

ANALYSE ASYMPTOTIQUE POUR DES MODÈLES CINÉTIQUES

CHRISTIAN DOGBÉ

RÉSUMÉ. Le but de cette note est de montrer que lorsque le libre parcours moyen des particules évoluant dans un milieu donné tend vers zéro, les solutions des équations de Boltzmann qui dépendent de trois variables (temps, position, vitesse) tendent vers des solutions d'équations fluides qui ne font plus intervenir que deux variables (temps, position). L'objectif principal consiste à caractériser un régime asymptotique atteint après de nombreux collisions à la manière des limites hydrodynamiques.

ABSTRACT. We show that when the mean free path of a family of particles evolving as a Knudsen gas i.e. a gas when interparticle collisions is small, the Boltzmann equations whose dependent of three variables (time, position, velocity) are limit of solutions of fluides equations which depend of two variables (time, position). Our goal is to characterize an asymptotic regime reached after many collisions as in hydrodynamic limits.

1. Introduction. Le but de cet article est de présenter quelques résultats d'approximation par la diffusion des modèles déterministes réversibles d'équations de transport et des équations de transfert radiatif. Nous démontrons que sous certaines hypothèses, les processus de diffusion sont limites (en un sens que nous préciserons) de processus de transport, quand le libre parcours moyen tend vers 0 ; en d'autres termes, si une particule se meut linéairement dans un milieu où elle subit des chocs aléatoires de la part d'un milieu ambiant, si le libre parcours moyen entre deux chocs est petit devant les dimensions caractéristiques d'observation et si les vitesses après les chocs sont réparties de façon régulière, alors on peut modéliser le déplacement de cette particule par une diffusion.

Notre objectif est triple. Premièrement, nous montrons qu'il est possible de construire une décomposition spectrale complète de l'opérateur $A : (f^+, f^-) \mapsto (\partial_z f^+, -\partial_z f^-)$ définie sur $H = L^2([0, 1] \times \mathbb{T}^2)$ de domaine $D(A) = \{(f^+, f^-) \in H \mid (\partial_z f^+, -\partial_z f^-) \in H, f^+(0, \omega) = f^-(0, T\omega), f^-(1, \omega) = f^+(1, T\omega)\}$.

Deuxièmement, comme conséquence nous obtenons l'équation de diffusion comme limite d'une équation cinétique réversible dans une échelle préalablement définie. Cette limite diffusive provient des particules subissant plusieurs collisions par unité de temps.

Enfin, la troisième partie est consacrée à un problème posé par la physique des plasmas. Elle porte sur l'approximation par la diffusion des équations du transfert

Reçu le 19 novembre 1998 et, sous forme définitive, le 26 juillet 1999.

radiatif dans le cas où le libre parcours moyen de Thompson tend vers 0. Les modèles du transfert radiatif sont fortement non-linéaires. Dans certains cas, il n'est pas possible d'utiliser des développements asymptotiques mais il faut recourir à des méthodes de compacité faisant intervenir des lemmes de moyennes en vitesse. Le résultat le plus général est inspiré du cas de l'opacité dite de Kramers qui semble une approximation acceptable du cas de matériaux totalement ionisés. Dans ce cas on montre la validité de l'approximation par la diffusion de manière uniforme lorsque la température n'est pas bornée inférieurement uniformément, ce qui donne lieu à des valeurs très grandes de l'opacité ; on utilise pour cela des méthodes de compacité basées sur les lemmes de compacité par moyennisation en vitesse dus à [11].

2. Approximation par la diffusion pour des modèles de type gaz de Knudsen. Un gaz de Knudsen est un gaz suffisamment raréfié pour qu'on puisse négliger les collisions entre molécules du gaz ; en revanche on s'intéresse aux collisions entre les molécules de gaz et les parois de l'enceinte qui le contient. La conséquence mathématique est que ces modèles sont linéaires.

Nous nous intéressons à des gaz de Knudsen entre deux plaques planes infinies ; le gaz est considéré comme non collisionnel si la distance entre les plaques est petite devant le libre parcours moyen des molécules. Nous considérons les problèmes de l'approximation par la diffusion pour ces modèles : comme ils sont non collisionnels, la diffusion est produite à grande échelle par les collisions entre les molécules et les parois. Un cadre général pour ce type de problème est la référence [4]. Nous allons étudier deux exemples de ce type de problème :

2.1. Gaz de Knudsen avec loi de réflexion «chaotique». Dans ce problème, la loi de réflexion est modélisée par une transformation chaotique dite «transformation du chat» d'Arnold ; nous étudions ce problème du point de vue de l'analyse spectrale.

2.2. Limite diffusive anormale. Dans les références [5, 10], il est prouvé que les lois de réflexion diffuse usuelles en théorie cinétique des gaz ne rentrent pas dans le cadre des hypothèses générales faites dans [4] par Babovsky-Bardos-Platkowski : on observe que la limite diffusive s'effectue sur une échelle de temps pour laquelle le déplacement carré moyen n'est pas proportionnel au temps (en temps grand) : on dit alors que *la diffusion est anormale*.

Les modèles étudiés dans les références [5, 10] étant purement non collisionnels, nous étudierons dans cet article la prise en compte de collisions rares entre molécules, qui a un effet régularisant pour l'approximation.

3. Structure générale de l'approximation par la diffusion. On part d'un modèle cinétique sous une échelle appropriée, de la forme

$$\partial_t f_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} v \cdot \nabla_x f_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^2} L f_\varepsilon = 0 \quad (3.1)$$

$$f_\varepsilon|_{t=0} = f^{in}(x) \quad (3.2)$$

où L est un opérateur agissant sur la dépendance en v de f_ε , et on distingue deux cas :

1er cas : L est un opérateur de Fredholm positif, autoadjoint, avec $\text{Ker } L$ réduit aux fonctions constantes (en la variable v). De plus, on suppose que $v \perp \text{Ker } L$. Dans

ce cas, Bardos-Santos-Sentis [3] ont montré que f_ε converge fortement vers $f \equiv f(t, x)$, solution de l'équation de diffusion

$$\partial_t f = \frac{1}{2} D \Delta_x f, \quad f_{t=0} = f^{in} \quad (3.3)$$

où D est le coefficient de diffusion donné par la formule

$$D = (\chi|v), \quad L\chi = v, \quad \chi \in \text{Ker } L^\perp. \quad (3.4)$$

2ème cas : L est anti-adjoint, avec 0 valeur propre simple plongée dans le spectre continu de L ; on suppose encore que $\text{Ker } L$ est réduit aux fonctions constantes (en la variable v : ergodicité du groupe engendré par L) et que $v \perp \text{Ker } L$. Dans ce cas, χ défini comme ci-dessus n'existe plus car L n'est pas Fredholm ; mais on peut montrer que la formule qui donne D en fonction de χ garde un sens. Pour cela, on régularise le problème (3.1) en introduisant un paramètre $\sigma > 0$.

$$\partial_t f_\varepsilon^\sigma + \frac{1}{\varepsilon} v \cdot \nabla_x f_\varepsilon^\sigma + \frac{1}{\varepsilon^2} [L f_\varepsilon^\sigma + \sigma(f_\varepsilon^\sigma - \Pi f_\varepsilon^\sigma)] = 0, \quad (3.5)$$

où Π est la projection sur $\text{Ker } L$. À $\sigma > 0$ fixé, on fait un développement formel multi-échelles en ε ; on montre que f_ε^σ converge pour $\varepsilon \rightarrow 0$ vers la solution d'une équation de diffusion de type (3.3) avec D^σ constante de diffusion dépendant de σ ; puis on fait tendre σ vers 0 et on cherche à quelle condition D^σ admet une limite finie strictement positive.

