Ann. Sci. Math. Québec **24** (2000), no. 1, 53–61.

APPLICATIONS RELATIVEMENT BORNÉES SUR LES CÔNES C-RÉGULIERS

FATIMETOU MINT EL MOUNIR ET MOHAMED OUDADESS

RÉSUMÉ. Nous étendons des résultats de A. O. Bahya à des cônes C-réguliers. Comme conséquences, nous obtenons dans certains cas, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône soit localement borné et d'autres pour qu'il soit bien basé. Nous obtenons également des comparaisons de cônes nucléaires et de cônes bien basés pour deux topologies différentes.

ABSTRACT. We extend some results of A. O. Bahya on C-regular cones. As a consequence, we obtain in some cases necessary and sufficient conditions for a cone to be locally bounded (resp. well based). We compare also nuclear cones and well based cones with respect to distinct topologies.

1. Introduction. Nous introduisons une classe de cônes convexes dits C-réguliers. Elle englobe les cônes séquentiellement complets et les cônes séquentiellement complètement réguliers. Nous apportons une amélioration aux propositions 2 et 3 de [2], où il est question d'applications relativement bornées, tout en les étendant aux cônes C-réguliers. Ceci permet d'une part d'obtenir, dans certaines situations, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône soit localement borné (corollaire 3.5) et d'autres pour qu'un cône soit bien basé ou nucléaire (corollaire 3.9 et proposition 3.11). D'autre part cela permet de comparer la nucléarité d'un cône et le fait qu'il soit bien basé pour deux topologies différentes.

On considère dans toute la suite que (E, τ) est un espace localement convexe séparé. Si E' est le dual topologique de E, on note σ la topologie faible associée à la dualité (E, E'). Pour les différents types de cônes utilisés dans cet article, on renvoie à [4] et [5].

2. Cônes C-réguliers. Dans la définition des cônes séquentiellement complètement réguliers, on considère des suites bornées. Ici, on se limite aux suites de Cauchy.

Définition. On dira qu'un cône convexe $K \subset E$ est Cauchy-régulier (C-régulier) si toute suite croissante d'éléments de K qui est de Cauchy est convergente dans K.

Reçu le 28 avril 1999 et, sous forme définitive, le 25 janvier 2000.

Exemples.

- Tout cône séquentiellement complet est C-régulier.
- Tout cône séquentiellement complètement régulier est C-régulier.
- Tout cône faiblement C-régulier est C-régulier car si une suite de Cauchy est σ-convergente alors elle est τ-convergente.
- On considère l'espace (l^1, τ) où τ est la topologie définie par la famille $(p_n)_n$ des semi-normes suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n((x_k)_k) = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad \forall (x_k)_k \in l^1.$$

Soit K le cône convexe suivant :

$$K = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in l^1,\ x_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Alors K est un cône non C-régulier. En effet (l^1, τ) est subnormable et K est nucléaire mais non localement borné (voir corollaire 3.6).

Remarques.

1. Dans un cône normal, si une suite croisante converge faiblement alors elle converge. ([4]).
2. Dans un cône nucléaire, toute suite croissante bornée est de Cauchy ([6]).

La proposition suivante découle des remarques précédentes.

Proposition 2.1. *Soit K un cône convexe normal dans un espace localement convexe séparé E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *K est faiblement séquentiellement complètement régulier ;*
2. *K est faiblement C-régulier ;*
3. *K est séquentiellement complètement régulier.*

Si K est nucléaire, alors les propriétés précédentes sont équivalentes à

4. *K est C-régulier.*

Notons qu'un cône normal C-régulier n'est pas nécessairement faiblement C-régulier. Par exemple, dans l'espace de Banach $(l^\infty, \|\ \|_\infty)$, le cône convexe K défini par :

$$K = \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^\infty,\ x_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

est normal, C-régulier mais non faiblement C-régulier.

