Ann. Sci. Math. Québec, **17** (1), 1993, 39–51.

COMPARAISONS DE LONGUEURS DE COURBES ET D'AIRES DE SURFACES

GUY DESAULNIERS, SERGE DUBUC ET FRANÇOIS SOUMIS

RÉSUMÉ. Nous comparons la longueur d'un arc continu du plan avec celle d'un arc convexe de mêmes extrémités. Nous démontrons aussi que la longueur d'une courbe fermée qui entoure n fois un convexe du plan est plus grande ou égale à n fois la longueur de la frontière du convexe. Une autre comparaison porte sur l'aire d'une surface fermée qui enveloppe n fois un convexe de l'espace. Cette aire est plus grande ou égale à n fois l'aire de la frontière du convexe. Cette analyse utilise deux formules de Cauchy et la théorie du degré.

ABSTRACT. We compare the length of a continuous planar arc with the length of a convex arc having the same endpoints. We also prove that the length of a closed curve that winds n times around a planar convex set is greater than or equal to n times the length of the convex set boundary. Another comparison bears upon the area of a closed surface that envelops n times a convex set of the space. This area is greater than or equal to n times the area of the convex set boundary. This analysis uses two formulas from Cauchy and degree theory. See the English extended abstract at the end of the paper.

1. Introduction. Dans le premier des deux livres *De la sphère et du cylindre* [15], Archimède énonce quatre postulats qu'il emploiera pour démontrer plusieurs résultats concernant les aires des sphères, des cônes, des cylindres et d'autres solides. Ces postulats, tels que présentés par J. Itard [14], sont :

(1) La droite est la ligne la plus courte joignant ses extrémités.
(2) De deux lignes planes convexes joignant deux points donnés situées du même côté de la droite de jonction, et dont l'une enveloppe l'autre, c'est l'enveloppante qui est la plus grande.
(3) De même, entre les surfaces ayant les mêmes limites, si ces limites sont planes, le plan est la plus petite.
(4) De deux surfaces convexes limitées à un même plan, situées d'un même côté par rapport à lui, et dont l'une enveloppe l'autre, l'enveloppante a la plus grande superficie.

Depuis Archimède, les postulats 1 et 3 servent souvent comme définitions de la droite et du plan. Des démonstrations ont été élaborées par Eutocius D'Ascalon [15] à la fin du cinquième siècle pour les postulats 1 et 2. Cependant, ces démonstrations, basées sur des résultats obtenus par Euclide, sont très rudimentaires. À notre connaissance, les postulats 3 et 4 n'ont pas été démontrés jusqu'à présent. Toutefois, dans le cas de surfaces polyhédriques convexes, on peut trouver une démonstration du postulat 4 dans le volume de géométrie d'Hadamard [9].

Dans cet article, nous démontrons le postulat 2 dans le cas plus général où la courbe enveloppante n'est pas nécessairement convexe. L'analyse s'étend ensuite aux courbes fermées qui entourent n fois une courbe convexe fermée. De là, nous passons à certaines comparaisons sur les surfaces fermées de l'espace. On verra alors qu'il est facile de démontrer le postulat 4 en utilisant un

Reçu le 18 mai 1992 et, sous forme définitive, le 3 décembre 1992.

corollaire qui compare l'aire d'une surface convexe fermée avec celle d'une surface convexe fermée qui l'enveloppe. Nous montrons aussi que l'aire d'une surface fermée qui enveloppe n fois une surface convexe fermée est au moins n fois plus grande que l'aire de la surface enveloppée.

2. Longueurs de courbes planes. Une *courbe* plane est définie comme étant une application continue $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$. On appelle *support* de la courbe γ, l'image de $[a,b]$ par l'application γ. Il arrive parfois de confondre le support d'une courbe avec la courbe elle-même. Par exemple, on pourrait dire que p est un point de la courbe au lieu de dire que p est un point du support de la courbe. La *longueur* d'une courbe γ est notée par $l(\gamma)$; depuis Jordan [10], on reconnaît que ce nombre $l(\gamma)$ est le supremum des longueurs des lignes polygonales inscrites dans la courbe.

Pour bien spécifier la relation qui existe entre les deux courbes dont les longueurs seront comparées, nous utiliserons la notion d'homotopie entre deux applications. Si f et g sont deux applications continues d'un espace topologique X dans un espace topologique Y, f est *homotope* à g s'il existe une application continue $H\colon X \times [0,1] \to Y$ telle que, $\forall x \in X$, $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$. On dit que H est une *homotopie* entre f et g.

Théorème 1. *Soit Ω un ensemble ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et γ^* une courbe convexe qui est un morceau de la frontière de Ω. Si γ est une courbe ayant les mêmes extrémités que celles de γ^* et est telle qu'il existe une homotopie $H\colon [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 - \Omega$ entre γ^* et γ, alors*

$$l(\gamma^*) \leq l(\gamma).$$

Démonstration. Les courbes γ^* et γ peuvent s'écrire sous forme paramétrique comme $\gamma^*\colon s \mapsto \big(x^*(s), y^*(s)\big)$ et $\gamma\colon s \mapsto \big(x(s), y(s)\big)$ respectivement où $s \in [a,b]$, $\big(x^*(a), y^*(a)\big) = \big(x(a), y(a)\big)$ et $\big(x^*(b), y^*(b)\big) = \big(x(b), y(b)\big)$. Notons par A et B les points $\big(x(a), y(a)\big)$ et $\big(x(b), y(b)\big)$ respectivement. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des lignes polygonales débutant en A, finissant en B et inscrites dans γ^*. Puisque $l(\gamma^*) = \sup_{L\in\mathcal{L}} l(L)$, il découle que si, $\forall L \in \mathcal{L}$, $l(L) \leq l(\gamma)$ alors $l(\gamma^*) \leq l(\gamma)$. La démonstration qui suit consiste à prouver que, $\forall L \in \mathcal{L}$, $l(L) \leq l(\gamma)$. Procédons par récurrence sur le nombre de segments d'une droite polygonale.

L'inégalité $l(L_1) \leq l(\gamma)$ est valide pour une ligne polygonale L_1 ayant un seul segment de droite joignant A et B, car le segment de droite est la courbe de longueur minimale entre deux points.

