Ann. Sci. Math. Québec **24** (2000), no. 1, 19–31.

SUR LA DÉRIVATION DANS CERTAINS ANNEAUX QUOTIENTS DE $\mathbf{R}[x]$

PAUL DEGUIRE ET CLAUDE GAUTHIER

RÉSUMÉ. Nous définissons la dérivée de fonctions dont le domaine et l'image sont formés de nombres pouvant être identifiés à des classes d'équivalence de certains anneaux quotients de $\mathbf{R}[x]$. Nous en déduisons une condition nécessaire et suffisante pour que de telles fonctions soient holomorphes dans le sens de cette dérivation. Ceci nous permet de caractériser des fonctions qui généralisent les fonctions harmoniques. Dans ce contexte, nous résolvons une généralisation de l'équation des ondes à deux dimensions.

ABSTRACT. We define the derivative of functions whose domain of definition and range are sets of numbers which can be identified to equivalence classes of quotient rings of $\mathbf{R}[x]$. A necessary and sufficient condition for such functions to be holomorphic in the sense of this derivation follows. This allows us to characterize functions which generalize harmonic functions. In this context, we solve a generalization of the two-dimensional wave equation.

1. Introduction. L'idée de généraliser la théorie des fonctions d'une variable complexe à une théorie des fonctions dépendant de plus de deux variables réelles n'est pas nouvelle et certaines généralisations ont déjà été proposées (voir par exemple [1, 4, 8]). Le théorème de Frobenius concernant la dimension des corps commutatifs sur $\mathbf{R}$ ([5], p. 139), nous indique toutefois qu'aucune de ces généralisations ne peut avoir la simplicité de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Il est néanmoins intéressant de voir ce que l'on peut tirer de telles généralisations.

Nous présentons ici certaines propriétés d'une nouvelle généralisation de la théorie des fonctions d'une variable complexe en adoptant la perspective de Cauchy basée sur la différentiabilité. Cette généralisation a été introduite en [3] et repose sur la notion d'inverse additif composé. Les ensembles de nombres à inverse additif composé ont comme cas particuliers tous ceux des nombres multicomplexes, dont $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ font partie ([6, 7]). Après avoir établi une correspondance entre les nombres à inverse additif composé et des classes d'équivalence dans l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$, nous donnons une généralisation des équations de Cauchy-Riemann dont la vérification est une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction associée soit holomorphe, dans un sens un peu plus large que la définition usuelle. Cette condition coïncide avec celle s'appliquant aux fonctions d'une variable multicomplexe seulement

Reçu le 5 juin 1998 et, sous forme définitive, le 13 septembre 1999.

©Association mathématique du Québec

lorsque cette variable est dans **C**. Nous déterminons ensuite l'équivalent des fonctions harmoniques dans ce contexte et précisons certaines de leurs caractéristiques. Nous nous intéressons enfin aux solutions générales d'équations aux dérivées partielles qui généralisent à des ordres supérieurs à deux, l'équation de Laplace et l'équation des ondes à deux dimensions.

2. Les nombres addisymétriques. Soit $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$. Considérons m copies du monoïde formé de l'ensemble des nombres réels positifs $\mathbf{R}_+$ avec l'addition et supposons que ces monoïdes partagent le même élément neutre. Ces monoïdes peuvent être représentés géométriquement par m copies du demi-axe $\mathbf{R}_+$ munies d'une origine commune. Soit $1^{(k)_m}$, $k \in I(m) = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, les unités additives de ces monoïdes. Le monoïde dont l'unité est $1^{(0)_m}$ sera appelé monoïde primaire et les nombres de ce monoïde seront dits nombres primaires. Nous désignerons $1^{(k)_m}$ par $1^{(k)}$ et l'unité $1^{(0)}$ sera souvent notée 1, si aucune confusion ne risque de s'ensuivre. Si $a \in \mathbf{R}_+$, l'expression $a^{(k)}$ désignera un nombre quelconque du k-ième des m monoïdes.