3. Applications relativement bornées. Rappelons qu'une application f de K dans $\mathbb{R}$ est dite relativement bornée si pour tout $x \in K$, il existe $\alpha > 0$ tel que : si $x = u + v$ où $u, v \in K$ alors $f(u) < \alpha$. Cette notion a été introduite par G. Mokobodzki [7] .

Remarques.

1. L'application f de K dans $\mathbb{R}$ est relativement bornée si et seulement si $\forall x \in K$, $\exists\, \alpha_x > 0 :\ f(y) < \alpha_x, \forall y \in [0, x]$.
2. Si K est σ-normal alors toute semi-norme continue sur E est relativement bornée.

Dans [2] Bahya a montré que si K est un cône séquentiellement complètement régulier dans lequel 0 possède un système fondamental dénombrable de voisinages et si $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application relativement bornée, alors :

$$\exists \mu > 0,\ \exists \epsilon > 0,\ \exists r \in \mathbb{N} : \quad (\forall x \in K) \quad (\forall m \leq r)[(p_m(x) \leq \epsilon) \ \Rightarrow \ (f(x) \leq \mu)]$$

où les p_m sont les jauges du système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans K.

Nous obtenons l'amélioration et l'extension suivante de ce résultat.

Proposition 3.1. *Soit $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une application relativement bornée sur un cône K vérifiant la condition suivante :*

(c) *K est C-régulier et 0 possède dans K un système fondamental dénombrable de voisinages $(V_n)_n$.*

Alors :

$$\exists\, \alpha > 0,\ \exists\, n \in \mathbb{N}^* : \quad (\forall x \in K)\ [p_n(x) < 1 \ \Rightarrow \ f(x) \leq \alpha]$$

où p_n est la jauge de V_n.

Preuve. Soit $(W_n)_n$ un système fondamental dénombrable de voisinages convexes de 0 dans K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} \subset W_n$. Il suffit de montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(\forall x \in K)\ [(p'_n(x) \leq 1/2^n) \ \Rightarrow \ f(x) \leq n]$$

où p'_n est la jauge de W_n, car il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $V_{n_0} \subset \frac{1}{2^n} W_n$. Supposons alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \exists x_n \in K\ p'_n(x_n) \leq 1/2^n$ et $f(x_n) > n$. La suite $\left(\sum_{i \leq n} x_i\right)_n$ est une suite monotone croissante d'éléments de K qui est de Cauchy. En effet, soit $m_0 \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} p'_{m_0}\left(\sum_{i=m+1}^{n} x_i\right) &\leq \sum_{i=m+1}^{n} p'_{m_0}(x_i), \quad n \geq m \geq m_0 \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n} p'_i(x_i) \\ &\leq \sum_{i=m+1}^{n} 1/2^i \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Elle converge donc vers un certain x dans K. En posant $y_n = x - x_n$, on aura $x = x_n + y_n$ avec x_n et y_n dans K et $f(x_n) > n$, ce qui est contradictoire. □

Pour un cône K séquentiellement complètement régulier dans lequel 0 possède un système fondamental dénombrable de voisinages et pour p une semi-norme relativement bornée, Bahya a montré (proposition 3, [2]) que

$$\exists \mu > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in K : \quad p(x) \leq \mu \sup_{m \leq n} p_m(x).$$

Nous avons l'amélioration et l'extension suivante de ce résultat.

Proposition 3.2. *Soit $K \subset E$ un cône convexe vérifiant la condition (c) et soit $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une application relativement bornée et positivement homogène (i.e. $f(\lambda x) = \lambda f(x),\ \forall \lambda \geq 0$). Alors :*

$$\exists \alpha > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad f(x) \leq \alpha p_n(x) \quad \forall x \in K,$$

où p_n est la jauge de V_n.