Supposons maintenant que, $\forall L_n \in \mathcal{L}$ ayant n segments de droite, $l(L_n) \leq l(\gamma)$. Soit L_{n+1} une droite polygonale de $\mathcal{L}$ ayant $n+1$ segments de droite $d_1, d_2, \ldots, d_{n+1}$. Soit I l'ensemble des points d'intersection de $\gamma([a,b])$ avec la droite supportant d_{n+1} et $s_{\min} = \min_{(x(s),y(s))\in I} s$. Soit γ' la courbe composée de trois morceaux : M_1 le morceau de γ pour $s \in [a, s_{\min}]$, M_2 le segment de droite de $\big(x(s_{\min}), y(s_{\min})\big)$ au point commun de d_n et d_{n+1} et M_3 le segment de droite d_{n+1}. Comme on peut le voir à la figure 1, M_2 et M_3 sont colinéaires et peuvent être considérés comme un seul segment de droite de $\big(x(s_{\min}), y(s_{\min})\big)$ à B. La courbe γ' a été obtenue en remplaçant le morceau de γ de $\big(x(s_{\min}), y(s_{\min})\big)$ à B par le segment de droite joignant ces deux points, d'où $l(\gamma') \leq l(\gamma)$. Puisque $\sum_{i=1}^{n} l(d_i) \leq l(M_1) + l(M_2)$ selon l'hypothèse de récurrence et que $l(d_{n+1}) = l(M_3)$, il s'ensuit que

$$l(L_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} l(d_i) \leq \sum_{i=1}^{3} l(M_i) = l(\gamma') \leq l(\gamma) \implies l(L_{n+1}) \leq l(\gamma). \quad \square$$

Une courbe plane $\gamma\colon s \mapsto \big(x(s), y(s)\big)$ définie pour $s \in [a,b]$ est dite *fermée* si $\big(x(a), y(a)\big) = \big(x(b), y(b)\big)$. Notons par S^1 le cercle de $\mathbb{R}^2$ centré à l'origine et de rayon unitaire. Si $\gamma\colon [a,b] \to S^1$

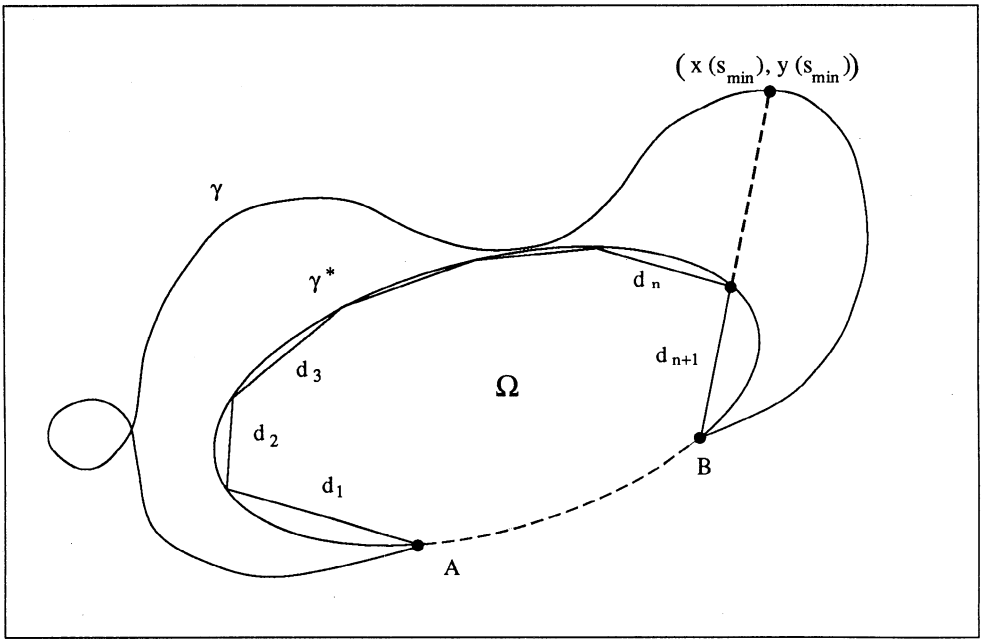

FIGURE 1. Une ligne polygonale de $\mathcal{L}$ ayant $n+1$ segments de droite

est une courbe plane fermée, alors il existe une et une seule application continue $\theta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $0 \le \theta(a) < 2\pi$ et, $\forall s \in [a,b]$, $\gamma(s) = \big(\cos\theta(s), \sin\theta(s)\big)$. Puisque γ est fermée, $\gamma(a) = \gamma(b)$ et il en découle que $\theta(b) = \theta(a) + 2\pi d$. On appelle d le *degré* de la courbe γ. Si $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ est une courbe plane fermée et si p est un point de $\mathbb{R}^2 - \gamma([a,b])$, on désigne par $\gamma_p\colon [a,b] \to S^1$ la courbe fermée définie par $\gamma_p(s) = (\gamma(s) - p)/\|\gamma(s) - p\|$. L'*indice* du point p par rapport à γ est le degré de γ_p. On peut déduire facilement la propriété suivante : si l'indice d'un point p par rapport à une courbe fermée $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ est n, alors toute demi-droite issue de p a au moins $|n|$ points d'intersection avec $\gamma([a,b])$.

Soit Ω un ensemble ouvert, convexe et borné de $\mathbb{R}^2$. Supposons que γ est une application continue de l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^2 - \Omega$ telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dira que la courbe fermée γ *entoure* n fois Ω si l'indice de tous les points de Ω par rapport à γ est $\pm n$.

Dans [2] et [3], Cauchy a présenté une formule pour calculer la longueur d'une courbe. Il a utilisé dans cette formule le concept de projection absolue. La *projection absolue* d'une courbe plane γ sur une droite D formant un angle θ avec l'axe des x, notée $A_\gamma(\theta)$, est donnée par l'intégrale suivante :

$$A_\gamma(\theta) = \int_D n_\gamma(x,y)\, ds,$$

où $n_\gamma(x,y)$ est le nombre de points de γ qui se projettent sur le point $(x,y) \in D$ et ds est l'élément différentiel de la droite D. Voici le théorème de Cauchy énonçant cette formule qui permet de calculer la longueur d'une courbe.

