Ann. Sci. Math. Québec **24** (2000), no. 1, 67–78.

THÉORÈMES D'EXISTENCE POUR UN PROBLÈME NON LINÉAIRE DE CONTRÔLE ET APPROXIMATION DE GALERKIN DE CE PROBLÈME

ANDRZEJ JUST

RÉSUMÉ. Nous présentons dans cet article le problème d'existence des contrôles optimaux pour le système gouverné par une équation non linéaire $Ay = u$ où A est un opérateur radialement continu strictement monotone et coercif et avec une fonction de coût convexe différentiable et radialement non bornée (coercive). On introduit ensuite l'approximation de Galerkin de ce problème. On démontre d'existence des faibles et forts points d'accumulation de l'ensemble des solutions approchées qui sont des solutions précises du problème initial d'optimisation.

ABSTRACT. The paper presents an optimization problem involving a system governed by a nonlinear equation $Ay = u$, where A is a radially continuous, strictly monotone and coercive operator and with the cost functional convex, differentiable and radially unbounded (coercive). We present the Galerkin approximation and we prove existence of the weak and strong condensation points of a set of solution of the approximate optimization problems. Each of these points is a solution of the initial optimization problem.

1. Introduction et position du problème. Nous présentons dans cet article le problème d'existence des contrôles optimaux pour un système gouverné par une équation opératoire non linéaire avec une fonction coût, convexe différentiable et radialement non bornée (coercive). Le résultat principal de ce travail est la démonstration de l'existence des suites de solutions approchées qui convergent faiblement et fortement dans des espaces convenables aux solutions précises du problème exact.

Pour ces problèmes, les bonnes références sont H. Brezis [1], J. L. Lions [7] et H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias [5].

Soit V un espace de Banach réflexif et V^* son dual. Considérons le problème d'optimisation (I) suivant : on se donne un système gouverné par l'opérateur A où $A : V \to V^*$ est un opérateur radialement continu strictement monotone et coercif. Pour chaque contrôle $u \in V^*$, l'état du système est donné par y solution de

$$Ay = u. \tag{1.1}$$

Reçu le 3 avril 1997 et, sous forme définitive, le 7 octobre 1998.

Le problème de contrôle (ou d'optimisation) est de chercher le (ou les) $u_0 \in V^*$ (s'il en existe) tel que

$$J(u_0, y_0) \leq J(u, y) \qquad \forall\ (u, y) \in \Gamma(A^{-1})$$

où la fonctionnelle (la fonction coût) $J : V^* \times V \to \mathbb{R}$ est convexe différentiable et radialement non bornée (coercive), c'est-à-dire,

$$\lim_{(\|u\|+\|y\|)\to\infty} J(u, y) = +\infty,$$

$$\Gamma(A^{-1}) = \{(u, y) \in V^* \times V, \quad y = A^{-1}u\}, \quad y_0 = A^{-1}u_0.$$

Naturellement, A^{-1} existe (*c.f.* K. Deimling [3]).

Avant de formuler le théorème d'existence pour ce problème d'optimisation, nous allons d'abord considérer un exemple :

Exemple. Soit $V = \mathbb{R},\ V^* = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}$. Tout opérateur $A : V \to V^*$ peut être identifié à une fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans le mode naturel $a(y) \cdot x = (Ay)(x)$. Pour cette identification, si l'opérateur A est strictement monotone radialement continu et coercif, alors la fonction a est aussi strictement monotone continue et coercive (si la fonction a satisfait à la condition $\operatorname{sgn} y \cdot a(y) \geq \gamma(|y|)$ pour chaque $y \in \mathbb{R}$ où $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{s\to\infty} \gamma(s) = +\infty$ et réciproquement.

Prenons la fonction suivante :

$$a(y) = \begin{cases} y - 1 & \text{pour } y \in \mathbb{R}\backslash[0, 1], \\ -\sqrt{1 - y^2} & \text{pour } y \in [0, 1], \end{cases}$$

et remarquons que cette fonction satisfait aux conditions ci-dessus. La fonction a^{-1} est donnée par la formule :

$$a^{-1}(u) = \begin{cases} u + 1 & \text{pour } u \in \mathbb{R}\backslash[-1, 0], \\ \sqrt{1 - u^2} & \text{pour } u \in [-1, 0]. \end{cases}$$

La fonction coût $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est maintenant donnée par $J(u, y) = u^2 + y^2$. Il est immédiat de vérifier que cette fonction est strictement convexe différentiable et radialement non bornée. Alors l'ensemble des solutions dans $\Gamma(a^{-1})$ réalisant le minimum de J est le suivant : $\{(u, \sqrt{1 - u^2}\ ), u \in [-1, 0]\}$.