Une multiplication commutative des $1^{(k)}$, $k \in I(m)$, qui généralise celle définie sur **R** s'obtient en imposant aux indices des $1^{(k)}$ de former le groupe cyclique $\mathbf{Z}_m$ avec l'addition modulo m :

$$1^{(k_1)}1^{(k_2)} = 1^{((k_1+k_2)(\mathrm{mod}\, m))}\,, \tag{1}$$

où $k_1, k_2 \in I(m)$ et l'expression formant l'indice de second membre est le nombre de $I(m)$ qui est congruent à $k_1 + k_2$ modulo m. La définition (1) permet de calculer le produit de n'importe quel couple de nombres des m monoïdes. Il en résulte que quels que soient les nombres primaires a_{k_1}, b_{k_2}, où $k_1, k_2 \in I(m)$:

$$\left(\sum_{k_1 \in I(m)} a_{k_1}^{(k_1)}\right)\left(\sum_{k_2 \in I(m)} b_{k_2}^{(k_2)}\right) = \sum_{k \in I(m)} \left(\sum_{\substack{k_1, k_2 \in I(m) \\ k_1+k_2 \equiv k (\mathrm{mod}\, m)}} a_{k_1} b_{k_2}\right)^{(k)}\,. \tag{2}$$

Puisque la multiplication (1) est commutative, la multiplication (2) le sera également.

En plus de la relation (1), nous admettrons que les $1^{(k)}$ satisfont :

$$\sum_{k \in I_n(m)} 1^{(k)} = 0\,, \tag{3}$$

pour tout diviseur n de m, où $I_n(m)$ est le sous-ensemble des multiples de n dans $I(m)$. Le second membre de (3) correspond à l'élément neutre commun à tous les monoïdes. En multipliant chaque $1^{(k)}$, $k \in I_n(m)$, par un même $c_n \in \mathbf{R}_+$, on obtient :

$$\sum_{k \in I_n(m)} c_n^{(k)} = 0 \tag{4}$$

pour tout diviseur n de m. Si $a_k \in \mathbf{R}_+$ pour $k \in I(m)$ et $c_n = \min_{j \in I_n(m)}\{a_j\}$ dans (4), alors :

$$\sum_{k \in I(m)} a_k^{(k)} = \sum_{n|m} \sum_{k \in I_n(m)} \left(a_k - \min_{j \in I_n(m)}\{a_j\}\right)^{(k)}\,. \tag{5}$$

Le second membre de (5) est appelé expression réduite de $\sum_{k\in I(m)} a_k^{(k)}$ et sera noté $\sum_{k\in I(m)} \langle a_k\rangle^{(k)}$. Nous appellerons k-ième coordonnée de $\sum_{k\in I(m)} a_k^{(k)}$ le nombre primaire $\langle a_k\rangle$. L'équation (5) définit une relation d'équivalence dans l'ensemble des expressions $\sum_{k\in I(m)} a_k^{(k)}$ et que l'addition coordonnée à coordonnée et la multiplication (2) y sont des opérations bien définies. Nous écrirons $\sum_{k\in I(m)} a_k^{(k)} = \sum_{k\in I(m)} b_k^{(k)}$ si la différence entre ces expressions appartient à la classe d'équivalence de 0.

Définition 1. Nous appelons nombres m-addisymétriques les classes d'équivalence des expressions $\sum_{k\in I(m)} a_k^{(k)}$ modulo les relations (3), où le produit deux à deux des $1^{(k)}$, $k \in I(m)$, est défini par (1).

L'ensemble des nombres m-addisymétriques sera noté $\mathbf{A}_m$. Définissons le produit de $a_0^{(0)_2} + a_1^{(1)_2} \in \mathbf{A}_2$ par

$$\sum_{k\in I(m)} b_k^{(k)_m} \in \mathbf{A}_m.$$

Si l'expression réduite de $a_0^{(0)_2} + a_1^{(1)_2}$ est $\langle a_0\rangle^{(0)_2}$, ce produit est défini par

$$\sum_{k\in I(m)} \big(\langle a_0\rangle b_k\big)^{(k)_m} .$$

Si l'expression réduite de $a_0^{(0)_2} + a_1^{(1)_2}$ est $\langle a_1\rangle^{(1)_2}$, ce produit est donné par

$$\sum_{k\in I(m)} \Big(\langle a_1\rangle \hat{b}_k\Big)^{(k)_m} ,$$

où $\hat{b}_k = \sum_{j\in I(m), j\neq k} b_j$ pour $k \in I(m)$. Avec l'addition coordonnée à coordonnée et la multiplication d'un élément de $\mathbf{A}_2$ par un élément de $\mathbf{A}_m$ définie ci-dessus, on a que tout $\mathbf{A}_m$ forme un espace vectoriel de dimension $\varphi(m)$ sur $\mathbf{A}_2$, où φ désigne la fonction totient d'Euler. Cet espace vectoriel sera noté $\mathbf{A}_{2;m}$.