Premier théorème de Cauchy. *Soit γ une courbe plane et $A_\gamma(\theta)$ la projection absolue de cette courbe sur une droite formant un angle θ avec l'axe des x. Alors*

$$l(\gamma) = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} A_\gamma(\theta)\, d\theta.$$

A l'aide de ce theorème, Cauchy a démontré que la longueur d'une courbe convexe et fermée est plus petite ou égale au périmètre de tout cercle qui entoure cette courbe. Dans le prochain théorème, nous proposons une généralisation de ce résultat en utilisant cette formule de Cauchy.

Théorème 2. *Soit Ω un ensemble ouvert, convexe et borné de $\mathbb{R}^2$ et γ^* la courbe convexe fermée correspondant à la frontière de Ω. Si $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2 - \Omega$ est une courbe fermée qui entoure n fois Ω, alors*

$$nl(\gamma^*) \leq l(\gamma).$$

Démonstration. La démonstration procède par récurrence sur le nombre de fois que γ entoure Ω.

Prouvons que l'énoncé est vrai pour $n = 1$. Soit $D = \{(x,y) : x = x(t), y = y(t), t \in \mathbb{R}\}$ une droite quelconque du plan représentée sous forme paramétrique. Puisque γ^* est une courbe convexe fermée, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que

$$n_{\gamma^*}(x(t), y(t)) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{si } t \in \mathbb{R} - \bar{I} \end{cases}$$

où $\bar{I}$ est la fermeture de I.

Il est évident que, $\forall t \in \mathbb{R} - \bar{I}$, $n_{\gamma^*}\big(x(t), y(t)\big) \leq n_\gamma\big(x(t), y(t)\big)$. Par contre, si $t \in I$, il existe une droite D_t perpendiculaire à D, passant par $\big(x(t), y(t)\big)$ et coupant Ω. Soit w un point de $\Omega \cap D_t$. Ce point w sépare D_t en deux demi-droites et chacune d'elles a au moins un point d'intersection avec $\gamma([a,b])$ car l'indice de w par rapport à γ est ± 1. Il y a donc au moins deux points de γ, un de chaque demi-droite, se projetant sur $(x(t), y(t))$ d'où, $\forall t \in I$, $n_{\gamma^*}\big(x(t), y(t)\big) \leq n_\gamma\big(x(t), y(t)\big)$. On obtient alors

$$A_{\gamma^*}(\theta) = \int\limits_D n_{\gamma^*}(x,y)\, ds \leq \int\limits_D n_\gamma(x,y)\, ds = A_\gamma(\theta).$$

Et, en se servant de la formule de Cauchy,

$$l(\gamma^*) = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} A_{\gamma^*}(\theta)\, d\theta \leq \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} A_\gamma(\theta)\, d\theta = l(\gamma) \implies l(\gamma^*) \leq l(\gamma).$$

Maintenant supposons que le théorème est vrai pour $n \leq m$. Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2 - \Omega$ une courbe fermée située à l'extérieur de Ω telle que $n = m+1$ et définie par $\gamma(s) = \big(x(s), y(s)\big)$. Puisque γ est fermée et qu'elle entoure Ω plus d'une fois, il existe deux nombres s_1 et s_2 tels que $s_1 < s_2$, $s_1 \in (a,b)$, $s_2 \in (a,b]$ et $\big(x(s_1), y(s_1)\big) = \big(x(s_2), y(s_2)\big)$. On peut alors séparer la courbe γ en deux courbes fermées, $\gamma_1\colon [s_1, s_2] \to \mathbb{R}^2 - \Omega$ et $\gamma_2\colon [s_2, b] \cup [a, s_1] \to \mathbb{R}^2 - \Omega$, telles que $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$. On remarque que l'indice d'un point quelconque de Ω par rapport à γ_1 et celui du même point par rapport à γ_2 sont deux nombres, respectivement n_1 et n_2, tels que $|n_1| \leq m$, $|n_2| \leq m$ et $|n_1| + |n_2| = m+1$. Par l'hypothèse de récurrence, on déduit que $|n_1| l(\gamma^*) \leq l(\gamma_1)$ et $|n_2| l(\gamma^*) \leq l(\gamma_2)$. En combinant ces deux inégalités, on conclut que

$$(m+1)l(\gamma^*) = (|n_1| + |n_2|)l(\gamma^*) \leq l(\gamma_1) + l(\gamma_2) = l(\gamma). \quad \square$$

Aires de surfaces enveloppant un convexe. Un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^2$ peut être *triangulé* s'il existe un nombre fini de triangles $\{t_n\}_{n=1}^N$, disjoints sauf possiblement en un seul sommet où un seul côté, tels que $\bigcup_{n=1}^N t_n = E$. Dans ce cas, les triangles $\{t_n\}_{n=1}^N$ forment une *triangulation* de E. Semblable à la définition de Cesari [4], on dit qu'un ensemble $E \subseteq \mathbb{R}^2$ est un *domaine admissible* s'il peut être triangulé ou s'il est homéomorphe à un ensemble pouvant l'être. Un domaine admissible est donc fermé et borné. Une suite de domaines admissibles E_n *envahit* un domaine admissible E si $E_n \subseteq E_{n+1}$, $E_n \subseteq E$ et $E^o = \bigcup_n E_n^0$ où E^0 (resp. E_n^0) désigne l'intérieur de E (resp. E_n).

Une *surface* de l'espace est définie comme étant une application continue $\sigma \colon E \to \mathbb{R}^3$ où E est un domaine admissible. Soit E un ensemble pouvant être triangulé et soit $\mathcal{T}$ une triangulation de E. Une application continue $\sigma \colon E \to \mathbb{R}^3$ est appelée une *surface polyhédrale* si σ est linéaire sur chacun des triangles $t \in \mathcal{T}$. Chacun des triangles $t \in \mathcal{T}$ est alors transformé par σ en un triangle $\Delta_t \subseteq \mathbb{R}^3$ et on dénote l'*aire élémentaire* de σ par le nombre $e(\sigma) = \sum_{t \in \mathcal{T}} \mathrm{aire}(\Delta_t)$.

