u}^2 v^2) \mathbf{D}^4 - ((u\bar{u} + v\bar{v})(v + \bar{v}) + (1-h)v\bar{v} - u^2 \bar{v} + \bar{u}^2 v) \mathbf{D}^3 \\ & + (u\bar{u} + (1-h)(v + \bar{v}) + 2v\bar{v}) \mathbf{D}^2 - (1-h + v + \bar{v}) \mathbf{D} + 1 = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

MAPLE can easily solve that (with  $t = h = u = \bar{u} = v = \bar{v}$ ):

$$\mathbf{D}(t) = \frac{1}{4t^2} \left\{ 1 + t + \Delta - \sqrt{2(1-2t-5t^2) + (1+t)\Delta} \right\} \text{ where } \Delta = \sqrt{(1-t)(1-5t)} \quad (2.4)$$

An explicit computation of  $\mathbf{DC} = 1 - \mathbf{D}^{-1}$ ,  $\mathbf{D}_i$ ,  $\mathbf{DG} = \sum \mathbf{D}_i$  and  $\mathbf{D}_{i,j}$  in  $\mathbb{Z}[[t]]$  may be completed (using MAPLE) in this case also.

**3. An asymmetric case (“à la Lukasiewicz”).** Let  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \bar{u}_1\}$ , where  $h(u_i) = i$  and  $h(\bar{u}_1) = -1$ . We are lead to the following degree  $n + 1$  polynomial equations

$$u_n (\bar{u}_1)^n \mathbf{D}^{n+1} + u_{n-1} (\bar{u}_1)^{n-1} \mathbf{D}^n + \dots + u_2 (\bar{u}_1)^2 \mathbf{D}^3 + u_1 \bar{u}_1 \mathbf{D}^2 - \mathbf{D} + 1 = 0 \quad (3.6)$$

satisfied by  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(u_1, \dots, u_n, \bar{u}_1)$ , and

$$t^{n+1} \mathbf{D}^{n+1} + t^n \mathbf{D}^n + \dots + t^2 \mathbf{D}^2 - \mathbf{D} + 1 = 0 \quad (3.7)$$

satisfied  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t)$ .

**4. Two-sided Dyck paths.** Even in the case  $m = 2$  (i.e.  $U = \{u_0, u_1, u_1, u_2, u_2\}$ ), the computation of  $\mathbf{DB}$ ,  $\mathbf{DBC}$  is not so simple since a  $\mathbf{DBC}$ -path may very well “go across” the  $x$ -axis without visiting it (see figure 1).

We find:

$$\mathbf{DB} = (1 - \mathbf{DBC})^{-1}$$

and

$$\mathbf{DB} = \frac{\mathbf{D}(1 - t\mathbf{D})^3}{2 - (1 + 6t)\mathbf{D} + 3t(1 + 2t)\mathbf{D}^2 - t^2(3 + 4t)\mathbf{D}^3 + t^3\mathbf{D}^4} \tag{4.2}$$

where  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(t)$  is given by (2.4).

**6. Continued fractions.** For  $U = \{u_0, u_1, \bar{u}_1\}$ , then (setting  $u_0 = h$ ,  $u_1 = u$  and  $\bar{u}_1 = \bar{u}$ ), we get:

$$\mathbf{D}(h, u, \bar{u}) = \frac{1}{1 - h - \frac{u\bar{u}}{1 - h - \frac{u\bar{u}}{1 - h - \dots}}} \tag{6.2}$$

For  $m \geq 2$ , the continued fraction approach is not so simple. For example, with  $m = 2$ ,  $U = \{u_0, u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2\}$ , we get (6.4) which looks like a multicontinued fraction.

**7. Horizontal steps or not.** Let  $U = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ , and  $V = U - \{u_0\}$ .

**Proposition 11.** In  $\mathbb{Z}[[u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m]]$ , we have:

$$\mathbf{D}_V(u_1, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m) = \mathbf{D}_U(0, u_1, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m), \tag{7.1}$$

$$\mathbf{D}_U(u_0, \dots, u_m, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m) = \frac{1}{1 - u_0} \mathbf{D}_V\left(\frac{u_1}{1 - u_0}, \frac{u_2}{1 - u_0}, \dots, \frac{u_m}{1 - u_0}, \frac{\bar{u}_1}{1 - u_0}, \frac{\bar{u}_2}{1 - u_0}, \dots, \frac{\bar{u}_m}{1 - u_0}\right). \tag{7.2}$$

For example the classical Dyck and Motzkin paths generating series,  $\mathbf{D}(t)$  and  $\mathbf{M}(t)$ , satisfy:

$$\mathbf{M}(t) = \frac{1}{1 - t} \mathbf{D}\left(\frac{t}{1 - t}\right).$$

BIBLIOGRAPHIE

[BPS1] E. Barucci, R. Pinzani et R. Sprugnoli, *Génération aléatoire des animaux dirigés*, Actes de l'Atelier de Combinatoire Franco-Québécois (Bordeaux, 1991) (J. Labelle et J.-G. Penaud, eds.), vol. 10, Publications du LACIM, UQAM, Montréal, 1992, pp. 17–26.