Le problème d'optimisation dans notre exemple n'est pas convexe (l'ensemble $\Gamma(a^{-1})$ n'est pas convexe) donc il n'y a plus nécessairement unicité de (u_0, y_0) réalisant le minimum de J sur $\Gamma(a^{-1})$ et évidemment on ne peut plus appliquer à notre problème les critères d'optimalité pour les problèmes convexes (*c.f.* J. L. Lions [6]). On peut montrer qu'il existe des points dans l'ensemble $\Gamma(a^{-1})$ pour lesquels les critères d'optimalité ne sont pas satisfaits. Enfin, l'ensemble $\Gamma(a^{-1})$ est (faiblement) fermé dans $\mathbb{R}^2$, mais l'ensemble $\Gamma(A^{-1})$ pour un opérateur A qui est strictement monotone radialement continu et coercif n'est pas nécessairement faiblement fermé dans l'espace $V^* \times V$ de dimension infinie. Alors un sous-ensemble X de $\Gamma(A^{-1})$ tel que

$$J(u_0, y_0) = \inf_{(u,y)\in\Gamma(A^{-1})} J(u, y) \quad \forall\ (u_0, y_0) \in X$$

réalisant le minimum peut être vide.

2. Existence du minimum absolu.

Théorème 2.1. *Soit V un espace de Banach réflexif et V^* son dual. On suppose que l'opérateur $A : V \to V^*$ est strictement monotone radialement continu coercif et tel que*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle Ay_n, y_n\rangle \leq \langle u, y\rangle \quad \textit{pour} \quad y_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} y \quad \textit{(dans } V \textit{ faible)} \tag{2.1}$$

$$\textit{et} \quad Ay_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u \quad \textit{(dans } V^* \textit{ faible).}$$

On suppose enfin que la fonctionnelle $J : V^* \times V \to \mathbb{R}$ est convexe radialement non bornée et différentiable. Alors il existe un élément $(u_0, y_0) \in \Gamma(A^{-1})$ tel que

$$J(u_0, y_0) = \inf_{(u,y)\in\Gamma(A^{-1})} J(u, y)$$

($\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne la dualité entre V^* et V).

Démonstration. La fonctionnelle $J : V^* \times V \to \mathbb{R}$ étant convexe et différentiable est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $V^* \times V$ (*c.f.* J. Céa [2]).

Pour démontrer le théorème, il ne reste donc plus qu'à vérifier si l'ensemble $\Gamma(A^{-1})$ est faiblement fermé dans $V^* \times V$ (*c.f.* J. Céa [2]).

En effet, prenons une suite $\{(u_n, y_n)\}$ d'éléments de l'ensemble $\Gamma(A) = \{(u, y) \in V^* \times V,\ Ay = u\}$ faiblement convergente dans $V^* \times V$ vers (u, y) ainsi qu'un élément v quelconque dans V. On a

$$\begin{aligned}\langle u - Av, y - v\rangle &= \langle u, y\rangle - \langle u, v\rangle - \langle Av, y - v\rangle \\ &\geq \overline{\lim_{n\to\infty}} (\langle Ay_n, y_n\rangle - \langle u, v\rangle - \langle Av, y - v\rangle) \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}} (\langle Ay_n, y_n\rangle - \langle Ay_n, v\rangle - \langle Av, y_n - v\rangle) \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \langle Ay_n - Av, y_n - v\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Posons $v_t = y - tv$ pour $t > 0$. Alors $\langle u - Av_t, v\rangle \geq 0$. L'opérateur A étant radialement continu on a donc, si $t \to 0^+$, $\langle u - Ay, v\rangle \geq 0 \quad \forall\, v \in V$. Il en résulte que $Ay = u$. $\square$

3. Résultat plus général. Considérons maintenant le problème d'optimisation (II) suivant : on se donne un système (1.1) gouverné par l'opérateur $A : V \to V^*$ qui satisfait à toutes les conditions du problème d'optimisation (I).

On considère ensuite un ensemble U_{ad} convexe fermé et borné dans V^* (l'ensemble des contrôles admissibles) et une fonctionnelle $J : V^* \times V \to \mathbb{R}$ convexe différentiable.

Le problème de contrôle est de chercher le (ou les) $u_0 \in U_{ad}$ tel que

$$J(u_0, y_0) \leq J(u, y) \quad \forall (u, y) \in \Gamma_{ad}(A^{-1})$$

où $\Gamma_{ad}(A^{-1}) = \big\{(u, y) \in V^* \times V; \quad u \in U_{ad}, y = A^{-1}u\big\}$ et $y_0 = A^{-1}u_0$.

Théorème 3.1. *Soit V un espace de Banach réflexif et V^*, le dual de V. On suppose que l'opérateur $A : V \to V^*$ est strictement monotone radialement continu coercif et tel que $\overline{\lim}_{n\to\infty} \langle Ay_n, y_n\rangle \le \langle u, y\rangle$ pour $y_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} y$ (dans V faible) et $Ay_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ (dans V^* faible). On suppose enfin que la fonctionnelle $J : V^* \times V \to \mathbb{R}$ est convexe différéntiable. Alors il existe un élément $(u_0, y_0) \in \Gamma_{ad}(A^{-1})$ tel que*

$$J(u_0, y_0) = \inf_{(u,y)\in\Gamma_{ad}(A^{-1})} J(u, y).$$

Démonstration. L'ensemble U_{ad} étant un ensemble convexe fermé dans V^* réflexif, est faiblement fermé. L'opérateur A^{-1} existe et admet les mêmes propriétés que l'opérateur A. De plus, l'opérateur A^{-1} étant borné, l'ensemble $A^{-1}(U_{ad})$ est donc borné dans V (*c.f.* K. Deimmling [3]). L'ensemble $\Gamma_{ad}(A^{-1})$ est faiblement fermé (la démonstration est la même que dans le théorème 2.1 mais pour l'opérateur A^{-1}) et borné. Alors il existe un élément $(u_0, y_0) \in \Gamma_{ad}(A^{-1})$ qui réalise le minimum de la fonctionnelle J (l'hypothèse que J est radialement non borné est inutile si l'on suppose que l'ensemble U_{ad} est borné) (*c.f.* J. Céa [2]). $\square$