Soit $\sigma \colon E \to \mathbb{R}^3$ une surface de l'espace et $\sigma_n \colon E_n \to \mathbb{R}^3$, $n = 1, 2, \ldots$, une suite de surfaces de l'espace. On dit que la suite $\{\sigma_n\}_{n=1}^\infty$ *converge* vers σ si la suite E_n envahit E et si $\sup_{p \in E \cap E_n} |\sigma(p) - \sigma_n(p)| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Soit Σ l'ensemble de toutes les suites $\{\sigma_n\}$ de surfaces polyhédrales qui convergent vers une surface σ. L'*aire* de σ, notée $a(\sigma)$, est définie depuis Lebesgue [11] comme étant

$$a(\sigma) = \inf_{\{\sigma_n\} \in \Sigma} \liminf_{n \to \infty} e(\sigma_n).$$

L'aire d'une surface ainsi définie satisfait la propriété suivante : si $\sigma \colon E \to \mathbb{R}^3$ et $\sigma' = E' \to \mathbb{R}^3$ sont deux surfaces et s'il existe un homéomorphisme $p' = h(p)$ entre E et E' tel que, $\forall p \in E$, $\sigma(p) = \sigma'(h(p))$ alors $a(\sigma) = a(\sigma')$.

Définition 1. Une application continue d'un espace topologique dans un espace topologique est dite *essentielle* s'il n'existe pas d'homotopie entre cette application continue et une application constante.

Le lemme suivant énonce une propriété des applications essentielles qui sera utilisée dans la démonstration du théorème 3.

Lemme 1. *Soit Ω un ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ et X un espace topologique. Si $f \colon X \to \mathbb{R}^3 - \Omega$ est une application continue et essentielle, alors toute demi-droite issue d'un point quelconque de Ω a au moins un point d'intersection avec $f(X)$.*

Démonstration. Soit a un point quelconque de Ω et soit $D = \{a + sv : s \geq 0\}$ une demi-droite quelconque issue de a et ayant v comme vecteur directeur. Prouvons par contradiction qu'il existe au moins un point d'intersection entre D et $f(X)$.

Supposons qu'il n'existe pas de tel point d'intersection. Soit s_0 un nombre réel positif tel que $b = a - s_0 v \notin \Omega$ et soit l'application

$$p(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \Omega \\ a + \lambda(x - a) & \text{si } x \in \Omega \end{cases}$$

où λ est la plus petite valeur positive telle que $a + \lambda(x - a) \notin \Omega$. Cette application est continue pour tout $x \in \mathbb{R}^3 - \{a\}$. On remarque aussi que, $\forall x \in X$ et $\forall t \in [0,1]$, $tb + (1-t)f(x) \neq a$ car on a supposé que $f(X) \cap D = \varnothing$. D'où, $H(x,t) = p(tb + (1-t)f(x))$ est continue en tout point $(x,t) \in \mathbb{R}^3 - \Omega \times [0,1]$ et forme une homotopie entre f et l'application constante égale à b. La figure 2 illustre cette homotopie. Puisque qu'il existe une homotopie entre f et une application constante, f n'est pas une application essentielle et il y a contradiction. □

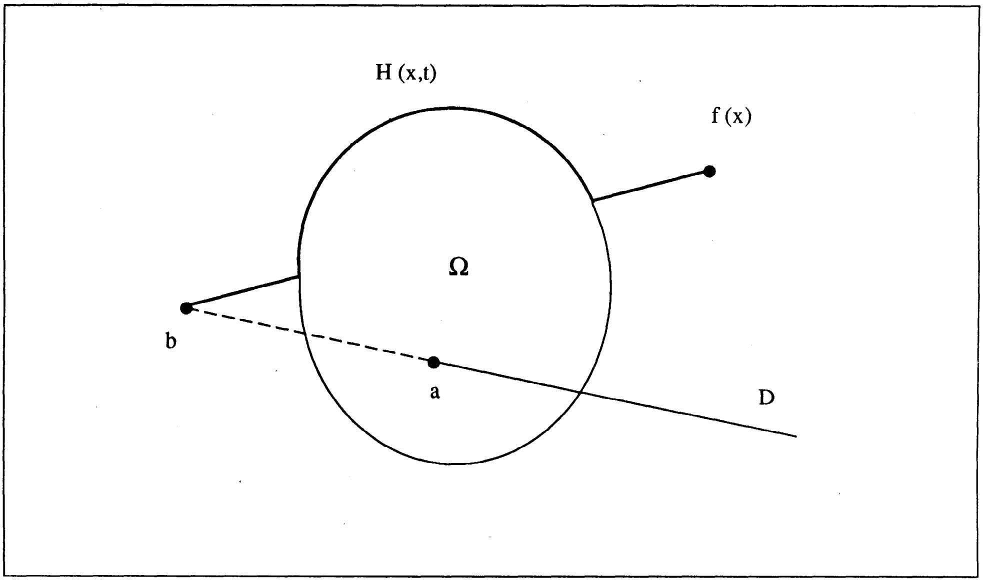

FIGURE 2. L'homotopie H entre l'application f et l'application constante b

Soit X une variété différentiable compacte, connexe, sans bord, orientable de dimension 2. Une surface de l'espace est *fermée* si elle peut être définie par une application continue $\sigma\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

D'une façon intuitive, on peut dire que si Ω est un ensemble ouvert borné de l'espace, si X est une variété différentiable compacte, connexe, sans bord, orientable de dimension 2 et si $\sigma\colon X \longrightarrow \mathbb{R}^3 - \Omega$ est une surface fermée essentielle, alors elle enveloppe au moins une fois l'ensemble Ω et elle est donc coupée au moins une fois par toute demi-droite issue d'un point quelconque de Ω.

Comme il l'a fait pour la longueur d'une courbe, Cauchy a présenté dans [2] et [38] une formule permettant de calculer l'aire d'une surface. Avant de présenter le théorème de Cauchy énonçant cette formule, nous précisons le concept de projection absolue d'une surface sur un plan qu'il y emploie.

Soit Π un plan de l'espace perpendiculaire à une droite D passant par l'origine telle que D forme un angle θ avec l'axe des z et que le plan engendré par D et l'axe des z forme un angle ϕ avec le plan xOz. La *projection absolue* d'une surface σ de l'espace sur le plan Π, notée $A_\sigma(\theta, \phi)$, est donnée par l'intégrale de surface suivante :

$$A_\sigma(\theta, \phi) = \iint_\Pi n_\sigma(x, y, z)\, dS,$$

où $n_\sigma(x, y, z)$ est le nombre de points de σ qui se projettent sur le point $(x, y, z) \in \Pi$ et dS est l'élément différentiel du plan Π.