3.1. Développement formel. On écrit un développement asymptotique de $f_\varepsilon^\sigma(t, x, v)$, solution de (3.5) sous la forme

$$f_\varepsilon^\sigma(t, x, v) = f_0^\sigma(t, x) + \varepsilon f_1^\sigma(t, x, v) + \varepsilon^2 f_2^\sigma(t, x, v) + \dots \quad (3.6)$$

Les termes d'ordre $1/\varepsilon^2$ s'annulent car f_0^σ ne dépend pas de v ; les termes d'ordre $1/\varepsilon$ donnent :

$$f_1^\sigma(t, x, v) = -\chi_k^\sigma(v) \partial_{x_k} f_0^\sigma(t, x) \quad (3.7)$$

où

$$(\sigma + L)\chi_k^\sigma = v_k. \quad (3.8)$$

Soit E la résolution spectrale de l'identité associée à L ; on suppose que

$$E(-i\lambda) = E(i\lambda), \quad E(i\lambda) = \delta_{\lambda=0} \Pi + \rho(\lambda) d\lambda \quad (3.9)$$

où ρ est une fonction continue au voisinage de $\lambda = 0$ à valeurs projections orthogonales. La solution de (3.8) est donnée par

$$\chi_k^\sigma(v) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dE(i\lambda) v_k}{\sigma + i\lambda}. \quad (3.10)$$

Cette expression n'a pas de limite pour $\sigma \rightarrow 0$. Formellement, si on projette l'équation (3.5) sur le noyau de L , on trouve

$$\partial_t f_0^\sigma - \partial_{x_l} [(v_l \chi_k^\sigma | 1) \partial_{x_k} f_0] = 0 \quad (3.11)$$

qui est une équation de diffusion avec matrice de diffusion

$$D_{kl}^\sigma = \int_{\mathbb{R}} \frac{(dE(i\lambda)v_k|v_l)}{\sigma + i\lambda} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma(dE(i\lambda)v_k|v_l)}{\sigma^2 + \lambda^2} \quad (3.12)$$

(on change λ en $-\lambda$ et on fait la demi-somme des deux intégrales). Comme $\sigma/(\sigma^2 + \lambda^2)$ converge vers $\pi\delta_{\lambda=0}$ quand $\sigma \rightarrow 0$ et que ρ est continue près de $\lambda = 0$,

$$D_{kl}^\sigma \rightarrow \pi(\rho(0)v_k|v_l). \quad (3.13)$$

3.2. Gaz de Knudsen avec loi de réflexion «chaotique». On considère le modèle suivant (cf [1]) :

$$\partial_t f_\varepsilon^\pm + \frac{1}{\varepsilon} a(\omega) \partial_x f_\varepsilon^\pm \pm \frac{1}{\varepsilon^2} \partial_z f_\varepsilon^\pm = 0 \quad (3.14)$$

dans le domaine défini par $x \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{T}^2$, $0 < z < 1$; f^\pm représentent des densités de particules se réfléchissant entre deux plaques (figure a). Les conditions aux limites (réflexion sur les plaques) sont données par :

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^+(t, x, z=0, \omega) &= f_\varepsilon^-(t, x, z=0, T\omega) \\ \text{et } f_\varepsilon^-(t, x, z=1, \omega) &= f_\varepsilon^+(t, x, z=1, T\omega) \end{aligned} \quad (3.15)$$

et la condition initiale uniforme en ω et z :

$$f_\varepsilon^\pm(0, x, z, \omega) = f^{in}(x). \quad (3.16)$$

On choisit pour T la «transformation du chat» d'Arnold :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2\pi}. \quad (3.17)$$

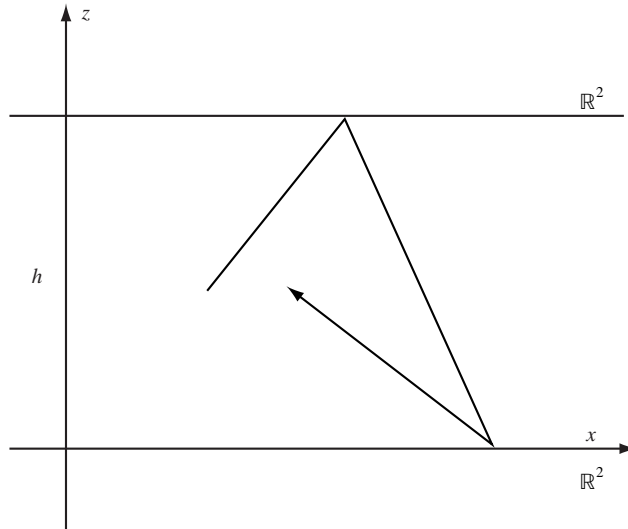


Figure a) Gaz de Knudsen avec loi de réflexion «chaotique»

La discussion précédente montre qu'il est intéressant, pour étudier l'approximation par la diffusion de (3.14), de calculer la résolution de l'identité associée à l'opérateur

$$A : (f^+, f^-) \mapsto (\partial_z f^+, -\partial_z f^-) \quad (3.18)$$

définie sur $H = L^2([0, 1] \times \mathbb{T}^2)$ de domaine

$$\begin{aligned} D(A) = \{ & (f^+, f^-) \in H \mid (\partial_z f^+, -\partial_z f^-) \in H, \\ & f^+(0, \omega) = f^-(0, T\omega), f^-(1, \omega) = f^+(1, T\omega) \}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Il est possible d'arriver aux mêmes résultats, en se plaçant sur une surface riemannienne à courbure négative constante non compacte mais de volume fini. On remplace dans ce cas la transformation T par le flot géodésique et on obtient la diffusion via la dynamique symbolique (cf Dogbe [13]).

3.3. Fonctions propres généralisées. Dans ce paragraphe nous cherchons des fonctions ϕ en $z \in [0, 1]$, à valeurs distributions tempérées en ω , n'appartenant pas forcément à $D(A)$ mais vérifiant les conditions aux limites imposées dans $D(A)$ telles que

$$A\phi = \lambda\phi. \quad (3.20)$$

On note

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'obtention de la fonction ϕ est assurée par la proposition :

Proposition 3.1. 1) Le spectre de l'opérateur A est contenu dans $i\mathbb{R}$.

2) Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}}$ une famille de nombres complexes vérifiant

$$a_{M^2 k} = a_k e^{2i\lambda}. \quad (3.21)$$

Alors le couple $(\phi_+^\lambda, \phi_-^\lambda)$ défini par

$$\phi_+^\lambda(z, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} e^{\lambda z} \sum_{k \neq 0} a_{M^{-1}k} e^{ik \cdot \omega} \quad (3.22)$$

$$\phi_-^\lambda(z, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-\lambda z} \sum_{k \neq 0} a_{Mk} e^{ik \cdot \omega} \quad (3.23)$$

est un vecteur propre généralisé de A pour l'élément du spectre $i\lambda$, λ décrivant \mathbb{R} .

Preuve. Le point 1) vient de ce que A est anti-adjoint dans H . Le point 2) s'obtient par un calcul assez simple. On commence par déterminer le spectre de l'opérateur A . Pour cela, on étudie les valeurs propres du système d'équations :

$$Af = \lambda f, \quad (f \in \mathcal{D}') \quad (3.24)$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \partial_z & 0 \\ 0 & -\partial_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Comme la fonction $f \in \mathcal{D}'$, est développable en série de Fourier convergente dans $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^2)$ on l'écrit sous la forme

$$f_{\pm}(z, \omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} a_k^{\pm}(z) e^{ik\omega}. \quad (3.26)$$

Des équations (3.25) et (3.26), on obtient

$$\exp(ik \cdot T\omega) = \exp(iMk \cdot \omega). \quad (3.27)$$

D'autre part

$$f^+(0, \omega) = f^-(0, T\omega) \implies a_k^-(0) = a_{Mk}^+(0); \quad (3.28)$$

et de manière similaire

$$f^-(h, \omega) = f^+(h, T\omega) \implies a_k^+(h) = a_{Mk}^-(h). \quad (3.29)$$

Une réécriture de l'équation (3.25) entraîne

$$a_k^+(h) = a_k^-(0) e^{-\lambda h}, \quad (3.30)$$

ou encore

$$a_k^-(0) = a_{M^{-1}k}^+(0) e^{\lambda h}. \quad (3.31)$$

Ainsi

$$a_{M^{-1}k}(0) = a_{Mk}^+(0) e^{-2\lambda h} \quad \text{et} \quad a_k(0) = a_{M^2k}^+(0) e^{-2\lambda h}. \quad (3.32)$$

Pour que les coefficients a_k de l'équation (3.26) ne croissent pas exponentiellement, il faut et il suffit que $f \in \mathcal{D}'$; ceci implique $\lambda \in i\mathbb{R}$. On en déduit que le spectre de l'opérateur A est $i\mathbb{R}$ de multiplicité infinie, donnant les orbites de M^2 dans $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ indexées par les fonctions propres, qui est le résultat annoncé.