Preuve. D'après la proposition 3.1, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$ tels que :

$$(\forall x \in K) \quad [(p_n(x) < 1) \ \Rightarrow\ f(x) \ \leq\ \alpha].$$

Soit $\epsilon > 0$. On a pour tout $x \in K$, $p_n(x/(p_n(x) + \epsilon)) < 1$. Donc $f(x) \leq \alpha p_n(x)$. □

La notion de partie semi-complète a été introduite par G. Mokobodzki dans [7]. Rappelons sa définition.

Une partie S de E est dite semi-complète si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de S et toute suite $(\alpha_n)_n \in l_1^+$ de somme égale à 1, la suite $(\alpha_n x_n)_n$ est sommable et $\sum_n \alpha_n x_n \in S$.

Lemme 3.3. *Si K est un cône convexe C-régulier alors K est semi-complet.*

Preuve. Soit $(x_n)_n$ une suite bornée d'éléments de K et soit $(\alpha_n)_n$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n = 1$. Alors la suite $(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante, de Cauchy. En effet, soit V un voisinage disqué de 0 et soit P la jauge de V. Comme $(x_n)_n$ est bornée, il existe $\lambda > 0$ tel que $x_n \in \lambda V$, pour tout n. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n < 1/\lambda$.

Soit $p \geq q \geq N$, on a

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{n=q+1}^{p} \alpha_n x_n\right) &\leq \sum_{n=q+1}^{p} P(\alpha_n x_n) \\ &\leq \lambda \sum_{n=q+1}^{p} \alpha_n \\ &< 1. \qquad \square \end{aligned}$$

Proposition 3.4. *Soit (E, τ) un espace localement convexe séparé et $K \subset E$ un cône convexe faiblement normal et vérifiant la condition (c). Alors tout tonneau de E est un voisinage de zéro dans K.*

Preuve. Montrons que pour tout $x \in K$, $[0, x]$ est une partie semi-complète. Si pour tout n, $x_n \in [0, x]$ et si $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{R}_+$ est telle que $\sum_n \alpha_n = 1$ alors $\sum_n \alpha_n x_n \in K$. Comme $(x - x_n)_n$ est bornée, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x - x_n) \in K$.

Or, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (x - x_n) = x - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Donc $0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \leq x$.

D'autre part, $[0, x]$ est borné, donc d'après le lemme 18 de [7], tout tonneau A absorbe $[0, x]$. La jauge p de A est donc relativement bornée. Ainsi, on a d'après la proposition 3.2

$$\exists \alpha > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad p(x) \leq \alpha p_n(x) \quad \forall x \in K,$$

Donc $A \cap K$ est un voisinage de 0 dans K. $\square$

Le corollaire suivant est une extension d'un résultat démontré dans [4] pour un cône convexe semi-complet pour une suite de formes linéaires continues sur E et positives sur K.

Corollaire 3.5. *Soit $K \subset E$ un cône convexe σ-normal et vérifiant la condition (c). Si K est engendré par un ensemble B borné alors K est localement borné.*

Preuve. L'enveloppe disquée fermée de B dans l'espace K-K est un tonneau. C'est donc un voisinage de 0 dans K et il est borné. $\square$

Rappelons qu'un espace localement convexe séparé (E, τ) est dit subnormable s'il existe une norme sur E dont la topologie est plus fine que τ. On vérifie facilement que (E, τ) est subnormable si et seulement si E contient une partie bornée absorbante.

Corollaire3.6. *Soit (E, τ) un espace subnormable et soit $K \subset E$ un cône convexe σ-normal, vérifiant la condition (c). Alors K est localement borné.*

Bahya a montré dans [2] que si K est un cône séquentiellement complètement régulier dans lequel 0 possède un système fondamental dénombrable de voisinages et si K est bien basé pour une topologie localement convexe sur E pour laquelle tout borné est borné pour τ, alors K est bien basé (proposition 4, [2]). Nous améliorons ceci en montrant que K est bien basé dès qu'il a une base bornée.