Deuxième théorème de Cauchy. *Si $A_\sigma(\theta, \phi)$ est la projection absolue de la surface σ de l'espace sur un plan Π, perpendiculaire à une droite D passant par l'origine telle que D forme un angle θ avec l'axe des z et que le plan engendré par D et l'axe des z forme un angle ϕ avec le plan xOz,* *alors*

$$a(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} A_\sigma(\theta, \phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi.$$

Cauchy a démontré à l'aide de ce théorème que l'aire de la frontière d'un ensemble convexe borné est plus petite ou égale à l'aire de toute sphère enveloppant cet ensemble. En utilisant cette formule de Cauchy, nous généralisons ce résultat à toute surface fermée qui enveloppe cet ensemble.

Théorème 3. *Soit Ω un ensemble ouvert, convexe et borné de $\mathbb{R}^3$ et σ^* la surface fermée correspondant à la frontière de Ω. Soit X une variété différentiable compacte, connexe, sans bord, orientable de dimension 2. Si $\sigma\colon X \to \mathbb{R}^3 - \Omega$ est une surface fermée et essentielle, alors*

$$a(\sigma^*) \le a(\sigma).$$

Démonstration. Soit $\Pi = \{(x,y,z) : x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in \mathbb{R}^2\}$ un plan quelconque de l'espace représenté sous forme paramétrique. Puisque σ^* est la surface associée à la frontière d'un ensemble convexe et borné, il existe un sous-ensemble ouvert, convexe et borné $O \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que

$$n_{\sigma^*}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = \begin{cases} 2 & \text{si } (u,v) \in O \\ 0 & \text{si } (u,v) \in \mathbb{R} - \bar{O} \end{cases}$$

où $\bar{O}$ est la fermeture de O.

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^3 - \bar{O}$, l'inégalité

$$n_{\sigma^*}\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \le n_\sigma\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

est triviale. Par contre, si $(u,v) \in O$, il existe une droite D perpendiculaire à Π, passant par $\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ et coupant Ω. Soit w un point de $\Omega \cap D$. Le point w sépare D en deux demi-droites et on sait que chacune d'elles a au moins un point d'intersection avec $\sigma(X)$ car σ est une surface fermée essentielle. Ces points d'intersection se projettent sur le point $\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ d'où $n_\sigma\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \ge 2$. Donc, on obtient que, $\forall (u,v) \in O$, $n_{\sigma^*}\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \le n_\sigma\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$. Alors il en découle que

$$A_{\sigma^*}(\theta, \phi) = \iint_\Pi n_{\sigma^*}(x,y,z) \, dS \le \iint_\Pi n_\sigma(x,y,z) \, dS = A_\sigma(\theta, \phi).$$

Et, à l'aide de la formule de Cauchy, on trouve finalement que

$$a(\sigma^*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} A_{\sigma^*}(\theta, \phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} A_\sigma(\theta, \phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi = a(\sigma)$$

$$\Longrightarrow \quad a(\sigma^*) \le a(\sigma). \qquad \square$$

Corollaire 1. *Soit Ω_1 et Ω_2 deux convexes dans $\mathbb{R}^3$ tels que $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. Si σ_1 et σ_2 sont les surfaces fermées correspondant respectivement aux frontières de Ω_1 et Ω_2, alors*

$$a(\sigma_1) \le a(\sigma_2).$$

Le postulat 4 d'Archimède se démontre aisément à l'aide de ce corollaire. Il suffit de fermer les deux surfaces convexes par le plan les limitant et d'observer par la suite que ces surfaces fermées correspondent bien aux frontières de deux ensembles convexes, l'un inclus dans l'autre.

Aires de surfaces enveloppant n fois un convexe. Dans cette section, nous généralisons le théorème 2 et améliorons le théorème 3. Le résultat, présenté au théorème 4, compare l'aire de la surface de la frontière d'un convexe borné de l'espace à l'aire d'une surface enveloppant n fois ce convexe.

Pour ce faire, nous aurons besoin de quelques définitions et résultats provenant de la topologie algébrique et de la géométrie différentielle. Pour le lecteur moins familier à ces disciplines, nous faisons un certain nombre de rappels.

Soit X et Y deux variétés différentiables et soit f une application différentiable de X dans Y. Un point x de X est dit *point critique* de f si le rang de la dérivée df_x est inférieur à la dimension de Y et la valeur $y = f(x)$ est dite *valeur critique* pour f. Un point x de X qui n'est pas un point critique de f est dit *point régulier* de f. Si y est un point de Y tel qu'il n'existe pas de point critique x pour lequel $f(x) = y$, alors on dit que y est une *valeur régulière* de f.

Théorème de Sard. *Soit $f\colon X \to Y$ une application de classe C^∞ et E l'ensemble de ses points critiques, alors $f(E)$ est de mesure nulle dans Y.*

On retrouve la démonstration du théorème de Sard [13] dans la monographie de Milnor [12] ou de Dieudonné [5].

Soit f une application de X vers Y où X et Y sont deux variétés différentiables, connexes, compactes, orientées et de même dimension m. Si x est un point régulier de f, nous poserons $\epsilon(x) = 1$ si df_x préserve l'orientation (i.e. le signe du jacobien de f est positif) et $\epsilon(x) = -1$ dans le cas contraire. Soit y une valeur régulière de l'application $f\colon X \to Y$, si $y \in f(X)$ et si x_1, x_2, $\ldots$, x_s sont les points de $f^{-1}(y)$, on pose que $\deg(f; y) = \sum_{j=1}^{s} \epsilon(x_j)$ tandis que si $y \notin f(X)$, on pose que $\deg(f; y) = 0$.

Théorème A. *L'entier* $\deg(f; y)$ *ne dépend pas du choix particulier de la valeur régulière y.*

L'entier $\deg(f; y)$ permet de définir le *degré* de Brouwer de f, noté $\deg f$.

Théorème B. *Si f est homotope (de façon C^∞) à g, alors* $\deg f = \deg g$.