4. Approximation de Galerkin. En général, la solution effective analytique du problème (I) ou (II) avec des opérateurs A différentiels ou intégraux n'est pas possible et c'est pourquoi on cherche des solutions approchées en appliquant, par exemple, l'approximation de Galerkin. Pour simplifier un peu l'exposé, on suppose que l'espace V^* est séparable.

Introduisons une famille $\{V_k^*\}_{k\in K}$ de sous-espaces de dimension finie de l'espace V^* satisfaisant aux conditions :

$$\overline{\bigcup_{k\in K} V_k^*} = V^*, \quad V_{k_1}^* \subset V_{k_2}^* \quad \forall\, k_1, k_2 \in K, \;\; k_1 > k_2, \tag{4.1}$$

$K \subset (0, 1]$ où zéro est le point d'accumulation de l'ensemble des paramètres K.

Analogiquement, introduisons une famille $\{V_h\}_{h\in G}$ de sous-espaces de dimensions finies de l'espace V satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\overline{\bigcup_{h\in G} V_h} = V, \quad V_{h_1} \subset V_{h_2} \;\; \forall\, h_1, h_2 \in G, \quad h_1 > h_2, \tag{4.2}$$

$G \subset (0, 1]$ où zéro est le point d'accumulation de l'ensemble des paramètres G.

Écrivons l'équation (1.1) sous la forme équivalente

$$\langle Ay, z\rangle = \langle u, z\rangle\,, \quad \forall\, z \in V. \tag{4.3}$$

Nous allons définir une solution approchée de la solution de l'équation (4.3) par la fonction $y_{kh} \in V_h$ correspondant au contrôle $u_k \in V_k^*$ qui satisfait à l'équation

$$\langle Ay_{kh}, z_h\rangle = \langle u_k, z_h\rangle\,, \forall z_h \in V_h. \tag{4.4}$$

Désignons par I_h l'opérateur d'injection de V_h dans V et par $I_h^* : V^* \to V_h^*$ l'adjoint de I_h. L'équation (4.4) peut alors s'écrire sous la forme opératoire

$$A_h y_{kh} = u_{kh} \tag{4.5}$$

où $A_h = I_h^* A I_h, u_{kh} = I_h^* u_k^*$.

Étant donné la forme de l'opérateur A_h, il résulte que cet opérateur a les mêmes propriétés que l'opérateur A. L'équation (4.5) admet donc la solution unique $y_{kh} \in V_h$ correspondant au contrôle $u_k \in V_k^*$.

Comme approximation du problème d'optimisation (I) on considère le problème suivant (I$_h$) : minimiser le coût $J : V_k^* \times V_h \to \mathbb{R}$ dans l'ensemble

$$U_{kh} = \{(u_k, y_{kh}) \in V_k^* \times V_h;\ \ A_h y_{kh} = u_{kh}\}\,; \quad k \in K \quad \text{et} \quad h \in G.$$

Nous pouvons énoncer le résultat suivant.

Théorème 4.1. *Si l'opérateur A et la fonctionnelle J satisfont aux hypothèses du théorème 2.1, alors le problème d'optimisation (I$_h$) admet une solution $(u_k^o, y_{kh}^o) \in U_{kh}$.*

La démonstration résulte immédiatement du théorème 2.1. Remarquons aussi, que le théorème 4.1 reste vrai si l'opérateur A ne satisfait pas à l'hypothèse (2.1) parce que l'opérateur $A_h : V_h \to V_h^*$ satisfait à cette condition (les espaces V_h et V_h^* étant de dimensions finies).

Pour démontrer que l'approximation est convergente, nous allons formuler deux lemmes.

Lemme 4.1. *Soit A, un opérateur A satisfaisant les hypothèses du théorème 2.1. Si $u_k \underset{k\to 0}{\longrightarrow} u$ (dans V^* faible), la suite correspondant aux solutions de l'équation (4.5) $y_{kh} \underset{h,k\to 0}{\longrightarrow}$ (dans V faible) où (u, y) est la solution de l'équation (1.1).*

Démonstration. Soit $C : \mathbb{R}^{n(h)} \to V_h$, l'opérateur de la forme

$$C\alpha_h = \sum_{i=1}^{n(h)} \alpha_h^i e_i = y_h; \quad \alpha_h^i \in \mathbb{R}; \quad i = 1, 2, \ldots, n(h),$$

où $(e_j) \subset V$ est une base dénombrable (elle existe parce que l'espace V est séparable). Dans les espaces de dimensions finies on a $\|\alpha_h\| \le c\|C\alpha_h\|; c > 0$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme dans les espaces correspondants. Introduisons ensuite l'opérateur $B : \mathbb{R}^{n(h)} \to \mathbb{R}^{n(h)}$ $B\alpha_h = b_h = (b_1, \ldots, b_{n(h)})$; $b_i = \langle AC\alpha_h - u_k, e_i\rangle \quad i = 1, 2, \ldots, n(h)$. De la coercivité de l'opérateur A il résulte que

$$\left(\frac{\langle Ay_h, y_h\rangle}{\|y_h\|} - \|u_k\|\right)\|y_h\| \ge 0 \quad \text{pour} \quad \|y_h\| \ge R_1\,.$$