Lemme 3.7. *Soit $K \subset E$ un cône convexe vérifiant la condition (c) et soit $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une application relativement bornée et positivement homogène. Alors $0 \notin \overline{A_\lambda}$, pour tout $\lambda > 0$, où $A_\lambda = f^{-1}(\lambda)$ et $\overline{A_\lambda}$ est son adhérence.*

Preuve. D'après la proposition 3.2, il existe $\alpha > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall x \in K, \quad f(x) \leq \alpha p_n(x).$$

Si $A_\lambda = \phi$, c'est fini. Si $A_\lambda \neq \phi$ et si $0 \in \overline{A_\lambda}$, il existerait une suite généralisée $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de A_λ qui est convergente vers 0. Ce qui n'est pas possible car pour tout $i \in I$, $p_n(x_i) \geq \lambda/\alpha$. $\square$

Proposition 3.8. *Soit $K \subset E$ un cône convexe vérifiant la condition (c). Alors toute base B de K est telle que $0 \notin \overline{B}$.*

Preuve. Puisque B est une base pour K, il existe une forme linéaire f, positive sur K telle que $B = f^{-1}(\{1\}) \cap K$. $\square$

Corollaire 3.9. *Un cône vérifiant la condition (c) est bien basé si et seulement si il possède une base bornée.*

Nous obtenons également, comme conséquence du lemme 3.7, le résultat suivant.

Proposition 3.10. *Soit $K \subset E$ un cône convexe vérifiant la condition (c) et soit $p : K \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application additive et positivement homogène. Alors*

$$\exists f \in E', \quad \forall x \in K, \quad p(x) \leq f(x).$$

Preuve. On pose $A = \{x \in K, p(x) = 1\}$. Si pour tout $x \in K$, $p(x) = 0$ alors on a le résultat. S'il existe $x \in K$ tel que $p(x) \neq 0$, alors $\overline{A}$ est un convexe non vide qui ne contient pas zéro. D'après un théorème de séparation, il existe $f \in E'$ telle que, pour tout $y \in \overline{A}$, $f(y) \geq 1$. On a alors

$$p(x) \leq f(x) \quad \forall x \in K. \qquad \square$$

Le résultat suivant, qui découle directement de la proposition précédente, montre en particulier que dans un espace de Fréchet, les formes linéaires non nécessairement continues suffisent à caractériser les cônes fermés nucléaires (respectivement bien basés). Le dual algébrique de E est noté E^*.

Proposition 3.11. *Soit (E, τ) un espace localement convexe séparé et $K \subset E$ un cône convexe vérifiant la condition (c). Alors*

1. *K est nucléaire si et seulement si il existe une base B de semi-normes définissant la topologie τ telle que*

$$\forall p \in B, \ \exists\, f \in E^*, \quad \forall x \in K: \quad p(x) \leq f(x).$$

2. *K est bien basé si et seulement si il existe une base B de semi-normes définissant τ, il existe $f \in E^*$ tels que*

$$\forall p \in B, \ \exists\, \alpha_p > 0, \quad \forall x \in K: \quad p(x) \leq \alpha_p f(x).$$

4. Comparaisons pour différentes topologies. Dans cette section, nous considérons deux topologies sur l'espace E et nous obtenons sous certaines conditions que le cône est nucléaire (respectivement bien basé) pour l'une des topologies dès qu'il l'est pour l'autre. Commençons par le cas où elles sont comparables.

Proposition 4.1. *Soit (E, τ) un espace localement convexe séparé et $K \subset E$ un cône convexe vérifiant la condition (c). Si K est nucléaire (respectivement bien basé) pour une topologie localement convexe τ_1 plus fine que τ alors K est τ-nucléaire (respectivement τ-bien basé).*

Preuve. Comme K est τ_1-nucléaire, il existe une base B formée de semi-normes additives, définissant la topologie τ_1 (voir [1]). Soit p une semi-norme τ-continue, il existe $p_1 \in B$ telle que $p \leq p_1$. D'après la proposition 3.10, il existe $f \in (E, \tau)'$ telle que $p(x) \leq f(x)$, pour tout $x \in K$.