On peut retrouver les démonstrations des théorèmes A et B énoncés dans Milnor [12]. Ces démonstrations n'y sont pas entièrement détaillées. Celle du théorème A est donnée par Dieudonné [6] ou par Godbillon [8] à la différence que dans ces deux cas, elle s'appuie sur la cohomologie de de Rham. On retrouve aussi dans le manuel de Berger–Gostiaux [1] la démonstration du théorème B. Pour des commentaires historiques sur la notion du degré de Brouwer, nous recommandons au lecteur de consulter Dieudonné [6].

Soit X une variété différentiable compacte, connexe, sans bord, orientable de dimension 2. Supposons que σ est une application continue de X dans $\mathbb{R}^3$, si y est un point qui n'appartient pas à $\sigma(X)$, alors on pose $g(x) = (\sigma(x) - y)/\|\sigma(x) - y\|$ et l'*indice* du point y par rapport à la surface paramétrique σ est le degré de l'application g.

Proposition C. *Si y et y' sont deux points de la même composante connexe de $\mathbb{R}^3 - \sigma(X)$, alors l'indice du point y et l'indice du point y' sont égaux.*

Démonstration (esquisse). On adapte l'argument donné par Godbillon cite8, p. 90 alors qu'il démontre un résultat analogue. Si y et y' sont suffisamment proches l'un de l'autre, les deux applications $(\sigma(x) - y)/\|\sigma(x) - y\|$ et $(\sigma(x) - y')/\|\sigma(x) - y'\|$ sont homotopes, elles sont donc de même degré. Pour établir la proposition C, il suffit de relier y et y' par un arc continu entièrement situé dans $\mathbb{R}^3 - \sigma(X)$, et de proche en proche, on voit que l'indice de tout point de cette courbe est constant. $\square$

Soit Ω un ensemble ouvert convexe et borné de l'espace $\mathbb{R}^3$ et soit X une variété différentiable compacte, connexe, sans bord, orientable de dimension 2. Supposons que σ est une application continue de X dans $\mathbb{R}^3 - \Omega$, on dira que la surface paramétrique σ *enveloppe* n fois Ω si l'indice d'un point de Ω par rapport à σ est $\pm n$.

Un sous-espace Y d'un espace X est un *rétracte* de X s'il existe une application continue $r\colon X \to Y$ tel que $r(y) = y$ pour tout y de Y. On dit alors que r est une *rétraction* de X sur Y.

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour entreprendre la démonstration du théorème 4.

Théorème 4. *Soit Ω un ensemble ouvert convexe et borné de l'espace $\mathbb{R}^3$ et σ^* la surface fermée correspondant à la frontière de Ω. Soit X une variété différentiable compacte, connexe, sans bord, orientable de dimension 2. Si $\sigma\colon X \to \mathbb{R}^3 - \Omega$ est une surface fermée qui enveloppe n fois Ω, alors*

$$na(\sigma^*) \leq a(\sigma).$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $n > 0$. En effet, la situation $n = 0$ produit un énoncé trivial dans le théorème 4; d'autre part, si $n < 0$, il suffit de changer l'orientation de X pour que l'indice change de signe et devienne positif.

Premier cas. L'application σ est de classe C^∞. L'idée de la démonstration est encore de servir du deuxième théorème de Cauchy. Si C est la projection de Ω sur $\mathbb{R}^2$, on sait qu'il existe deux fonctions de deux variables ϕ et ψ définies sur C telles que $\Omega = \{(x,y,z) : (x,y) \in C \text{ et } \phi(x,y) < z < \psi(x,y)\}$. Soit $(x,y) \in C$, nous désignons par $n_\sigma^+(x,y)$ le nombre de points p de la variété X tels que $\sigma(p) = (x,y,z)$ avec $z \geq \psi(x,y)$. Nous allons démontrer que, presque partout sur C, $n_\sigma^+(x,y) \geq n$.

Considérons un disque D contenu dans Ω et dans le plan $z = z_0$; on suppose que le centre du disque est le point (x_0, y_0, z_0) et que le rayon du disque est 2δ. Comme nous l'indiquons en appendice, il existe une variété différentiable Y située dans $\mathbb{R}^3 - \Omega$, une rétraction de $\mathbb{R}^3 - D$ sur Y et un nombre b qui satisfont les conditions suivantes :

- Y est une variété difféomorphe à une sphère;
- si $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < 4\delta^2$, la demi-droite $\{(x,y,z) : z \geq \psi(x,y)\}$ rencontre Y en un seul point et celui-ci est (x,y,b);
- si $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ et si $z \geq \psi(x,y)$, alors $r(x,y,z) = (x,y,b)$.

Partant de cette rétraction r, on pose $h = r \circ \sigma$. Montrons que le degré de h est n. Par le théorème de Sard, si $(x,y,b) \in Y$, il est presque sûr que cette valeur est régulière. Supposons donc que le point (x,y,b) est une valeur régulière pour h. On peut alors énumérer les s points de X, $p_1, p_2, \dots,$ p_s, tels que $h(p_i) = (x,y,b)$, c'est-à-dire que $\sigma(p_i) = (x,y,z_i)$ avec $z_i \geq \psi(x,y)$, $i = 1, 2, \dots,$ s. Soit $q = (x,y,z)$ un point de Ω, faisons aussi appel à la fonction $g(p) = (\sigma(p) - q)/\|\sigma(p) - q\|$. Or les deux applications g et h sont reliées entre elles selon les modalités suivantes :

- les points p de X pour lesquels $g(p)$ est le pôle nord $(0,0,1)$ sont précisément $p_1, p_2, \dots,$ p_s;
- la dérivée de g au point p_i, dg_{p_i}, est un multiple positif de la dérivée de h au point p_i, dh_{p_i}.

Or ces deux propriétés entraînent que le pôle nord est une valeur régulière pour g et que le degré de g coïncide avec celui de h. Par la proposition C, le degré de g est égal à n. D'où s est au moins égal à n. On vient de démontrer que, presque partout sur C, $n_\sigma^+(x,y) \geq n$.

Si $n_\sigma(x,y)$ est le nombre de points p de la variété X tels que $\sigma(p) = (x,y,z)$ avec $z \in \mathbb{R}$, alors, presque partout sur C, $n_\sigma(x,y) \geq 2n$. La conclusion est que l'intégrale double sur C de la fonction $n_\sigma(x,y)$ est au moins égale à $2n$ fois l'aire de C.