Alors, pour $\|\alpha_h\| = cR_1$, on a

$$\langle B\alpha_h, \alpha_h\rangle \;=\; \langle Ay_h, y_h\rangle - \langle u_k, y_h\rangle \;\ge\; \left(\frac{\langle Ay_h, y_h\rangle}{\|y_h\|} - \|u_k\|\right)\|y_h\| \;\ge\; 0.$$

De cette inégalité et de la continuité de l'opérateur B, il résulte qu'il existe un élément $\alpha_h \in \mathbb{R}^{n(h)}$ tel que $B\alpha_h = 0$, c'est-à-dire, il existe un élément $y_{kh} \in V_h$ qui vérifie l'équation

$$\langle Ay_{kh}, e_i\rangle = \langle u_k, e_i\rangle\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n(h)\,. \tag{4.6}$$

De la convergence faible de la suite $\{u_k\}_{k\in K}$, de la coercivité de l'opérateur A et d'après (4.6) nous obtenons

$$\|y_{kh}\| \leq M_1, \tag{4.7}$$

$$\|Ay_{kh}\| \leq M_2, \tag{4.8}$$

où M_1, M_2 sont des constantes indépendantes de k et h.

De plus, d'après (4.6) on a

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ h\to 0}} \langle Ay_{kh}, e\rangle = \langle u, e\rangle\,, \qquad \forall\ e \in \bigcup_{h\in G} V_h.$$

Alors, $Ay_{kh} \underset{h,k\to 0}{\rightharpoonup} u$ (dans V^* faible).

De (4.7), il résulte que nous pouvons extraire de la suite $\{y_{kh}\}_{\substack{k\in K\\ h\in G}}$ une sous-suite, notée encore par $\{y_{kh}\}_{\substack{k\in K\\ h\in G}}$ telle que $y_{kh} \underset{h,k\to 0}{\rightharpoonup} \tilde{y}$ (dans V faible). De l'hypothèse (2.1) du théorème 2.1, il résulte que $A\tilde{y} = u$. De l'unicité de la solution de l'équation (1.1) il résulte que c'est la suite originelle $\{y_{kh}\}_{k\in K, h\in G}$ et non pas seulement une sous-suite extraite qui converge vers $\tilde{y} = y$ faiblement dans V. $\square$

Lemme 4.2. *On suppose que l'opérateur A satisfait aux hypothèses du lemme 4.1. Si l'opérateur A satisfait, de plus, à la condition :*

$$\begin{aligned} &\textit{lorsque} \quad \overline{y_h} \underset{h\to 0}{\rightharpoonup} \overline{y} \quad \textit{(dans } V \textit{ faible)} \quad \textit{et} \quad \langle A\overline{y_h} - A\overline{y}, \overline{y_h} - \overline{y}\rangle \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ &\qquad \textit{alors} \quad \overline{y_h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \overline{y} \quad \textit{(dans } V \textit{ fort)}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

donc pour une suite $u_k \underset{k\to 0}{\longrightarrow} u$ (dans V^* fort) la suite correspondant aux solutions de l'équation (4.5) $y_{kh} \underset{k,h\to 0}{\longrightarrow} y$ (dans V fort) où (u, y) est la solution de l'équation (1.1).

Démonstration. En profitant de la démonstration du lemme 4.1, il suffit de montrer que pour la suite $y_{kh} \underset{k,h\to 0}{\rightharpoonup} \tilde{y}$ (dans V faible), la suite

$$\langle Ay_{kh} - A\tilde{y}, y_{kh} - \tilde{y}\rangle \underset{k,h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

En effet. De (4.2) on sait qu'il existe une suite $v_h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \tilde{y}$ (dans V fort). Nous avons $\langle Ay_{kh} - A\tilde{y}, y_{kh} - \tilde{y}\rangle = \langle Ay_{kh} - A\tilde{y}, y_{kh} - v_h - < Ay_{kh} - A\tilde{y}, \tilde{y} - v_h\rangle$. D'après (4.4) nous pouvons écrire $\langle Ay_{kh}, y_{kh}\rangle = \langle u_k, y_{kh}\rangle$. Alors $\langle Ay_{kh} - A\tilde{y}, y_{kh} - \tilde{y}\rangle \underset{k,h\to 0}{\longrightarrow} 0$ et de (4.9), $y_{kh} \underset{k,h\to 0}{\longrightarrow} \tilde{y}$ (dans V fort). Du lemme 4.1, on a $\tilde{y} = y$ et $Ay = u$. $\square$

Examinons maintenant la convergence de cette approximation.