On désigne par $\mathbf{R}[x]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$ et par $\langle \Phi_m(x)\rangle$ l'idéal engendré par le polynôme cyclotomique d'ordre m. Rappelons que $\Phi_m(x)$ se définit par récurrence par $\Phi_1(x) = x - 1$ et $\Phi_m(x) = (x^m - 1)/\prod_{k|m, k\neq m} \Phi_k(x)$. Les relations (1) et (3) montrent que l'ensemble $\mathbf{A}_m$ peut être vu comme la généralisation de l'ensemble des nombres cyclotomiques d'ordre m résultant de l'extension, de $\mathbf{Q}$ à $\mathbf{R}$, du corps à partir duquel ces nombres sont définis. Nous avons en fait que les ensembles $\mathbf{A}_m$ et $\mathbf{R}[x]/\langle \Phi_m(x)\rangle$ sont des algèbres de dimension $\varphi(m)$ ayant chacune un sous-ensemble générateur vérifiant les mêmes équations cyclotomiques : cela y définit la même multiplication. Il s'ensuit :

$$\mathbf{A}_m \simeq \mathbf{R}[x]/\langle \Phi_m(x)\rangle . \tag{6}$$

L'expression (6) permet d'identifier la structure algébrique des $\mathbf{A}_m$. On obtient ainsi que $\mathbf{A}_2$ est un corps isomorphe à $\mathbf{R}$, alors que $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ et $\mathbf{A}_6$ sont des corps isomorphes à $\mathbf{C}$. On a aussi que tous les autres $\mathbf{A}_m$, $\varphi(m) \geq 4$, sont des anneaux commutatifs ayant des diviseurs de zéro. On peut enfin noter que chaque $\mathbf{A}_m$ a comme sous-ensemble un corps isomorphe à $\mathbf{A}_2$.

Nous allons maintenant préciser la nature de l'ensemble des diviseurs de zéro de $\mathbf{A}_m$, $\varphi(m) \geq 4$. On peut d'abord remarquer que le polynôme cyclotomique associé à $\mathbf{A}_m$, $m \geq 3$, s'exprime comme un produit de $\varphi(m)/2$ polynômes quadratiques irréductibles dans $\mathbf{R}$, notés $\theta_{m,k}(x)$. Or $\mathbf{R}[x]/\langle\theta_{m,k}\rangle \simeq \mathbf{C}$ pour tout $k = 1, 2, \ldots, \varphi(m)/2$, de sorte que $\mathbf{A}_m$ s'écrit comme une somme directe de $\varphi(m)/2$ idéaux qui sont tous des corps isomorphes à $\mathbf{C}$. Pour $m > 2$, on a alors :

$$\mathbf{A}_m \simeq \bigoplus_{j=1}^{\varphi(m)/2} \mathbf{C}\,. \tag{7}$$

Soit $a, b \in \mathbf{A}_m$ tels que $ab = 0$. Selon l'isomorphisme (6), il existe des polynômes $p_a(x), p_b(x) \in \mathbf{R}[x]$ dont les classes d'équivalence modulo $\Phi_m(x)$ correspondent respectivement à a et b et sont tels que $p_a(x)p_b(x) \in \langle\Phi_m(x)\rangle$. Le polynôme $p_a(x)p_b(x)$ contient donc tous les facteurs quadratiques irréductibles de $\Phi_m(x)$. Ainsi, pour tout $k = 1, 2, \ldots, \varphi(m)/2$, on a que $\theta_{m,k}(x)|p_a(x)p_b(x)$ de sorte que $\theta_{m,k}(x)|p_a(x)$ ou $\theta_{m,k}(x)|p_b(x)$. Si $\theta_{m,k}(x)|p_a(x)$, alors la classe d'équivalence de $p_a(x)$ est nulle dans $\mathbf{R}[x]/\langle\theta_{m,k}(x)\rangle$ et $p_b(x) \in \operatorname{Ann}\left(\mathbf{R}[x]/\langle\theta_{m,k}(x)\rangle\right)$, où $\operatorname{Ann}(X)$ désigne l'annulateur de X. De même si $\theta_{m,k}(x)|p_b(x)$. Or

$$\operatorname{Ann}\left(\mathbf{R}[x]/\langle\theta_{m,k}(x)\rangle\right) = \mathbf{R}[x]/\langle \prod_{\substack{j\neq k\\ j=1}}^{\varphi(m)/2} \theta_{m,j}(x)\rangle\,.$$

Il s'ensuit que si $\varphi(m) \geq 4$, alors l'ensemble des diviseurs de zéro de $\mathbf{A}_m$, noté $\mathbf{A}_m^\circ$, est l'union de $\varphi(m)/2$ sous-espaces de codimension 2 de $\mathbf{A}_{2;m}$. À noter que $\mathbf{A}_m^\circ$ ne contient aucun nombre non nul de l'un ou l'autre des m monoïdes de $\mathbf{A}_m$. Désignons par $\mathbf{A}_m^\star$ l'ensemble des non-diviseurs de zéro de $\mathbf{A}_m$. Nous définissons l'inverse multiplicatif de $a \in \mathbf{A}_m^\star$ comme étant la solution $x \in \mathbf{A}_m^\star$ de l'équation $ax = 1$. Cet inverse sera noté $1/a$.