On fait un raisonnement analogue si K est τ_1-bien basé. $\square$

Proposition 4.2. *Soit (E, τ) un espace localement convexe séparé et soit τ_1 une topologie localement convexe sur E telle que $(E, \tau)' \subset (E, \tau_1)'$ (par exemple, τ_1 plus fine que τ ou τ_1 compatible avec le dual $(E, \tau)'$). Soit K un cône convexe σ_1-normal.*

1. *Si pour la topologie τ, K est nucléaire et vérifie la condition (c) alors K est τ_1-nucléaire.*
2. *Si K est C-régulier et bien basé pour τ, il est τ_1-bien basé.*

Preuve.

1. Considérons un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans K pour τ dont les jauges $(q_n)_n$ sont additives. Soit p une semi-norme τ_1-continue, elle est relativement bornée car K est σ_1-normal. Donc,

$$\exists \alpha_p > 0, \quad \exists n_p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in K : \quad p(x) \leq \alpha_p q_{n_p}(x).$$

D'après la proposition 3.10, il existe $f_{n_p} \in (E, \tau)'$ telle que

$$q_{n_p}(x) \leq f_{n_p}(x) \quad \forall x \in K$$

et comme $(E, \tau)' \subset (E, \tau_1)'$, K est τ_1-nucléaire.

2. Raisonnement analogue à 1. □

Comme conséquence, nous obtenons l'extension suivante d'un résultat de Isac [5] concernant les cônes faiblement complets.

Corollaire 4.3. *Soit $K \subset E$ un cône convexe faiblement C-régulier dans lequel zéro possède un système fondamental dénombrable de voisinages faibles. Si K est faiblement normal alors K est nucléaire.*

Dans le cas où les topologies ne sont pas comparables, on a les résultats qui suivent.

Proposition 4.4. *Soit τ_1 et τ_2 deux topologies localement convexes séparées sur un même espace vectoriel E et $K \subset E$ un cône convexe vérifiant la condition (c) pour les deux topologies. On suppose de plus que K est τ_2-nucléaire. Alors si K est σ_1-normal, il est τ_1-nucléaire.*

Preuve. Puisque K est τ_2-nucléaire et que zéro possède dans K un système fondamental dénombrable de voisinages pour τ_2 alors zéro possède dans K un système fondamental dénombrable de voisinages pour τ_2 dont les jauges $(q_n)_n$ sont additives. Soit p une semi-norme τ_1-continue, elle est relativement bornée donc,

$$\exists \alpha_p > 0, \quad \exists n_p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in K : \quad p(x) \leq \alpha_p q_{n_p}(x).$$

D'après la proposition 3.10, il existe $f_p \in (E, \tau_1)'$ telle que

$$q_{n_p}(x) \leq f_p(x) \quad \forall x \in K$$

et donc K est τ_1-nucléaire. □

Le corollaire suivant montre en particulier que si K est un cône fermé normal non nucléaire dans un espace de Fréchet E, alors il n'est nucléaire pour aucune autre topologie de Fréchet sur E pour laquelle il est fermé.

Corollaire 4.5. *Soit $K \subset (E, \tau)$ un cône convexe vérifiant la condition (c). S'il existe sur E une topologie de Fréchet τ_1 pour laquelle K est nucléaire et fermé et si K est σ-normal alors K est τ-nucléaire.*

Pour les cônes bien basés, on a :

Proposition 4.6. *Soit τ_1 et τ_2 deux topologies localement convexes séparées sur un même espace vectoriel E et $K \subset E$ un cône convexe vérifiant la condition (c) pour la topologie τ_1. On suppose de plus que K est C-régulier et bien basé pour la topologie τ_2. Si K est σ_1-normal alors K est τ_1-bien basé.*