Théorème 4.2. *On suppose que l'opérateur A satisfait aux hypothèses des lemmes 4.1 et 4.2 et que la fonctionnelle $J : V^* \times V \to \mathbb{R}$ est convexe differentiable et radialement non bornée. Alors il existe des points d'accumulation faibles de la suite $\{(u_k^o, y_{kh}^o)\}_{k\in K, h\in G}$ et chacun de ces points est solution du problème d'optimisation (I).*

Démonstration. De l'hypothèse que la fonctionnelle J est radialement non bornée, il résulte que $\|u_k^o\| \leq M$, pour tout $k \in K$; $M < +\infty$. Alors, il existe une sous-suite, notée encore $\{u_k^o\}_{k\in K}$ telle que $u_k^o \underset{k\to 0}{\rightharpoonup} \overline{u}$ (dans V^* faible). Du lemme 4.1, la suite correspondant aux solutions de l'équation (4.1) $y_{kh}^o \underset{k,h\to 0}{\rightharpoonup} \overline{y}$ (dans V faible) où le couple $(\overline{u}, \overline{y})$ est la solution de l'équation (1.1).

Montrons que ce couple est la solution optimale du problème (I).

En effet, la fonctionnelle $J : V^* \times V \to \mathbb{R}$ étant convexe et différentiable, est semi-continue inférieurement dans $V^* \times V$. Puisque la suite $\{(u_k^o, y_{kh}^o)\}_{\substack{k\in K\\ h\in G}}$ est la suite minimisante, nous obtenons $\inf_{(u,y)\in\Gamma(A^{-1})} J(u,y) = \lim_{\substack{k\to 0\\ h\to 0}} J(u_k^o, y_{kh}^o) = \underline{\lim}_{\substack{k\to 0\\ h\to 0}} J(u_k^o, y_{kh}^o) \geq J(\overline{u}, \overline{y})$. C'est-à-dire que $\overline{u} = u_0$, $\overline{y} = y_0$. $\square$

On trouvera dans [4] des résultats analogues à ceux du théorème 4.2 pour la fonction coût quadratique mais une autre équation d'état du système. Malheureusement, si la fonction coût est générale, on ne peut pas démontrer qu'il existe des points d'accumulation forts de la suite $\{(u_k^o, y_{kh}^o)\}_{k\in K, h\in G}$.

Maintenant, considérons le coût sous la forme

$$J(u,y) = \|E(y(u) - y_d)\|^2 + \|Du\|^2 \tag{4.10}$$

où $E \in L(V, Y),\ D \in L(V^*, Z);\ Y, Z$ sont des espaces de Hilbert, y_d est un élément fixé de l'espace V et $y(u)$ est la solution de l'équation (1.1) correspondante au contrôle u. On suppose, de plus, qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\|Du\| \geq \gamma\|u\|. \tag{4.11}$$

Théorème 4.3. *On suppose que l'opérateur A satisfait aux hypothèses du théorème 4.1, alors pour la fonctionnelle (4.10) qui satisfait à la condition*

$$\begin{aligned} &(Du_k^0, Du_k - Du_k^0) + (Ey_{kh}^0 - Ey_{dh}, Ey_{kh} - Ey_{kh}^0) \geq 0 \\ &\qquad\qquad \forall\ (u_k, y_{kh}) \in U_{kh}, \quad k \in K,\ h \in G \end{aligned} \tag{4.12}$$

$y_{dh} \in V_h$ et $y_{dh} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} y_d$ (dans V fort); $((\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire dans les espaces correspondants), il existe des points d'accumulation forts de la suite $\{(u_k^0, y_{kh}^0)\}_{\substack{k\in K\\ h\in G}}$ et chacun de ces points est la solution du problème d'optimisation (I) avec le coût (4.10).

Démonstration. Du théorème 4.1 on a $u_k^0 \underset{k\to 0}{\rightharpoonup} u_0$ (dans V^* faible) et $y_{kh}^0 \underset{k,h\to 0}{\rightharpoonup} y_0$ (dans V faible). D'après (4.1) il existe une suite $u_{k0} \underset{k\to 0}{\longrightarrow} u_0$ (dans V^* fort). En profitant de (4.12) nous obtenons $(Du_k^0, Du_{k0} - Du_k^0) + (Ey_{kh}^0 - Ey_{dh}, Ey_{kh0} - Ey_{kh}^0) \geq 0$ où

y_{kh0} est la solution de l'équation (4.4) qui correspond au contrôle u_{k0}. Par (4.11), il en résulte que

$$\begin{aligned}0 \leq \gamma^2 \|u_k^o - u_{k0}\|^2 &\leq (D(u_k^0 - u_{k0}), D(u_k^0 - u_{k0}))\\ &\leq (Ey_{kh}^0 - Ey_{dh}, Ey_{kh0} - Ey_{kh}^0) - (Du_{k0}, D(u_k^0 - u_{k0}))\\ &\leq (Ey_{kh}^0, y_{kh0}) - (Ey_{kh}^0, Ey_{kh}^0) - (Ey_{dh}, Ey_{kh0}) +\\ &\quad + (Ey_{dh}, Ey_{kh}^0) - (Du_{k0}, Du_k^0) + (Du_{k0}, Du_{k0})\\ &\quad \underset{k,h\to 0}{\longrightarrow} (Ey_0, Ey_0) - \underline{\lim}_{\substack{k\to 0\\ h\to 0}} \|Ey_{kh}^0\|^2 \leq 0.\end{aligned}$$