Pour le point 2), on part du système (3.25) en posant

$$\varphi_{\pm}(z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k \neq 0} \widehat{\varphi}_{\pm}(z, k) e^{ik \cdot \omega}.$$

La transformée inverse de Fourier de φ assure

$$\widehat{\varphi}_+(z, k) = e^{\lambda(z-h)} \widehat{\varphi}_+(h, k) \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi}_-(z, k) = e^{-\lambda(z-h)} \widehat{\varphi}_-(h, k), \quad (3.33)$$

et les conditions aux limites permettent d'obtenir

$$\widehat{\varphi}_-(0, M^{-1}k) = e^{-2\lambda h} \widehat{\varphi}_-(0, Mk), \quad (3.34)$$

ce qui conduit à

$$\widehat{\varphi}_-(0, k) = e^{-2\lambda h} \widehat{\varphi}_-(0, M^2k) \quad \text{et} \quad \widehat{\varphi}_+(0, k) = \widehat{\varphi}_-(0, M^{-1}k). \quad (3.35)$$

On déduit les solutions de l'équation (3.25) dans l'espace $\mathcal{S}'((0, h) \times \mathbb{T}^2)$ données par

$$\phi^{\lambda}(z, \omega) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \neq 0} e^{\lambda z} a_{M^{-1}k} e^{ik \cdot \omega} \\ \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \neq 0} e^{-\lambda z} a_k e^{ik \cdot \omega}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad a_k e^{2\lambda h} = a_{M^2k}$$

qui termine la preuve de la proposition 3.1. \square

3.4. Caractérisation des points sur les orbites. La question naturelle qui se pose à présent est de caractériser les points sur les orbites ; pour cela, on réorganise dans les équations (3.22)-(3.23) les sommes sur $k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ en sommant sur les orbites de l'action sur \mathbb{Z}^2 du groupe cyclique engendré par M^2 , afin d'éliminer la contrainte (3.21) sur la famille (a_k) . Soit $\gamma = \{M^{2n}k \mid n \in \mathbb{Z}\}$ une orbite de $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$; on choisit un exposant particulier n sur γ comme suit. La matrice M admet pour valeurs propres $\lambda_+ = 1 + \theta$ et $\lambda_- = 1/\lambda_+$ avec $\theta = (1 + \sqrt{5})/2$; on note (e_+, e_-) la base orthonormée de vecteurs propres de M définie par

$$e_+ = (1 + \theta^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_- = (1 + \theta^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta \end{pmatrix}.$$

Étant donné une orbite γ , on a la relation $|M^n k \cdot e_+|/|M^n k \cdot e_-| = \lambda_+^{2n}|k \cdot e_+|/|k \cdot e_-|$. On prend $k \in \gamma$ et on définit $n^*(k, \gamma)$ comme le plus petit entier relatif n tel que $\lambda_+^{2n}|k \cdot e_+|/|k \cdot e_-| \geq 1$. On pose $k^*(\gamma) = M^{n^*(k, \gamma)}k$ (qui est indépendant du point k choisi sur l'orbite), cf figure b.

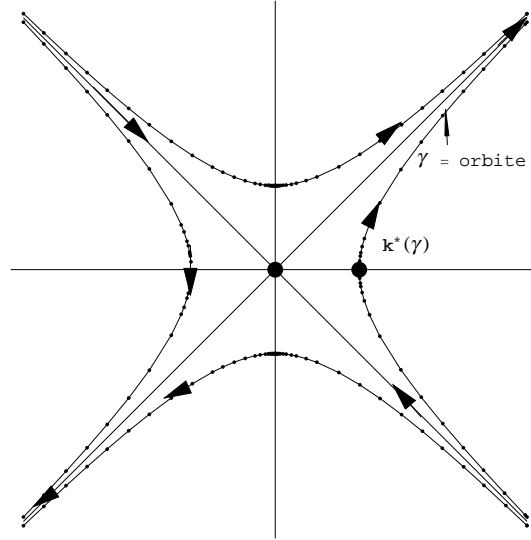


Figure b) Caractérisation des points sur les orbites

On obtient le résultat suivant dont la démonstration est en tout point identique à celle de la proposition 3.1 :

Proposition 3.2. La famille $(\phi_{+, \gamma}^\lambda, \phi_{-, \gamma}^\lambda)$ indexée par les orbites γ de $\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ sous l'action par multiplication à gauche par M^2 , définie par

$$\phi_{+, \gamma}(z, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\lambda z + 2i\lambda n + iM^{2n+1}k^*(\gamma) \cdot \omega} \quad (3.36)$$

$$\phi_{-, \gamma}(z, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i\lambda z + 2i\lambda n + iM^{2n}k^*(\gamma) \cdot \omega} \quad (3.37)$$

est une famille de vecteurs propres généralisés de A pour l'élément du spectre $i\lambda$.

Finalement, la mesure spectrale de l'opérateur A est contenue dans le théorème suivant :

Théorème 3.3. *La décomposition de l'identité associée à l'opérateur A est*

$$dE(i\lambda) = \delta_{\lambda=0} + d\lambda \sum_{\gamma \in M^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} P_{\gamma, \lambda} \quad (3.38)$$

où

$$P_{\gamma, \lambda}(f_+, f_-) = (\langle f_+ | \phi_{+, \gamma}^\lambda \rangle \phi_{+, \gamma}^\lambda; \langle f_- | \phi_{-, \gamma}^\lambda \rangle \phi_{-, \gamma}^\lambda) \quad (3.39)$$

avec la notation

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^2} f(z, \omega) \overline{g(z, \omega)} dz d\omega. \quad (3.40)$$

Pour démontrer ce résultat, on décompose f_\pm sur la famille de fonctions

$$(\delta_z e^{ik \cdot \omega})_{0 < z < 1; k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}}$$

et on applique la formule de Plancherel.

3.5. Limite diffusive anormale. Il convient d'introduire certaines notations. On pose

$$\begin{aligned} \langle \phi \rangle &= \frac{1}{4} \iint_{[-1,1]^2} \phi(\mu, \eta) d\mu d\eta, & \langle \langle \phi \rangle \rangle &= \frac{1}{4} \int_0^1 \iint_{[-1,1]^2} \phi(\mu, \eta) d\mu d\eta dz \\ \langle \phi \rangle_+ &= \frac{1}{4} \iint_{[-1,1]^2} \phi(\mu, \eta) \mathbf{1}_{\eta > 0} d\mu d\eta, & \langle \phi \rangle_- &= \frac{1}{4} \iint_{[-1,1]^2} \phi(\mu, \eta) \mathbf{1}_{\eta < 0} d\mu d\eta, \end{aligned}$$

et on part du modèle suivant de gaz de Knudsen [8] :

$$\rho(\varepsilon) \partial_t f_\varepsilon + \varepsilon \mu \partial_x f_\varepsilon + \eta \partial_z f_\varepsilon + \sigma(\varepsilon) (f_\varepsilon - \langle f_\varepsilon \rangle) = 0 \quad (3.41)$$

où $x \in \mathbb{R}$, $0 < z < 1$, μ et $\eta \in [-1, 1]$, avec les conditions aux limites

$$f_\varepsilon(t, x, 0, \mu, \eta) = \langle \eta f_\varepsilon(t, x, 0, \cdot, \cdot) \rangle_- \text{ et } f_\varepsilon(t, x, 1, \mu, -\eta) = \langle \eta f_\varepsilon(t, x, 1, \cdot, \cdot) \rangle_+ \quad (3.42)$$

et la condition initiale

$$f_\varepsilon(0, x, z, \mu, \eta) = \phi(x). \quad (3.43)$$

Les échelles $\rho(\varepsilon)$ et $\sigma(\varepsilon)$ sont laissées indéterminées pour le moment, car la nature des conditions aux limites fait prévoir des problèmes de diffusion anormale. Il y a deux régimes asymptotiques différents :

- a) le cas collisionnel, où $\sigma > 0$ est indépendant de ε : on est amené à choisir $\rho(\varepsilon) = \varepsilon^2$ ce qui est une limite diffusive classique;
- b) le cas faiblement collisionnel, où $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon |\log \varepsilon|^\alpha$ avec $-1 < \alpha < 0$; on est amené à prendre $\rho(\varepsilon) = \varepsilon^2 |\log \sigma(\varepsilon)|$. Dans ce cas, qui est un exemple de diffusion anormale, le déplacement carré moyen par unité de temps macroscopique tend vers l'infini comme $|\log \sigma(\varepsilon)|$. On obtient le résultat suivant :

Théorème 3.4. *Supposons que $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon |\log \varepsilon|^\alpha$ avec $-1 < \alpha < 0$; choisissons $\rho(\varepsilon) = \varepsilon^2 |\log \sigma(\varepsilon)|$. Supposons que $\phi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors le problème (3.41)–(3.43) admet pour tout $\varepsilon > 0$ une solution faible unique $f_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, 1] \times [-1, 1]^2)$. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $f_\varepsilon \rightarrow f \equiv f(t, x)$ dans L^∞ faible-* où*

$$\partial_t f = \frac{1}{6} \partial_{xx} f, \quad f(0, x) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (3.44)$$