Or on en tire une conclusion analogue en considérant toutes les projections orthogonales de la surface σ vers un plan quelconque passant par l'origine. Le deuxième théorème de Cauchy permet d'affirmer que $na(\sigma^*) \leq a(\sigma)$.

Second cas. L'application σ est continue, sans être de classe C^∞. On choisit une suite σ_n d'applications de classe C^∞ de X dans l'espace $\mathbb{R}^3$ qui convergent uniformément vers σ. À partir d'un certain rang, toutes les applications sont homotopes entre elles et ont donc même degré. Si k est un nombre positif inférieur à 1 et si Ω' est l'image de Ω par une homothétie de rapport k, centré en un point de Ω, alors à partir d'un certain rang, tous les compacts $\sigma_n(X)$ ne rencontrent pas σ'. Ceci montre qu'à partir d'un certain rang, les aires de σ_n sont au moins égales à $n\,k^2$ fois l'aire de σ^*. En faisant tendre k vers 1 et en se servant de la semi-continuité inférieure de l'aire de Lebesgue, la conclusion du théorème est obtenue. □

Il est possible de généraliser les théorèmes 3 et 4 à l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ pour $d > 3$. La comparaison porterait alors sur les mesures de dimension $d-1$ de σ^* et σ, où σ^* serait l'hypersurface correspondant à la frontière de Ω, un ensemble ouvert convexe et borné de $\mathbb{R}^d$, et σ serait une hypersurface fermée définie sur une variété différentiable compacte, connexe, sans bord, orientable de dimension $d-1$ qui enveloppe Ω.

Appendice. Dans cet appendice, nous confirmons l'existence d'une rétraction dans le plan cartésien qui prolonge la projection orthogonale sur un segment. De ce théorème, nous tirons un corollaire qui était la charnière de la démonstration du théorème 4.

Théorème5. *Soit $a > 0$, alors il existe une courbe simple fermée Y (de classe C^∞) et une rétraction r (de classe C^∞) de $\mathbb{R}^2 - [-2a, 2a] \times \{0\}$ sur Y qui satisfont les conditions suivantes :*

(1) *si $x \in (-2a, 2a)$, la demi-droite $\{(x, y) : y > 0\}$ rencontre Y en un seul point et celui-ci est $(x, 1)$;*

(2) *si $x \in (-a, a)$ et si $y > 0$, alors $r(x, y) = (x, 1)$.*

Démonstration. On peut choisir une fonction f de classe C^∞ telle que f est non-croissante, $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = -1$ si $x > \frac{1}{2}$. Nous désignons par F la primitive de f telle que $F(0) = 1$. F est une fonction concave non croissante sur l'axe positif. Désignons par c la racine positive de l'équation $F(x) = x$. On observe que $F'(0) = 0$, $F'(c) = -1$ et $\forall n > 1$, $F^{(n)}(0) = F^{(n)}(c) = 0$.

Considérons l'arc $A = \{(x, F(x)) : 0 \leq x \leq c\} \cup \{(F(x), x) : 0 \leq x \leq c\}$. Nous posons $A' = \{(x, y) : (x, y) \in A \text{ ou} (x, -y) \in A\}$ et $A'' = \{(x, y) : (-x, y) \in A'\}$. La courbe simple fermée Y sera formée de translatés de A' et A'' et de deux segments :

$$Y = \big((2a, 0) + A'\big) \cup \big((-2a, 0) + A''\big) \cup \{(x, y) : |x| < 2a \text{ et} y = \pm 1\}.$$

Si D est une demi-droite issue de l'origine et qui fait un angle θ avec l'axe des x, on désignera par $P(\theta)$ le point de rencontre de D avec $A' \cup A''$.

On choisit une fonction h réelle, définie sur l'axe réel, de classe C^∞ avec les propriétés suivantes : h est croissante, $h(t + 2\pi) = h(t) + 2\pi$, $h(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm\frac{\pi}{2}$ et toutes les dérivées de $h(t)$ sont nulles lorsque $t = \frac{\pi}{2} \bmod \pi$. On définit une première fonction $\phi(x, y) = P\big(h(\theta)\big)$ où $\theta = \arctan y/x$.

Pour construire la rétraction r, nous nous servirons de h, mais aussi d'une autre fonction g réelle, définie sur l'axe réel, de classe C^∞ avec les propriétés suivantes : $g(t) = t$ si $|t| < 2a$, $g(t) = -2a$ si $t > -2a$ et $g(t) = 2a$ si $t > 2a$. En effet, nous définissons r de la façon suivante :

$$r(x, y) = \begin{cases} g(x) & \text{si } |x| \leq 2a \\ \phi(x - 2a, y) & \text{si } x > 2a \\ \phi(x + 2a, y) & \text{si } x < -2a. \end{cases}$$

On se convainc que r est une rétraction de classe C^∞ qui envoie le complémentaire du segment $[-2a, 2a] \times \{0\}$ sur Y, une courbe simple fermée; de plus, les deux conditions 1 et 2 sont vérifiées. □

Corollaire 2. *Soit $a > 0$ et D le disque ouvert du plan cartésien, centré à l'origine et de rayon $2a$; alors il existe une variété différentiable Y de l'espace $\mathbb{R}^3$ et une rétraction r (de classe C^∞) de $\mathbb{R}^3 - D \times \{0\}$ sur Y qui satisfont les conditions suivantes :*

- *Y est une variété difféomorphe à une sphère;*
- *si $(x, y) \in D$, la demi-droite $\{(x, y, z) : z > 0\}$ rencontre Y en un seul point et celui-ci est $(x, y, 1)$;*
- *si $(x^2 + y^2) < a^2$ et si $z \geq 0$, alors $r(x, y, z) = (x, y, 1)$.*

La surface Y du corollaire est obtenue par révolution autour de l'axe des y de la courbe du théorème 5. Cette surface subit ensuite une rotation pour amener l'axe des y sur l'axe des z. La rétraction r_3 du corollaire est définie par rotation de l'axe des z. Si r_2 est la rétraction citée dans le théorème 5 et si (ρ, θ, z) est un point de $\mathbb{R}^3$ exprimé en coordonnées cylindriques, on pose alors $r_3(\rho, \theta, z) = (\rho', \theta', z')$ où $\theta' = \theta$, $(\rho', z') = r_2(\rho, z)$ et (ρ', θ', z') est aussi exprimé en coordonnées cylindriques.