De l'inégalité $\|u_k^0 - u_0\| \leq \|u_k^0 - u_{k0}\| + \|u_{k0} - u_0\|$ nous obtenons $u_k^0 \underset{k\to 0}{\longrightarrow} u_0$ (dans V^* fort). □

Examinons maintenant l'approximation du problème (II). Sous la forme du problème suivant (II$_h$): minimiser le coût $J : V_k^* \times V_h \to \mathbb{R}$ dans l'ensemble

$$U_{ad_{kh}} = \{(u_k, y_{kh}) \in V_k^* \times V_h,\ u_k \in U_{ad} \cap V_k^* \wedge A_h y_{kh} = u_{kh}\}, \quad k \in K,\ h \in G.$$

Analogiquement au cas précédent, on peut démontrer les théorèmes suivants :

Théorème 4.4. *Si l'opérateur A et la fonctionnelle J satisfont aux hypothèses du théorème 3.1 et $U_{ad_{kh}} \neq \emptyset$, alors le problème d'optimisation (II$_h$) admet une solution $(u_k^0, y_{kh}^0) \in U_{ad_{kh}}$.*

Théorème 4.5. *On suppose que l'opérateur A satisfait aux hypothèses des lemmes 4.1 et 4.2 et que la fonctionnelle $J : V^* \times V \to \mathbb{R}$ est convexe et différentiable et* $\operatorname{int}(U_{ad}) \neq \emptyset$. *Alors il existe des points d'accumulations faibles de la suite $\{(u_k^0, y_{kh}^0)\}_{k\in K, h\in G}$ et chacun de ces points est la solution du problème d'optimisation (II).*

En particulier, pour le coût (4.10) on a le résultat suivant.

Théorème 4.6. *On suppose que l'opérateur A satisfait aux hypothèses des lemmes 4.1 et 4.2 et* $\operatorname{int}(U_{ad}) \neq \emptyset$. *Alors pour la fonctionnelle (4.10) qui satisfait à la condition*

$$\begin{aligned}&(Du_k^0, Du_k - Du_k^0) + (Ey_{kh}^0 - Ey_{dh}, Ey_{kh} - Ey_{kh}^0) \geq 0\\ &\qquad\qquad\qquad \forall (u_k, y_{kh}) \in U_{ad_{kh}},\ k \in K,\ h \in G,\end{aligned}$$

$y_{dh} \in V_h$ et $y_{dh} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} y_d$ (dans V fort), il existe des points d'accumulations forts de la suite $\{(u_k^0, y_{kh}^0)\}_{\substack{k\in K\\ h\in G}}$ et chacun de ces points est solution du problème d'optimisation (II).

5. Exemple. Considérons une équation non linéaire aux dérivées partielles

$$Ay = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, \omega) + a_{n+1}(x, \omega) = u(x) \tag{5.1}$$

où $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$; Ω un ouvert borné de frontière Γ, variété indéfiniment différentiable de dimension $(n-1)$, Ω étant localement d'un seul côté de Γ,

$$\omega = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, y\right) = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}).$$

Posons $V = W_0^{1,P}(\Omega)$ et

$$a_i(x,\omega) = \phi(x, |\omega|^{p-1})|\omega|^{p-2}\omega_i; \qquad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

où $\mid \omega \mid = \left(\sum_{i=1}^{n+1} \omega_i^2\right)^{1/2}$ et $p \geq 2$.

Supposons que la fonction ϕ satisfait les conditions suivantes :

a) $\forall\ s \in [0,\infty)$, la fonction $x \to \phi(x,s)$ est mesurable sur Ω;
b) pour presque tout $x \in \Omega$, la fonctions$s \to \phi(x,s)$ est continue sur $[0,\infty)$;
c) $\forall\ s \in [0,\infty)$ et presque tout $x \in \Omega$, $\phi(x,s) \leq M$ où $M =$ const.

Théorème 5.1. *Si $p \geq 2$, si la fonction ϕ satisfait aux conditions a–c et si pour presque tout $x \in \Omega$, $\phi(x,t)t - \phi(x,s)s \geq m(t-s)$, pour $t \geq s$, $m > 0$, alors l'opérateur $A : V \to V^* = W^{-1,q}(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ est semi-continu, strictement monotone coercif et satisfait les conditions (2.1) et (4.9).*

Démonstration. Remarquons que l'opérateur A peut se présenter dans un cadre plus commode

$$A = L^* A_0 L \quad \text{où} \quad L : y \to \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, y\right) L : V \to Y = L^p_{n+1}(\Omega),$$

$$A_0 : \omega \to (a_1(x,\omega), a_2(x,\omega), \dots, a_{n+1}(x,\omega)).$$

L'opérateur A_0 est l'opérateur de Nemytsky et sous les hypothèses a–c, il est facile de montrer que $A_0\omega \in L^q_{n+1}(\Omega) = Y^*$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ et que l'opérateur A_0 est borné (*c.f.* H. Gajewski [5]). L'opérateur A_0 est alors semi-continu de $L^p_{n+1}(\Omega)$ dans $L^q_{n+1}(\Omega)$. Si $L^* : Y^* \to V^*$ désigne l'adjoint de L, il en résulte que

$$\langle Ay, v\rangle_{V^* \times V} = \langle L^* A_0 Ly, v\rangle_{V^* \times V} = \langle A_0 Ly, Lv\rangle_{Y^* \times Y}\,.$$