Méthode de démonstration. D'abord on écrit l'équation (3.41) moyennée :

$$\partial_t \langle \langle f_\varepsilon \rangle \rangle + \frac{\varepsilon}{\rho(\varepsilon)} \partial_x \langle \langle \mu f_\varepsilon \rangle \rangle = 0. \quad (3.45)$$

Ensuite, on montre que, sous les hypothèses faites sur $\rho(\varepsilon)$, le terme

$$\frac{\varepsilon}{\rho(\varepsilon)} \langle \langle \mu f_\varepsilon \rangle \rangle \rightarrow \frac{1}{6} \partial_x f \quad (3.46)$$

où f est limite faible-* d'une sous-suite de (f_ε) (qui est uniformément bornée par le principe du maximum). On considère alors l'opérateur

$$L_\sigma \phi(z, \mu, \eta) = \eta \partial_z \phi + \sigma(\phi - \langle \phi \rangle) \quad (3.47)$$

de domaine

$$D(L_\sigma) = \{ \phi \in L^2_{z, \mu, \nu} \mid \eta \partial_z \phi \in L^2_{z, \mu, \nu}, \quad \phi|_{z=0, \eta>0} = \langle \eta \phi | z = 0 \rangle_-, \quad \phi|_{z=1, \eta<0} = \langle \eta \phi | z = 1 \rangle_+ \} \quad (3.48)$$

et on vérifie que L est anti-adjoint. Dans l'approximation par la diffusion classique, on écrit

$$\langle \langle \mu f_\varepsilon \rangle \rangle = \langle \langle (L_\sigma^{-1} \mu) L_\sigma f_\varepsilon \rangle \rangle \quad (3.49)$$

et on exprime

$$L_\sigma f = -\varepsilon \mu \partial_x f_\varepsilon - \rho(\varepsilon) \partial_t f_\varepsilon \quad (3.50)$$

ce qui donne le résultat. \square

Ici, pour tout $\sigma > 0$, $L_\sigma^{-1}(\mu)$ est bien défini, mais n'admet pas de limite finie lorsque $\sigma \rightarrow 0$. Toutefois, comme dans le cadre général, il n'est pas forcément utile que $L_\sigma^{-1}(\mu)$ ait une limite finie pour $\sigma \rightarrow 0$, mais seulement qu'une certaine moyenne de cette fonction converge pour $\sigma \rightarrow 0$. Tout se ramène au résultat suivant :

Lemme 3.5. *Pour σ tendant vers 0, on a les estimations suivantes :*

$$\langle \langle \mu L_\sigma^{-1} \mu \rangle \rangle \sim \frac{1}{6} |\log \sigma|, \quad (3.51)$$

$$\langle \langle |L_\sigma^{-1} \mu| \rangle \rangle = O(|\log \sigma|), \quad (3.52)$$

$$\langle \langle |L_\sigma^{-1} \mu|^2 \rangle \rangle = O(1/\sigma). \quad (3.53)$$

En réalité, on peut montrer que

$$L_\sigma^{-1}\mu = \frac{\mu}{\sigma} \left(1 - e^{\sigma z/\eta}\right), \quad -1 < \eta < 0, \quad (3.54)$$

$$L_\sigma^{-1}\mu = \frac{\mu}{\sigma} \left(1 - e^{\sigma(z-1)/\eta}\right), \quad 0 < \eta < 1. \quad (3.55)$$

Les estimations ci-dessus sont alors très faciles.

Remarque 3.6. Il est intéressant de noter qu'en pratique, on a des conditions aux limites plus compliquées que (3.42). Toutefois, les formules (3.54)-(3.55) ci-dessus donnent toujours la partie singulière en σ de $L_\sigma^{-1}\mu$. En effet, appelons b_σ le membre de droite de (3.54)-(3.55), alors on a

$$L_\sigma(L_\sigma^{-1}\mu - b_\sigma) = 0.$$

Donc, la fonction $L_\sigma^{-1}\mu - b_\sigma$ est constante en la variable z ; on la détermine par un système d'équations intégrales pour les valeurs sur les plaques.

4. Un exemple d'approximation par la diffusion pour un modèle non linéaire : le cas du transfert radiatif.

4.1. Introduction. Lorsque le libre parcours moyen des photons est petit, les équations de transfert radiatif peuvent être approximées par une équation de diffusion angulaire. Pour obtenir cette équation de diffusion on utilise un argument de monotonie. Mais cet argument impose des hypothèses non physiques sur l'opacité. Pour pallier cet inconvénient, nous proposons une étude du comportement de la solution de ces équations par une méthode de compacité.

Le transfert radiatif est une théorie cinétique où les particules sont des photons interagissant au niveau atomique avec un milieu matériel (par exemple un plasma ; typiquement on pourra penser à l'interaction laser matière dans les expériences de fusion par confinement inertiel, ou à des problèmes d'astrophysique) abstraction faite des mouvements hydrodynamiques du milieu. Les équations du transfert radiatif modélisent la cinétique de l'interaction rayonnement-matière sous un certain nombre d'hypothèses physiques simplificatrices : absence de convection et de diffusion thermique dans la matière, et équilibre thermodynamique local. L'hypothèse d'équilibre thermodynamique local signifie que l'on peut définir en tout point une température électronique, et que l'émissivité y est égale au produit de l'émissivité du corps noir à cette température par l'opacité d'absorption ; $q_\nu(T) = \sigma_\nu(T)B_\nu(T)$ où $\sigma_\nu(T)$ est l'opacité du matériau à la température T , aux rayonnements de fréquence ν , et $B_\nu(T)$ est la distribution de Planck (rayonnement du corps noir) donnée par :

$$B_\nu(T) = \frac{C\nu^3}{e^{\nu/T} - 1}, \quad \text{où } C \text{ est déterminée de telle sorte que } \int_0^\infty B_\nu(T)d\nu = T^4.$$

Les inconnues de notre problème sont : d'une part $I \equiv I(t, x, \Omega, \nu)$ l'intensité radiative, c'est-à-dire la densité des photons de fréquence ν ($\nu \in \mathbb{R}^+$) au point x , à l'instant t et animés d'une vitesse de direction Ω dans \mathbf{S}^2 , et d'autre part $T \equiv T(t, x)$ (à un coefficient de proportionnalité près) est la puissance quatrième de la température de la matière au point x , à l'instant $t > 0$; la position des photons varie dans un domaine

X , ouvert borné convexe régulier de \mathbb{R}^3 . Les équations du transfert radiatif s'écrivent alors : (voir Mercier [13], ou Larsen, Pomraning et Badham [12]) :

$$\frac{1}{c} \partial_t I + \Omega \cdot \partial_x I + \sigma_\nu(T)(I - B_\nu(T)) + \kappa(I - \tilde{I}) = 0, \quad (4.1)$$

$$\partial_t \mathcal{E}(T) + \int_0^\infty \int_{S^2} \sigma_\nu(T)(B_\nu(T) - I) d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} = 0, \quad \text{où } \tilde{I} = \int_{S^2} I(\Omega) \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (4.2)$$

La condition aux limites (réflexion spéculaire) est de la forme

$$I(x, \Omega, \nu, t) = I(x, \mathcal{R}_x \Omega, \nu, t) \quad (4.3)$$

où

$$\mathcal{R}_x \Omega = \Omega - 2(\Omega \cdot n_x) n_x, \quad (n_x \text{ est la normale extérieure à } X \text{ en } x \in \partial X). \quad (4.4)$$

Ici, $\mathcal{E}(T)$ est l'énergie interne de la matière (par exemple, pour un gaz parfait, $\mathcal{E}(T) = C(T)$) et κ est la section efficace de dispersion de Thompson. Nous considérerons le problème de Cauchy pour ces équations où x varie dans l'ouvert borné convexe régulier X ; c'est-à-dire que nous imposons une condition initiale :

$$I(x, \nu, \Omega, 0) = I_0(x, \nu); \quad T(x, 0) = T_0(x). \quad (4.5)$$

Pour obtenir l'approximation par la diffusion angulaire (qui est l'analogue de l'approximation par la diffusion pour l'équation de transport), on introduit un petit paramètre $\varepsilon > 0$ et on considère les équations

$$\varepsilon \frac{1}{c} \partial_t I_\varepsilon + \Omega \cdot \partial_x I_\varepsilon + \varepsilon \sigma_\nu(T_\varepsilon)(I_\varepsilon - B_\nu(T_\varepsilon)) + \frac{\kappa}{\varepsilon}(I_\varepsilon - \tilde{I}_\varepsilon) = 0, \quad (4.6)$$

$$\partial_t \mathcal{E}(T_\varepsilon) + \int_0^\infty \int_{S^2} \sigma_\nu(T_\varepsilon)(B_\nu(T_\varepsilon) - I_\varepsilon) d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} = 0. \quad (4.7)$$