English extended abstract. We first recall the definitions of a planar curve and, as it was defined by Jordan [10], the length of a planar curve γ, denoted by $l(\gamma)$. The proof of the first result uses the definition of the length of a curve. This result is the following.

Theorem 1. *Let Ω be an open convex set of $\mathbb{R}^2$. Let γ^* be a convex curve which is a piece of the boundary of Ω. If γ is a curve with the same endpoints as those of γ^* and is such that there exists a homotopy $H\colon [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2 - \Omega$ between γ^* and γ, then*

$$l(\gamma^*) \leq l(\gamma).$$

After defining the concept of a closed curve that winds n times around an open bounded convex set of $\mathbb{R}^2$, we give the following definition due to Cauchy. The *absolute projection* of a planar curve γ, characterized by an angle θ, is given by

$$A_\gamma(\theta) = \int_D n_\gamma(x, y)\, ds,$$

where $n_\gamma(x, y)$ is the number of points of γ that are projected on the point $(x, y) \in D$. Then a formula, introduced in [2] and [3] by Cauchy, for calculating the length of a curve is presented.

First theorem from Cauchy. *Let γ be a planar curve and $A_\gamma(\theta)$ be the absolute projection of this curve on a line at angle θ with the x–axis. Then*

$$l(\gamma) = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} A_\gamma(\theta)\, d\theta.$$

Using this formula, we easily prove the next theorem.

Theorem 2. *Let Ω be an open bounded convex set of $\mathbb{R}^2$ and γ^* be the convex closed curve corresponding to the boundary of Ω. If $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 - \Omega$ is a closed curve that winds n times around Ω, then*

$$nl(\gamma^*) \leq l(\gamma).$$

Then the focus of the paper changes to surfaces. We begin by defining what is a surface, a closed surface and, as it was defined by Lebesgue [11], the area of a surface σ, denoted by $a(\sigma)$. We also present the following definition.

Definition 1. A continuous mapping from a topological space to a topological space is said to be *essential* if there does not exist a homotopy between this continuous mapping and a constant mapping.

Afterwards, we introduce a second formula due to Cauchy, [2] and [3], for calculating the area of a surface. In this formula, the *absolute projection* of a surface σ on a plane Π, characterized by two angles θ and ϕ, is

$$A_\sigma(\theta, \phi) = \iint_\Pi n_\sigma(x, y, z)\, dS,$$

where $n_\sigma(x, y, z)$ is the number of points of σ that are projected on $(x, y, z) \in \Pi$. This formula is given in the next theorem.

Second theorem from Cauchy. *If $A_\sigma(\theta, \phi)$ is the absolute projection of a surface σ on the plane Π, perpendicular to a line D passing through the origin and such that D is at angle θ with the z–axis and that the plane generated by D and the z–axis is at angle ϕ with the plane xOz, then*

$$a(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} A_\sigma(\theta, \phi) \sin\theta \, d\theta \, d\phi.$$

Using this formula, we prove the following result.

Theorem 3. *Let Ω be an open bounded convex set of $\mathbb{R}^3$ and σ^* be the closed surface corresponding to the boundary of Ω. Let X be a compact, connected, boundaryless, oriented and differentiable manifold of dimension 2. If $\sigma\colon X \to \mathbb{R}^3 - \Omega$ is an essential closed surface, then*

$$a(\sigma^*) \leq a(\sigma).$$

The proof of the final theorem is based on results from algebraic topology and differential geometry, especially, from degree theory. Consequently, we recall some definitions and results from these domains. Afterwards, we give the definition of a surface that envelops n times an open bounded convex set of $\mathbb{R}^3$ and we finally state the last theorem.

Theorem 4. *Let Ω be an open bounded convex set of $\mathbb{R}^3$ and σ^* be the closed surface corresponding to the boundary of Ω. Let X be a compact, connected, boundaryless, oriented and differentiable manifold of dimension 2. If $\sigma\colon X \to \mathbb{R}^3 - \Omega$ is a closed surface that envelops n times Ω, then*

$$na(\sigma^*) \leq a(\sigma).$$

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Berger et B. Gostiaux, *Géométrie différentielle*, Armand Colin, Paris, 1972.
2. A. Cauchy, *Notes sur divers théorèmes relatifs à la rectification des courbes et à la quadrature des surfaces*, C. R. Acad. Sci. Paris **13** (1841), 1060–1063; Oeuvres Complètes de Cauchy, vol. 6, Paris, 1888, pp. 369–375.
3. ———, *Mémoire sur la rectification des courbes et la quadrature des surfaces courbes*, Mém. Acad. Sci. Paris **22** (1850), 3 et suiv; Oeuvres Complètes de Cauchy, vol. 2, Paris, 1908, pp. 167–177.
4. L. Cesari, *Surface area*, Princeton University Press, New Jersey, 1956.
5. J. Dieudonné, *Éléments d'analyse* III, Gauthier-Villars, Paris, 1970.
6. ———, *Éléments d'analyse* IX, Gauthier-Villars, Paris, 1972.
7. ———, *A history of algebraic and differential topology 1900–1960*, Birkhäuser, Boston, 1989.
8. C. Godbillon, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971.
9. J. Hadamard, *Leçons de géométrie* II : *géométrie dans l'espace*, Jacques Gabay, Sceaux, 1988.
10. C. Jordan, *Cours d'analyse*, Gauthier-Villars, Paris, 1909.

11. H. Lebesgue, *Intégrale, longueur, aire*, thèse de doctorat, Ann. Mat. Pura Appl. **7** (1902); Oeuvres Scientifiques, vol. I, L'enseignement mathématique, Genève, 1972, pp. 201–331.
12. J. W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
13. A. Sard, *The measure of the critical points of differentiable maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **48** (1942), 883–890.
14. R. Taton, *Histoire générale des sciences* I, Presses universitaires de France, Paris, 1957.
15. P. Ver Eecke, P, *Les oeuvres complètes d'Archimède suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon* I, II, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1960.

G. Desaulniers et F. Soumis
Département de mathématiques appliquées
École Polytechnique
C.P. 6079, Succ. A
Montréal (Québec) Canada, H3C 3A7

S. Dubuc
Département de mathématiques et statistique
Université de Montréal
C.P. 6128, Succ. A
Montréal (Québec) Canada, H3C 3A7