Prenons les normes dans les espaces V et Y telles que $\|Ly\|_Y = \|y\|_V$. Il en découle que si l'opérateur A_0 admet l'une des propriétés suivantes : semi-continuité, strict monotonicité, coercivité et la propriété (4.9), alors l'opérateur A admet aussi cette propriété. Pour l'opérateur A_0 on a :

$$\begin{aligned}
\langle A_0\omega - A_0 z, \omega - z\rangle_{Y^* \times Y} &\geq m \int_\Omega (\mid \omega \mid^{p-1} - \mid z \mid^{p-1})(\mid \omega \mid - \mid z \mid) dx \\
&= m(\|\omega\|_Y + \|z\|_Y - \int_\Omega (\mid \omega \mid^{p-1} \mid z \mid + \mid \omega \mid\mid z \mid^{p-1}) dx \\
&\geq m(\|\omega\|_Y^p + \|z\|_Y^p - \|\omega\|_Y^{p-1}\|z\|_Y - \|\omega\|_Y\|z\|_Y^{p-1}) \\
&= m(\|\omega\|_Y^{p-1} - \|z\|_Y^{p-1})(\|\omega\|_Y - \|z\|_Y),
\end{aligned}$$

où $\mid z \mid = (\sum_{i=1}^{n+1} z_i^2)^{1/2}$. Il en résulte que l'opérateur A_0 est strictement monotone, coercif et il admet la propriété (4.9). L'opérateur A est aussi semi-continu parce que l'opérateur A_0 est semi-continu et il satisfait à la condition (2.1). $\square$

Les coefficients a_i de l'opérateur A dans la forme (5.1) apparaissent notamment dans les problèmes latéraux de la théorie de l'élasticité ou dans les fluides non newtoniens.

Considérons le problème d'optimisation (I) avec le coût sous la forme

$$J(u,y) = \int_\Omega (Ey(u))^2 dx + \int_\Omega (Du)^2 dx \tag{5.2}$$

où l'opérateur E est l'opérateur de l'injection de V dans $H = L^2(\Omega)$ et l'opérateur $D \in \mathcal{L}(V^*, H)$ satisfait à la condition (4.11). Soit $y(u)$ la solution de l'équation (5.1) correspondant au contrôle $u \in V^*$.

Analogiquement au cas général, l'approximation du problème (I) se décrit par le problème suivant (I_h) : minimiser le coût

$$J(u_k, y_h) = \int_\Omega y_h^2(x) dx + \int_\Omega (Du_k)^2(x) dx \tag{5.3}$$

où $u_k \in V_k^*$, $y_h = \sum_{i=1}^{n(h)} \alpha_h^i e_i$ et $(\alpha_h^1, \alpha_h^2, \ldots, \alpha_h^{n(h)})$ est la solution du système d'équations algébriques de la forme :

$$\left\langle -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(x, \mid \omega_h \mid^{p-1}) \mid \omega_h \mid^{p-2} \omega_h^i + \phi(x, \mid \omega_h \mid^{p-1}) \mid \omega_h \mid^{p-2} \omega_h^{n+1}, e_j \right\rangle = \langle u_k, e_j \rangle$$

qui résulte de (4.6) où $j = 1, 2, \ldots, n(h)$, $\omega_h = (\omega_h^1, \omega_h^2, \ldots, \omega_h^{n+1})$,

$$\omega_h^i = \sum_{j=1}^{n(h)} \alpha_h^j \frac{\partial e_j}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \ldots n, \quad \omega_h^{n+1} = y_h.$$

Introduisons les matrices

$$\mathbb{Y}_h = [\alpha_h^i]_{n(h)\times 1}, \quad \mathbb{E}_h = [(e_i, e_j)_h]_{n(h)\times n(h)}, \quad \mathbb{D}_k = [(Dm_i, Dm_j)_h]_{n(k)\times n(k)},$$

$\mathbb{U}_k = [\beta_k^i]_{n(k)\times 1}$ où $u_k = \sum_{i=1}^{n(k)} \beta_k^i m_i$, $(m_i) \subset V^*$ étant une base dénombrable. Alors la fonctionnelle (5.3) a la forme

$$J(u_k, y_h) = \mathbb{Y}_h^T \mathbb{E}_h \mathbb{Y}_h + \mathbb{U}_k^T \mathbb{D}_k \mathbb{U}_k.$$

Il est alors évident que nous avons ramené le problème d'optimisation (I) en un problème typique de programmation mathématique.