La condition aux limites prend la forme

$$I_\varepsilon(x, \Omega, \nu, t) = I_\varepsilon(x, \mathcal{R}_x \Omega, \nu, t). \quad (4.8)$$

Ce changement d'échelle reprend celui de Bardos-Santos-Sentis [3] pour l'équation de transport linéaire ; il est justifié par le fait que dans le régime où κ est grand, on remplace κ par κ/ε et on prend I_ε sensiblement équivalente à \tilde{I}_ε ; ceci permet de faire tendre $\nabla_x \cdot \widetilde{\Omega I_\varepsilon}$ vers 0, supprimant ainsi l'effet avec cette échelle de temps. Toutefois, comme on s'attend à observer un mouvement de diffusion, il y a lieu de changer l'échelle de temps, car la diffusion s'établit en temps long. On introduit donc le changement de variable temporelle en remplaçant t par t/ε donc ∂_t par $\varepsilon \partial_t$ adapté à la diffusion. La condition initiale s'écrit :

$$I_\varepsilon(x, \nu, \Omega, 0) = I_0(x, \nu); \quad T_\varepsilon(x, 0) = T_0(x). \quad (4.9)$$

Remarquons que $I|_{t=0}$ est indépendant de Ω , car le système est consistant à $t = 0$ avec le fait que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $I_\varepsilon - \tilde{I}_\varepsilon \rightarrow 0$, sinon il y aura une couche initiale.

Le paramètre ε représente le rapport du libre parcours moyen des photons pour le phénomène de dispersion de Thompson à la taille du domaine X . L'approximation par la diffusion angulaire consiste à étudier le comportement asymptotique de (4.6)–(4.8) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Formellement, on trouve alors que

$$T_\varepsilon \rightarrow \theta, \quad I_\varepsilon \rightarrow J \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0$$

où (θ, J) est la solution du système d'équations de diffusion angulaire

$$\frac{1}{c} \partial_t J - \nabla \cdot \frac{1}{3\kappa} \nabla J + \sigma_\nu(\theta)(J - B_\nu(\theta)) = 0 \quad (4.10)$$

$$\partial_t \mathcal{E}(\theta) + \int_0^\infty \sigma_\nu(\theta)(B_\nu(\theta) - J) d\nu = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial J}{\partial n} = 0, \quad (\text{condition de Neumann}) \quad (4.12)$$

$$J(x, \nu, 0) = I_0(x, \nu); \quad T(x, 0) = T_0(x). \quad (4.13)$$

On se propose de prouver dans cette section deux théorèmes. Le premier par des hypothèses de monotonie et le second par une méthode de compacité.

4.2. La diffusion par la méthode d'accrétivité. La diffusion est donnée par le résultat suivant :

Théorème 4.1. *Soit I_0, \mathcal{E}_0 de classe \mathcal{C}^4 par rapport à x et appartenant à $L^1(X \times \mathbb{R}^{*+})$, et à $L^1(X)$ respectivement. On suppose que : pour presque tout $\nu > 0$, $T \mapsto \sigma_\nu(T)$ est continue strictement décroissante à valeurs dans \mathbb{R}^{*+} ; pour tout $T > 0$, $\nu \mapsto \sigma_\nu(T)$ est borélienne; pour presque tout $\nu > 0$, $T \mapsto \sigma_\nu(T)B_\nu(T)$ est croissante, continue sur \mathbb{R}^+ , et $\sigma_\nu(T)B_\nu(T) \rightarrow 0$ lorsque $T \rightarrow 0^+$; l'application $T \mapsto \mathcal{E}(T)$ est continue, strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , $\mathcal{E}(0) = 0$, $\mathcal{E}(T) \rightarrow +\infty$ lorsque $T \rightarrow +\infty$. Alors la solution $(I_\varepsilon, \mathcal{E}(T_\varepsilon))$ du système (4.6)–(4.9) converge dans $L^1(X \times S^2 \times \mathbb{R}^+) \times L^1(X)$ vers $(J, \mathcal{E}(\theta))$ solution de l'équation de diffusion (4.10)–(4.13).*

Preuve. Dans les équations (4.6)–(4.8) on remplace I_ε par

$$J_\varepsilon = J + \varepsilon I_1 + \varepsilon^2 I_2 \quad (4.14)$$

et T_ε par

$$T_\varepsilon = \theta \quad (4.15)$$

où (J, θ) est la solution de (4.10)–(4.13) et où

$$I_1 = -\frac{1}{\kappa} \Omega \cdot \nabla_x J, \quad (4.16)$$

$$I_2 = -\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 (\Omega \cdot \nabla_x)^2 J - \frac{\sigma_\nu(\theta)}{\kappa} (J - B_\nu(\theta)) - \frac{1}{c\kappa} \partial_t J. \quad (4.17)$$

Clairement $\tilde{I}_1 = 0$ et l'équation (4.8) exprime que $\tilde{I}_2 = 0$. D'une part, dans $X \times S^2 \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \partial_t (I_\varepsilon - J_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \Omega \cdot \nabla_x (I_\varepsilon - J_\varepsilon) + \frac{\kappa}{\varepsilon^2} [(I_\varepsilon - J_\varepsilon) - (\tilde{I}_\varepsilon - \tilde{J}_\varepsilon)] \\ & \quad + \sigma_\nu(T_\varepsilon)(I_\varepsilon - B_\nu(T_\varepsilon)) - \sigma_\nu(\theta)(J_\varepsilon - B_\nu(\theta)) \\ & = -\left[\frac{\varepsilon^2}{c} \partial_t I_2 + \frac{\varepsilon}{c} \partial_t I_1 + \varepsilon \Omega \cdot \nabla I_2 + \sigma_\nu(\theta)(\varepsilon I_1 + \varepsilon^2 I_2) \right], \quad (4.18) \end{aligned}$$

et

$$\partial_t [\mathcal{E}(T_\varepsilon) - \mathcal{E}(\theta)] + \int_0^\infty \sigma_\nu(T_\varepsilon)(B_\nu(T_\varepsilon) - \tilde{I}_\varepsilon) d\nu - \int_0^\infty \sigma_\nu(\theta)(B_\nu(\theta) - \tilde{J}_\varepsilon) d\nu = 0. \quad (4.19)$$

On pose ensuite

$$R_\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{c} \partial_t I_2 + \frac{\varepsilon}{c} \partial_t I_1 + \varepsilon \Omega \cdot \nabla I_2 + \sigma_\nu(\theta)(\varepsilon I_1 + \varepsilon^2 I_2), \quad (4.20)$$

et on utilise le fait que les solutions de (4.10)–(4.13) sont régulières. Ceci conduit à

$$\sup_{[0,t]} \|R_\varepsilon\|_{L^1_{x,\Omega,\nu}} \leq C_t \varepsilon. \quad (4.21)$$

Enfin pour $t = 0$, on a

$$I_\varepsilon - J_\varepsilon = \varepsilon(I_1 - \varepsilon I_2) = C\varepsilon.$$

D'autre part

$$(I_\varepsilon - J_\varepsilon)(t, x, \Omega, \nu) - (I_\varepsilon - J_\varepsilon)(t, x, \mathcal{R}_x \Omega, \nu) = \varepsilon^2 I_2(t, x, \mathcal{R}_x \Omega, \nu) - \varepsilon^2 I_2(t, x, \Omega, \nu) \quad (4.22)$$

car J est indépendante de Ω , et

$$I_1(t, x, \mathcal{R}_x \Omega, \nu) - I_1(t, x, \Omega, \nu) = \frac{1}{\kappa} 2(\Omega \cdot n_x) \frac{\partial J}{\partial n} = 0. \quad (4.23)$$

Comme $n_x \cdot \nabla_x I_0 = \partial_n I_0 = 0$, on obtient

$$I_1(t, x, \mathcal{R}_x \Omega, \nu) - I_1(t, x, \Omega, \nu) = 0. \quad (4.24)$$