[BPS2] ———, *The random generation of underdiagonal walks*, Actes du 4<sup>e</sup> Colloque sur les Séries Formelles et la Combinatoire Algébrique (Montréal, 1992) (P. Leroux et C. Reutenauer, eds.), vol. 11, Publications du LACIM, UQAM, Montréal, 1992, pp. 17–32.

[CGGMW] B. W. Char, K. O. Geddes, G. H. Gonnet, M. B. Monagan et S. M. Watt, *MAPLE reference manual, version 5*, Watcom Publ. Ltd., Waterloo, Ont., 1988.

[DV] M. P. Delest et G. X. Viennot, *Algebraic languages and polyominoes enumeration*, Theoret. Comput. Sci. **34** (1984), 169–206.

[Fe] J. M. Fedou, *Grammaires et q-énumérations de polyominoes*, thèse de Ph. D., Université de Bordeaux I, 1989.

[F] P. Flajolet, *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Math. **32** (1980), 125–161.

- [Ge] I. Gessel, *A noncommutative generalization and  $q$ -analog of the Lagrange inversion formula*, Trans. Amer. Math. Soc. **257** (1980), 455–482.
- [GV] I. Gessel et G. X. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. in Math. **58** (1985), 300–321.
- [Gol] J. Goldman, *Formal languages and enumeration*, J. Combin. Theory Ser. A **24** (1978), 318–338.
- [GJ] I. P. Goulden et D. M. Jackson, *Combinatorial enumeration*, John Wiley, New York, 1983.
- [G-B] D. Gouyou-Beauchamps, *Chemins sous-diagonaux et tableaux de Young*, Combinatoire Énumérative (Montréal, 1985) (G. Labelle et P. Leroux, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1234, Springer-Verlag, 1986, pp. 112–125.
- [Kr] G. Kreweras, *Sur les éventails de segments*, Cahiers du Bur. Univ. de Rech. Opér. **15** (1970), 1–41.
- [La] J. Labelle, *On pairs of non-crossing generalized Dyck paths*, J. Statist. Plann. Inference **34** (1993), 209–217.
- [LY1] J. Labelle J. et Y.-N. Yeh, *Dyck paths of knight moves*, Discrete Appl. Math. **24** (1989), 213–221.
- [LY2] ———, *Generalized Dyck paths*, Discrete Math. **82** (1990), 1–6.
- [MG] Mathlab Group, *MACSYMA reference manuel, version 10*, Lab. for Comp. Sci., MIT, Cambridge, Mass., 1983.
- [Pe] J.-G. Penaud, *Une nouvelle bijection pour les animaux dirigés*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire (22<sup>e</sup> session, Hesselberg, Gerolfinden) (R. König, ed.), Publications Univ. Strasbourg, 1990, pp. 93–130.
- [Sc] M. P. Schützenberger, *Certain elementary families of automata*, Proc. Symp. on Mathematical Theory of Automata, Polytechnic Institute of Brooklyn, 1962, pp. 139–153.
- [St] R. Stanley, *Enumerative combinatorics* Vol. 1, Advanced Books & Software, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, Calif., 1986.
- [Vi1] G. X. Viennot, *Théorie combinatoire des nombres d'Euler et de Genocchi*, Séminaire de Théorie des Nombres, Publications Univ. Bordeaux I, 1982.
- [Vi2] ———, *Théorie combinatoire des polynômes orthogonaux*, Notes de séminaires, Publications du LACIM, UQAM, 1983.
- [Vi3] ———, *Enumerative combinatorics and algebraic languages*, Proceedings FCT'85 (L. Budach, ed.), Lecture Notes in Comp. Sci., vol. 199, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1985, pp. 450–464.
- [Vi4] ——— 1992, *A survey of polyomino enumeration*, Actes du 4<sup>e</sup> Colloque sur les Séries Formelles et la Combinatoire Algébrique (Montréal, 1992) (P. Leroux et C. Reutenauer, eds.), vol. 11, Publications du LACIM, UQAM, Montréal, 1992, pp. 399–420.
- [Wo] S. Wolfram, *MATHEMATICA, A system for doing math. by computer*, Addison-Wesley, New York, 1988.

J. LABELLE  
 LACIM/MATH.-INFO.  
 UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL  
 C.P. 8888, SUCC. A  
 MONTRÉAL (QUÉBEC) H3C 3P8