Remarquons que le théorème 5.1 est aussi valable si nous considérons l'équation (5.1) avec les fonctions

$$a_i(x,\omega) = \phi(x, |\omega|^{p-1})|\omega|^{p-2} \sum_{j=1}^{n+1} b_{ij}\omega_j; \quad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

$p \geq 2$ où $|\omega| = (\sum_{i,j=1}^{n+1} b_{ij}\omega_i\omega_j)^{1/2}$, $b_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $b_{ij} = b_{ji}$, $\quad i,j = 1,2,\ldots,n+1$ et $\sum_{i,j=1}^{n+1} b_{ij}d_id_j \geq b\sum_{i=1}^{n+1} d_i^2$, $b =$ const. > 0, $d_i \in \mathbb{R}$, $\quad i = 1,2,\ldots,n+1$. Dans ce cas il faut considérer l'espace $Y = L_{n+1}^P(\Omega)$ muni de la norme

$$\|\omega\|_Y = (\int_\Omega (\sum_{i,j=1}^{n+1} b_{ij}\omega_i\omega_j)^{p/2}dx)^{1/p}.$$

L'opérateur de Nemytsky A_0 admet les mêmes propriétés qui précèdent si les hypothèses du théorème 5.1 sont satisfaites.

English extended abstract. In this paper we consider the optimal control problems (I) and (II) for a system governed by a nonlinear Equation (1.1) with the cost functional convex differentiable and coercive.

In a first preparatory part we prove two existence theorems for the problems (I) and (II).

Theorem. *Let V be a real reflexive Banach space and V^* a dual space of V. Let us assume that $A : V \to V^*$ is strictly monotone, radially continuous, coercive and such that $\overline{\lim}_{n\to\infty} \langle Ay_n, y_n\rangle \leq \langle u, y\rangle$ for $y_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} y$ (weakly in V) and $Ay_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ (weakly in V^*); $J : V^* \times V \to \mathbb{R}$ is convex, radially unbounded and differentiable. Then there exists an element $(u_0, y_0) \in \Gamma(A^{-1})$ such that*

$$J(u_0, y_0) = \inf_{(u,y)\in\Gamma(A^{-1})} J(u, y)$$

where $\langle\cdot,\cdot\rangle$ stands for the duality relation between V^* and V, $\Gamma(A^{-1}) = \{(u, y) \in V^* \times V; y = A^{-1}u\}$, $y_0 = A^{-1}u_0$.

Theorem. *Let V^* be a reflexive real Banach space a dual to Banach space V. Let us assume further that $A : V \to V^*$ is strictly monotone, coercive, radially continuous and such that*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle Ay_n, y_n\rangle \leq \langle u, y\rangle \ \text{for}\ y_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} y \ \ \text{(weakly in } V\text{)}$$

and $Ay_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u$ (weakly in V^*); $J : V^* \times \to \mathbb{R}$ is convex and differentiable. Then there exist an element $(u_0, y_0) \in \Gamma_{ad}(A^{-1})$ such that

$$J(u_0, y_0) = \inf_{(u,y)\in\Gamma_{ad}(A^{-1})} J(u, y)$$

where $\Gamma_{ad}(A^{-1}) = \{(u, y) \in V^* \times V;\ u \in U_{ad}\,,\ y = A^{-1}u\}$, $y_0 = A^{-1}u_0\,$, U_{ad} is a set of admissible controls which is convex, closed and bounded in V^*.

The second part of the paper is concerned with the convergence of Galerkin method for the approximation of the problems (I), (II).

Theorem. *Assume that operator A satisfies all the assumptions of Lemma 4.2. Then there exist weak condensation points of a set of solutions of the optimisation problems (I_h) in $V^* \times V$ and each of these points is the solution of the optimisation problem (I).*

Theorem. *Let the assumptions of Lemma 4.2 be satisfied and* $(Du_k^0, Du_k - Du_k^0)$ + $(Ey_{kh}^0 - Ey_{dh}, Ey_{kh} - Ey_{kh}^0) \geq 0\ \forall (u_k, y_{kh}) \in U_{kh},\ k \in K,\ h \in G,\ y_{dh} \in V_h,$ $y_{dh} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} y_d$ *(strongly in* V*); (* $(\cdot,\cdot)$ *denote the inner product in respective spaces), then there exist strong condensation points of a set of solutions of the optimisation problems (*I_h*)in* $V^* \times V$ *and each of these points is a solution of the optimisation problem (I) with the cost functional (4.10).*

Similarly to Theorems 4.1 and 4.2 we prove the existence of the weak and strong condensation points of a set of solutions of the optimisation problems (II_h) in $V^* \times V$ under the assumption $\mathrm{int}(U_{ad}) \neq \emptyset$. Each of these points is a solution of the optimisation problem (II).

Finally, we apply the results to an example.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Mathematics Studies, No. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1973.
2. J. Céa, *Optimisation: Théorie et algorithmes*, Méthodes Mathématiques de l'Informatique, vol. 2, Dunod, Paris, 1971.
3. K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1985.
4. A. Dębińska-Nagórska, A. Just et Z. Stempień, *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par une équation hyperbolique non linéaire. Approximation*, Ann. Sci. Math. Québec **23** (1999), 163–172.
5. H. Gajewski, K. Gröger et K. Zacharias, *Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen*, Mathematische Monographien, Band 38, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
6. J. L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1968.
7. J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.

A. JUST
INSTITUTE OF MATHEMATICS
TECHNICAL UNIVERSITY OF LODZ
PL-90-924 LODZ
AL. POLITECHNIKI 11
POLAND
COURRIEL : ajust@ck-sg.p.lodz.pl