On utilise ensuite des propriétés de type L^1 -accrétivité. On introduit les espaces

$$E = L^1(X \times S^2 \times \mathbb{R}^{**}) \times L^1(X), \quad (4.25)$$

$$E^+ = \{(I, T) \in E : T \geq 0, I \geq 0\}, \quad (4.26)$$

et les opérateurs

$$\mathcal{A}(I, T) = (\Omega \cdot \nabla_x I + \kappa(I - T), 0) \quad (4.27)$$

$$\mathcal{B}(I, T) = \left(\sigma_\nu(T)(I - B_\nu(T)) : \int_0^\infty \int_{S^2} \sigma_\nu(T)(B_\nu(T) - I) d\nu \frac{d\Omega}{4\pi} \right) \quad (4.28)$$

de domaine

$$D = \{(I, T) \in E^+ : \sigma_\nu(T)I \in L^1(X \times S^2 \times \mathbb{R}^{**})\}. \quad (4.29)$$

Compte tenu des hypothèses d'accrétivité du théorème 4.1, pour tous couples (I, T) , $(I' T') \in D^2(\mathcal{B})$, en particulier avec $I = I_\varepsilon$, on a le résultat suivant :

$$\langle \Omega \cdot \nabla_x (I - I') \operatorname{sgn}^+(I - I') \rangle = \langle \Omega \cdot \nabla_x (I - I')^+ \rangle \geq 0;$$

où on a utilisé la notation

$$\langle g \rangle = \iiint_{X \times S^2 \times \mathbb{R}^{+*}} g \frac{dx d\Omega}{4\pi} d\nu, \quad \text{pour } g \in L^1(X \times S^2 \times \mathbb{R}^{+*});$$

c'est-à-dire que l'opérateur $T \rightarrow \sigma_\nu(T)B_\nu(T)$ continu de $L^1(T)$ dans $L^1(X \times S^2 \times \mathbb{R}^{+*})$ est T -accréatif. En effet avec

$$\varphi = \text{sgn}^+(T - T') \quad \text{et} \quad \psi = \text{sgn}^+(I - I')$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{sgn}^+ \alpha = 1 \iff \alpha > 0, \quad \text{et} \quad \text{sgn}^+ \alpha = 0 \iff \alpha \leq 0$$

on a

$$\begin{aligned} & \langle [\sigma_\nu(T)B_\nu(T) - \sigma_\nu(T')I - (\sigma_\nu(T')B_\nu(T') - \sigma_\nu(T')I')] \varphi \rangle \\ & \quad - \langle [\sigma_\nu(T)I - \sigma_\nu(T)B_\nu(T) - (\sigma_\nu(T')I' - \sigma_\nu(T')B_\nu(T'))] \psi \rangle \\ & = \langle [\sigma_\nu(T)B_\nu(T) - \sigma_\nu(T')B_\nu(T')] (\varphi - \psi) \rangle + \langle [\sigma_\nu(T)I - \sigma_\nu(T')I'] (\psi - \varphi) \rangle. \end{aligned}$$

Avec la décroissance de $\sigma_\nu(T)$ et la croissance de $\sigma_\nu(T)B_\nu(T)$, on obtient

$$\begin{aligned} & \langle [\sigma_\nu(T)B_\nu(T) - \sigma_\nu(T')B_\nu(T')] (\varphi - \psi) \rangle + \langle [\sigma_\nu(T)I - \sigma_\nu(T')I'] (\psi - \varphi) \rangle \\ & = \langle [\sigma_\nu(T)B_\nu(T) - \sigma_\nu(T')B_\nu(T')]^+ - (\sigma_\nu(T)B_\nu(T) - \sigma_\nu(T')B_\nu(T')) \psi \rangle \\ & \quad + \langle \sigma_\nu(T) [(I - I')^+ - (I - I') \varphi] \rangle \\ & \quad + \langle I' [(\sigma_\nu(T) - \sigma_\nu(T')) \psi - (\sigma_\nu(T) - \sigma_\nu(T'))^-] \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ensuite on multiplie (4.19) par $\text{sgn}^+(T_\varepsilon - \theta)$ et (4.18) par $\text{sgn}^+(I_\varepsilon - J_\varepsilon)$ et on additionne.

Comme on a

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega \times S^2} \left[\frac{\kappa}{\varepsilon^2} ((I_\varepsilon - J_\varepsilon)) - (\tilde{I}_\varepsilon - \tilde{J}_\varepsilon) + \sigma_\nu(I_\varepsilon - B_\nu(T_\varepsilon)) - \sigma_\nu(\theta)(I_\varepsilon - B_\nu(\theta)) \right] \text{sgn}^+(I_\varepsilon - J_\varepsilon) dt d\Omega d\nu \\ & + \left(\int_0^\infty \sigma_\nu(T_\varepsilon)(B_\nu(T_\varepsilon) - \tilde{I}_\varepsilon) d\nu - \int_0^\infty \sigma_\nu(\theta)(B_\nu(\theta) - \tilde{J}_\varepsilon) d\nu \right) \text{sgn}^+(T_\varepsilon - \theta) \geq 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \langle \text{sgn}^+(I_\varepsilon - J_\varepsilon) \rangle + \frac{d}{dt} \langle (\mathcal{E}(T_\varepsilon) - \mathcal{E}(\theta)) \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle (\Omega \nabla_x \text{sgn}^+(I_\varepsilon - J_\varepsilon)) \rangle \\ & \leq \langle R_\varepsilon \text{sgn}^+(I_\varepsilon - J_\varepsilon) \rangle. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ensuite

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial X \times S^2} \Omega \cdot n \left[\text{sgn}^+(I_\varepsilon - J_\varepsilon) \right] d\sigma d\Omega \right| \\ & = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial X \times S^2 \cap \Omega \cdot n > 0} \Omega \cdot n \left[\text{sgn}^+(I_\varepsilon(\Omega) - J_\varepsilon(\Omega)) - \text{sgn}^+(I_\varepsilon(\mathcal{R}_x \Omega) - J_\varepsilon(\mathcal{R}_x \Omega)) \right] d\sigma d\Omega \right| \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega \cdot n > 0} \Omega \cdot n \left| [(I_\varepsilon - J_\varepsilon) - (I_\varepsilon - J_\varepsilon)(\mathcal{R}_x \Omega)] \right| \\ & \leq \varepsilon \int_{\Omega \cdot n > 0} 2 \cdot |I_2| d\sigma d\Omega. \end{aligned} \quad (4.33)$$

On combine (4.31) et (4.33), on intègre de 0 à t et on utilise la relation (4.22) pour obtenir l'estimation

$$\begin{aligned} \|(I_\varepsilon - J_\varepsilon)^+\|_t + \|\mathcal{E}(T_\varepsilon)(t, \cdot) - \mathcal{E}(\theta)(t, \cdot)\|_t &\leq \|I_0 - J_0\|_{L^1_{x,\Omega,\nu}} + \|T_0 - \mathcal{E}_0\|_{L^1_x} \\ &+ \int_0^t \|R_\varepsilon\|_{L^1_{x,\Omega,\nu}}(s) ds + 2\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega \cdot n > 0} |I_2| ds d\sigma d\Omega \end{aligned} \quad (4.34)$$

où R_ε est défini par (4.20). On utilise les inégalités (4.21) et (4.33) pour conclure. Mais comme (4.21) ne dépend que de ε et de la condition initiale, on obtient à l'instant $t = 0$,

$$\|I_\varepsilon(t, \cdot, \cdot, \cdot) - J_\varepsilon(t, \cdot, \cdot, \cdot)\|_{L^1_{x,\Omega,\nu}} + \|\mathcal{E}(T_\varepsilon)(t, \cdot) - \mathcal{E}(\theta)(t, \cdot)\|_{L^1_x} \leq C_t \varepsilon t \quad (4.35)$$

qui termine la démonstration du théorème 4.1. \square

4.3. La diffusion par la méthode de compacité. Les hypothèses de monotonie faites ci-dessus sont physiquement peu réalistes ; ceci amène à faire des hypothèses plus faibles et à employer des méthodes de compacité basées sur les lemmes de compacité par moyennisation en vitesse dus à Golse-Lions-Perthame-Sentis [11]. Par cette méthode, il est un peu plus difficile de traiter le problème d'évolution ; on le remplace alors par une discrétisation implicite en temps et on note $\lambda = 1/\Delta t$. On considère alors le système d'équations

$$\lambda I_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \Omega \cdot \nabla_x I_\varepsilon + \sigma_\nu(T_\varepsilon)(I_\varepsilon - B_\nu(T_\varepsilon)) + \frac{\kappa}{\varepsilon^2} (I_\varepsilon - \tilde{I}_\varepsilon) = \lambda I^*, \quad (4.36)$$

$$\lambda \mathcal{E}(T_\varepsilon) + \int_0^\infty \sigma_\nu(T_\varepsilon) B_\nu(T_\varepsilon) d\nu - \int_0^\infty \sigma_\nu(T_\varepsilon) \tilde{I}_\varepsilon d\nu = \lambda \mathcal{E}(T^*), \quad (4.37)$$

$$I_\varepsilon(x, \Omega, \nu) = I_\varepsilon(x, \mathcal{R}_x \Omega, \nu). \quad (4.38)$$