Preuve. Soit $(q_n)_n$ les jauges associées à un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 dans K pour τ_2 et soit p une semi-norme τ_1-continue. Alors

$$\exists \alpha_p > 0, \quad \exists n_p \in \mathbb{N} : \quad p(x) \leq \alpha_p q_{n_p}(x) \quad \forall x \in K \,.$$

Comme K est τ_2-bien basé, il existe $f \in (E, \tau_2)'$, il existe $\lambda_p > 0$ tels que

$$q_{n_p}(x) \leq \lambda_p f(x) \quad \forall x \in K.$$

K est donc τ_1-bien basé. $\square$

Corollaire 4.7. *Soit $K \subset (E, \tau)$ un cône convexe vérifiant la condition (c). On suppose que K est σ-normal mais non bien basé. Alors K ne peut être bien basé pour aucune autre topologie pour laquelle il est séquentiellement complet.*

English extended abstract. Let (E, τ) be a locally convex Hausdorff space. A C-regular cone $K \subset E$, is a cone in which every increasing Cauchy sequence is convergent with respect to the induced topology on K.

Propositions 3.1and 3.2 give properties of relatively bounded maps on C-regular cones. These two propositions applied to a subclass of C-regular cones sharpen a result due to A. O. Bahya.

Let K be a C-regular cone for which 0 has a countable basis of neighborhoods in K. Our Corollary 3.5 shows that, if K is weakly normal and generated by a bounded set, then K is locally bounded. Proposition 3.9 shows that K is well based if and only if K has a bounded base.

Let p be a semi-norm on E. Proposition 3.10 shows that there is $f \in E'$, such that $p(x) \leq f(x)$, for every $x \in K$.

As a corollary we obtain necessary and sufficient conditions for K to be nuclear or well based.

Finally, we use Proposition 3.10 to compare nuclearity and well based property of K with respect distinct topologies. In particular, we show that if K is nuclear (resp. well based) with respect to a topology τ_1 finer than τ, then K is nuclear (resp. well based) with respect to the topology τ.

Let τ_1 be a topology finer than τ and assume K weakly normal with respect to τ_1. Proposition 4.2 shows that if K is nuclear (resp. well based) with respect to the topology τ, then K is nuclear (resp. well based) with respect to the topology τ_1.

We obtain also results for noncomparable topologies (Propositions 4.4 and 4.6).

BIBLIOGRAPHIE

1. A. O. Bahya, *Étude des cônes nucléaires*, Ann. Sci. Math. Québec **15** (1991), 123–133.
2. A. O. Bahya, *Résultats sur des cônes séquentiellement complètement réguliers*, Ann. Sci. Math. Québec **20** (1996), 119–127.

3. A. O. Bahya, *Étude des cônes nucléaires dans les espaces localement convexes séparés*, Thèse de Doctorat d'état. Faculté des Sciences de Rabat (1997).
4. G. Isac, *Cônes localement bornés et cônes complètement réguliers. Applications à l'analyse non linéaire*, Sém. d'analyse moderne, Univ. de Sherbrooke **17** (1980).
5. G. Isac, *Un critére de sommabilité absolue dans les espaces localement convexes ordonnés. Cônes nucléaires*, Mathematica(Cluj) **25** (1983), 159–169.
6. G. Isac, *Sur l'existence de l'optimum de Pareto*, Riv. Mat. Univ. Parma **9** (1983), 303–325.
7. G. Mokobodzki, *Cônes normaux et espaces nucléaires. Cônes semi-complets*, Séminaire Choquet : 1967/68, Initiation à l'analyse, Fasc. 2 : Analyse Fonctionnelle Générale, Exp.B, 1–14.

F. M. EL MOUNIR
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
B.P. 990, NOUAKCHOTT, MAURITANIE
COURRIEL : `fatima@univ-nkc.mr`

M. OUDADESS
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE TAKADDOUM
B.P. 5118, RABAT, MAROC