La diffusion dans ce cas est assurée par le résultat suivant :

Théorème 4.2. *On suppose que $\sigma_\nu B_\nu$ est bornée pour $k \leq T \leq K$; pour p.p. $\nu \geq 0$, $T \mapsto \sigma_\nu(T)$, $T \mapsto \sigma_\nu(T) B_\nu(T)$ sont uniformément continues relativement à ν ; on suppose $0 \leq I_0(x, \nu) \leq B_\nu(T^*)$ sur $X \times \mathbb{R}^{+*}$, et $0 \leq T_0 \leq T^*$ sur X . $\mathcal{E}(T)$ est strictement croissante, $\forall \nu \in \mathbb{R}^{+*}$, σ_ν est strictement décroissante. De plus $T \mapsto \int_0^\infty \sigma_\nu(T) B_\nu(T) d\nu$ est croissante. Enfin à toute fonction u vérifiant $B_\nu(k) \leq u \leq B_\nu(K)$; $u \equiv u(\nu)$, on suppose que l'application F_u définie par*

$$\begin{cases} F_u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ T : \mapsto \lambda \mathcal{E}(T) + \int_0^\infty \sigma_\nu(T) B_\nu(T) d\nu - \int_0^\infty \sigma_\nu(T) u d\nu \end{cases}$$

est bijective et strictement croissante de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ . Soit $(I_\varepsilon, T_\varepsilon)$ la solution de (4.36)–(4.38). Alors on peut extraire de $(I_\varepsilon, T_\varepsilon)$ une sous-suite encore notée $(I_\varepsilon, T_\varepsilon)$ telle que $I_\varepsilon \rightharpoonup I$ dans $L^1_{loc}(X \times \mathbb{R})$ et $T_\varepsilon \rightharpoonup T$ dans $L^p_{loc}(X)$, $\forall 1 \leq p < +\infty$ et (I, T) est solution de

$$\lambda I - \nabla \cdot \frac{1}{3\kappa} \nabla I + \sigma_\nu(T)(I - B_\nu(T)) = \lambda \tilde{I}^*, \quad (4.39)$$

$$\lambda \mathcal{E}(T) + \int_0^\infty \sigma_\nu(T)(I - B_\nu(T)) d\nu = \lambda \mathcal{E}(T^*), \quad (4.40)$$

$$I(x, \Omega, \nu) = I(x, \mathcal{R}_x \Omega, \nu). \quad (4.41)$$

Remarque 4.3. Il est intéressant de remarquer que les hypothèses faites dans le théorème 4.2, sont compatibles avec l'opacité de Kramer $\sigma_\nu(T) = (1 - e^{-\nu/T})/(\sqrt{T}\nu^3)$ puisque $\sigma_\nu(T)$ est décroissante en T pour tout ν . De plus

$$\int_0^\infty \sigma_\nu(T) B_\nu(T) d\nu = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^\infty e^{-\nu/T} d\nu = \sqrt{T}$$

est croissante en T .

Le théorème 4.2 se démontre via la proposition ci-après qui est un résultat d'existence de solutions à $\varepsilon > 0$ fixé utilisant le principe du maximum et la compacité par lemme de moyennisation, dû à Bardos-Golse-Perthame-Sentis [2].

Proposition 4.4. *On fait les hypothèses suivantes :*

- pour tout T , $\nu \rightarrow \sigma_\nu(T)$ est une fonction mesurable presque partout positive ;*
- pour tout T , $\nu \rightarrow B_\nu(T)$ est positive et intégrable ;*
- pour tout ν , $T \rightarrow \sigma_\nu(T) B_\nu(T)$ est une fonction continue de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+ tendant vers 0 lorsque $T \rightarrow 0^+$.*

Enfin on suppose que $\mathcal{E}(T)$ est continue sur \mathbb{R}^+ . Alors il existe à $\varepsilon > 0$ fixé, un couple $(I_\varepsilon, T_\varepsilon)$ solution du système (4.36)–(4.38) définie dans $L^1(X \times S^2 \times \mathbb{R}^+) \cap L^\infty(X \times S^2 \times \mathbb{R}^+)$. Supposons en outre qu'il existe $k, K > 0$ tels que :

$$k \leq T^* \leq K \text{ et } B_\nu(k) \leq I^* \leq B_\nu(K) \implies k \leq T_\varepsilon \leq K \text{ et } B_\nu(k) \leq I_\varepsilon \leq B_\nu(K), \\ \forall \varepsilon > 0.$$

Alors $I_\varepsilon \rightarrow I$, et $T_\varepsilon \rightarrow T$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ pour la topologie faible sur $L^\infty(X \times \Omega \times \mathbb{R}^+)$.*

Méthode de démonstration du théorème 4.2.

- 1) pour toute fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_*^+)$, on a au sens de la convergence forte dans $L^2(X)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \chi(\nu) \tilde{I}_\varepsilon d\nu = \int \chi(\nu) I d\nu$;
- 2) \tilde{I}_ε est relativement compacte dans $L_{loc}^1(X \times \mathbb{R}^+) = L^1(\mathbb{R}^+ ; L^1(X))$;
- 3) on montre que $T_\varepsilon \rightarrow T$ dans $L_{loc}^p(X)$, $\forall 1 \leq p < +\infty$, ce qui permet de passer à la limite sans difficulté dans l'équation (4.37).
- 4) enfin, on prend la moyenne par rapport à Ω de l'équation. (4.36), on fait tendre ε vers 0 et on montre que (4.36) converge vers $\lambda I - \nabla_x \cdot 1 / (3\kappa) \nabla_x I + \sigma_\nu(T)(I - B_\nu(T)) = \lambda \tilde{I}^*$. \square

Remerciements. L'auteur remercie les professeurs C. Bardos, Y. Brenier, F. Golse, R. Sentis, Y. Sone et S. Ukai pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

English extended abstract. From a physical point of view, the diffusion approximation has been studied or used by many authors. However, one could wish to have more rigorous mathematical justifications of this theory. One possible mathematical approach to the diffusion approximation relies on an asymptotic expansion of the Boltzmann equation in powers of the mean free path. This procedure has been justified by Larsen-Keller, Bensoussan, Lions, Bardos, Golse, Sentis *et al.* This paper is devoted to the study of the diffusion approximation by mathematical means. The methods employed are powerful enough to handle problems which could not be treated previously.

The numerotation in this section is referring to the French version.

The motivation of this paper is threefold. First, we prove that one can use the generalized eigenfunctions to obtain a spectral decomposition of the operator A defined by Eqs. (3.18)-(3.19). This operator appears in a Knudsen gas equation of the form $\partial_t f^\pm + ca(\omega) \cdot \nabla_x f^\pm \pm c\partial_z f^\pm = 0$, $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$, $0 < z < h$, $\omega \in \mathbb{T}^2$, where f^\pm represents the density of particles hit between two horizontal plates with adapted boundary conditions. Our result can be stated in the form of the following theorem.

Theorem 5.1. *Let E be the spectral resolution of the identity associated to the operator A , and $(\phi_{+, \gamma}^\lambda, \phi_{-, \gamma}^\lambda)$ a generalized eigenfunction of A . The spectral decomposition of A is written as*

$$dE(i\lambda) = \delta_{\lambda=0} + d\lambda \sum_{\gamma \in M^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} P_{\gamma, \lambda}$$

where

$$P_{\gamma, \lambda}(f_+, f_-) = (\langle f_+ | \phi_{+, \gamma}^\lambda \rangle \langle \phi_{+, \gamma}^\lambda | ; \langle f_- | \phi_{-, \gamma}^\lambda \rangle \langle \phi_{-, \gamma}^\lambda |)$$

with the notation

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^2} f(z, \omega) \overline{g(z, \omega)} dz d\omega.$$

Secondly, as an illustration of applicability of the above result, the diffusion equation is obtained with a convenient scaling from a reversible kinetic equation produced by the collision of particles with the boundary. We show how a rough boundary described by a diffusive boundary condition may generate a diffusion process in a fluid. Our proof relies entirely on functional analysis. We prove that the evolution of the density of a free molecular flow in thin channels bounded by parallel plane surfaces is described by a diffusion equation, on a time scale of $\rho(\varepsilon) \sim \varepsilon^2 |\log \varepsilon^2|$ in the limit as the distance between the plates tends to 0. This can be stated in the form:

Theorem 5.2. *Let $\sigma > 0$ fixed and $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Then*

- 1) *for any $\varepsilon > 0$, the system (3.25) has a unique distributional solution $f_\varepsilon \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times [0, h] \times [-1, 1] \times [-1, 1])$;*
- 2) *$f_\varepsilon \rightarrow f$ in weak $*$ $L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times [0, h] \times [-1, 1] \times [-1, 1])$ as $\varepsilon \rightarrow 0$, and in $L^\infty(\mathbb{R}^+ ; L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times [0, h] \times [-1, 1] \times [-1, 1]))$.*
- 3) *Let $\sigma > 0$ fixed and $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Assume that $\rho(\varepsilon) = \varepsilon^2$. Then the system (3.25) has, for all $\varepsilon > 0$, a unique solution $f_\varepsilon \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times [0, h] \times [-1, 1] \times [-1, 1])$ with the following behavior as $\varepsilon \rightarrow 0$: $f_\varepsilon \rightarrow f$ in weak $-*$ $L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times [0, h] \times [-1, 1] \times [-1, 1])$ as $\varepsilon \rightarrow 0$, where f is a solution of (anomalous) diffusion equation.*
- 4) *Assume that $\sigma = \varepsilon |\log \varepsilon|^\alpha$, $\alpha \in]-1, 0[$, $\rho(\varepsilon) = \varepsilon^2 |\log \sigma(\varepsilon)|$. Then the system (3.25) has, for all $\varepsilon > 0$, a unique solution $f_\varepsilon \in L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times [0, h] \times [-1, 1] \times [-1, 1])$ with the following behavior as $\varepsilon \rightarrow 0$: $f_\varepsilon \rightarrow f$ in weak $*$ $L^2 \cap L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times [0, h] \times [-1, 1] \times [-1, 1])$ as $\varepsilon \rightarrow 0$, where f is a solution of diffusion equation.*

Lastly, we give a result concerning the relation between the kinetic and macroscopic equations. The equations described below are classical in astrophysics and represent

the evolution of stellar atmosphere in the absence of hydrodynamical motion or heat conduction. The photons are ruled by a classical equation involving terms describing the absorption and emission. The first mathematical approach of this problem can be found in Mercier [13] (where no proofs were given). The equations of radiative transfer are given by Eqs. (4.1)-(4.3). We prove

Theorem 5.3. *Let I_0, \mathcal{E}_0 of class C^4 with respect to x and belong to $L^1(X \times \mathbb{R}^{+*})$, and $L^1(X)$ respectively. Assume that: for a.e. $\nu > 0$, $\sigma_\nu(T)$ is continuous and non-increasing in T with values in \mathbb{R}^{+*} ; and for all $T > 0$, $\nu \mapsto \sigma_\nu(T)$ is measurable in ν . For a.e. $\nu > 0$, $\sigma_\nu B_\nu$ is non-decreasing, continuous on \mathbb{R}^+ , $\sigma_\nu(T)B_\nu(T) \rightarrow 0$, as $T \rightarrow 0^+$ and $\mathcal{E}(T)$ is continuous and non-decreasing on \mathbb{R}^+ , $\mathcal{E}(0) = 0$, $\mathcal{E}(T) \rightarrow +\infty$ as $T \rightarrow +\infty$. Then the solution $(I_\varepsilon, \mathcal{E}(T_\varepsilon))$ of the system (4.6)-(4.7)-(4.8) converges in $L^1(X) \times L^1(X \times S^2 \times \mathbb{R}^+)$ to $(J, \mathcal{E}(\theta))$, solution of the diffusion equation*

$$\frac{1}{c} \partial_t J - \nabla \cdot \frac{1}{3\kappa} \nabla J + \sigma_\nu(\theta)(J - B_\nu(\theta)) = 0$$

$$\partial_t \mathcal{E}(\theta) + \int_0^\infty \sigma_\nu(\theta)(B_\nu(\theta) - J) d\nu = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial n} = 0, \quad (\text{Neumann's condition})$$

$$J(x, \nu, 0) = I_0(x, \nu); \quad T(x, 0) = T_0(x).$$

The assumptions in Theorem 5.3 impose some conditions on the opacity (the term σ in the Eq. (4.1)). To overcome this inconvenient, we purpose to study the solution of the radiative transfer equation by compactness techniques. Now we have

Theorem 5.4. *Assume that $\sigma_\nu B_\nu$ is bounded for $k \leq T \leq K$.*

For a.e. ν , $\sigma_\nu(T)$, $B_\nu(T)$ $\sigma_\nu(T)B_\nu(T)$ are uniformly continuous with respect to ν .

Futhermore, $\int_0^\infty \sigma_\nu(T)B_\nu(T) d\nu = 1/\sqrt{T} \int_0^\infty e^{-\nu/T} d\nu = \sqrt{T}$ is non-decreasing in T .

$0 \leq I_0(x, \nu) \leq B_\nu(T^)$ on $X \times \mathbb{R}_+^*$, and $0 \leq T_0 \leq T^*$ on X . The map $T \mapsto \mathcal{E}(T)$ is strictly non-decreasing, $\forall \nu \in \mathbb{R}^{+*}$, σ_ν is strictly decreasing. Then the family of the solution $(I_\varepsilon, T_\varepsilon)$ of (4.6)-(4.7)-(4.8) converge in L^∞ weak-* to (I, T) solution of*

$$\lambda I - \nabla \cdot \frac{1}{3\kappa} \nabla I + \sigma_\nu(T)(I - B_\nu(T)) = \lambda \tilde{I}^*$$

$$\lambda \mathcal{E}(T) + \int_0^\infty \sigma_\nu(T)(I - B_\nu(T)) d\nu = \lambda \mathcal{E}(T^*)$$

$$I(x, \Omega, \nu) = I(x, \mathcal{R}_x \Omega, \nu).$$

The reader will refer to the French version for motivation of this work.

Best thanks to the anonymous referees for the valuable remarks and suggestions.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Bardos, F. Golse et J.-F. Colonna, *Diffusion approximation and hyperbolic automorphisms of the torus*, Phys. D. **104** (1997), 32–60.
2. C. Bardos, F. Golse, B. Perthame et R. Sentis, *The nonaccretive radiative transfer equations: existence of solutions and Rosseland approximation*, J. Funct. Anal. **77** (1988), 434–464.
3. C. Bardos, C. Santos et R. Sentis, *Diffusion approximation and computation of the critical size*, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 617–649.
4. C. Babovsky, C. Bardos et T. Platkowski, *Diffusion approximation for a Knudsen gas in a thin domain with accommodation at the boundary*, Asymptotic Anal. **3** (1991), 265–289.
5. C. Börgers, C. Greengard et E. Thomann, *The diffusion limit of free molecular flow in thin plane channels*, SIAM J. Appl. Math. **52** (1992), 1057–1075.
6. A. Bensoussan, J.-L. Lions et G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Studies in Mathematics and its Applications, vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
7. C. Dogbe, *Exemples d'approximation par la diffusion pour les équations cinétiques*, Thèse de doctorat de l'Université Paris VII (1998).
8. C. Dogbe, *Diffusion Anormale pour le Gaz de Knudsen*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **326** (1998), 1025–1030.
9. C. Dogbe, *Asymptotic behaviour for the Liouville Equations*, J. Statis. Phys. **99** (2000), 873–902.
10. F. Golse, *Anomalous diffusion limit for the Knudsen gas*, Asymptot. Anal. **17** (1998), 1–12.
11. F. Golse, J.-L. Lions, B. Perthame et R. Sentis, *Regularity of the moments of the solution of a transport equation*, J. Funct. Anal. **76** (1988), 110–125.
12. E. W. Larsen, G. C. Pomraning et V. C. Badham, *Asymptotic analysis of radiative transfer problem*, J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer **29** (1983), 285–310.
13. B. Mercier, *Influence de la troncature de l'opacité au voisinage de $\nu = 0$ en relaxation rayonnement-matière*, Note CEA 2387 (France) (Jan. 1984).

C. DOGBE

UNIVERSITÉ PARIS VII

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

2 PLACE JUSSIEU, CASE 7012

75251 PARIS CEDEX 05 FRANCE

COURRIEL : dogbe@math.jussieu.fr