Notons que les $\mathbf{A}_{2^k}$ coïncident avec les ensembles de nombres multicomplexes d'ordre $k-1$ de [6]. Ainsi, par exemple, $\mathbf{A}_8$ et $\mathbf{A}_{16}$ correspondent respectivement aux ensembles de nombres bicomplexes (ou tétranombres [7]) et tricomplexes.

3. Des extensions algébriques de $\mathbf{A}_p$. Nous nous restreindrons dorénavant au cas où m est un nombre premier $p \in \mathbf{N}$. Il est clair que $(1^{(\sigma)})^p = 1$ pour tout $\sigma \in I(p)$. Les équations du type $x^p = 1^{(\nu)}$, $\nu \in I^*(p) = \{1, 2, \ldots, p-1\}$, n'ont ainsi aucune solution dans $\mathbf{A}_p$ qui s'exprime à l'aide d'une seule coordonnée. On peut toutefois produire de telles solutions à l'intérieur d'extensions algébriques de $\mathbf{A}_p$. Ces extensions s'obtiennent par l'adjonction de la racine p-ième non composée de $1^{(\nu)}$, $\nu \in I^*(p)$, que nous désignerons par $s_{p,\nu}$. Les extensions ainsi obtenues seront notées $\mathbf{E}_{p,\nu}$. On montre aisément que toutes ces extensions sont isomorphes entre elles et que

$$\mathbf{E}_{p,\nu} \simeq \mathbf{A}_p[x]/\langle x^p -_p 1^{(\nu)}\rangle\,,$$

où $-_p1 = \sum_{k\in I^*(p)} 1^{(k)}$, désigne l'inverse additif de 1 dans $\mathbf{A}_p$. On a également que

$$\mathbf{E}_{p,\nu} \simeq \mathbf{R}[x]/\langle\Phi_{p^2}(x)\rangle\,,$$

d'où $\mathbf{E}_{p,\nu} \simeq \mathbf{A}_{p^2}$. De (7), on tire alors que chaque $\mathbf{E}_{p,\nu}$, $\nu \in I^*(p)$, s'exprime comme une somme directe de $(p-1)p/2$ idéaux qui sont tous des corps isomorphes à $\mathbf{C}$.

D'autres extensions algébriques de $\mathbf{A}_p$ s'obtiennent par l'adjonction d'un élément $s_{p,0}$ n'appartenant pas à $\mathbf{A}_p$ et dont la puissance p-ième égale $1^{(0)}$. Un tel élément peut être représenté par un produit de $s_{p,\nu}$, $\nu \in I^*(p)$, comme $s_{p,1}s_{p,p-1}$ ou $s_{p,1}s_{p,2}\ldots s_{p,p-1}$. Il est facile de voir que toutes les extensions de $\mathbf{A}_p$ obtenues à partir de l'un ou l'autre de ces éléments sont isomorphes entre elles. Ces extensions seront désignées par $\mathbf{E}_{p,0}$.

Comme pour les $\mathbf{E}_{p,\nu}$, $\nu \in I^*(p)$, on peut établir une relation entre $\mathbf{E}_{p,0}$ et certains anneaux quotients de polynômes à coefficients dans $\mathbf{R}$. En effet, pour tout $\sum_{k\in I(p)} a_k s_{p,0}^k \in \mathbf{E}_{p,0}$, on a que $a_k = \sum_{j\in I(p)} a_{k,j}^{(j)} \in \mathbf{A}_p$ pour $k \in I(p)$ et $s_{p,0}$ satisfait l'équation $y^p = 1$. On en déduit que

$$\mathbf{E}_{p,0} \simeq \mathbf{A}_p[y]/\langle y^p -_p 1\rangle\,.$$

De (6), il s'ensuit :

$$\mathbf{E}_{p,0} \simeq \mathbf{R}[x,y]/\langle \Phi_p(x)(y^p-1)\rangle\,.$$

Il est alors clair que $\mathbf{E}_{p,0} \simeq \mathbf{A}_p \oplus (\mathbf{A}_p \otimes \mathbf{A}_p)$, où $\otimes$ désigne le produit tensoriel. Les extensions $\mathbf{E}_{p,0}$ et $\mathbf{E}_{p,1}$ seront désignées génériquement par $\mathbf{E}_{p,\mu}$.

Si $\sum_{k\in I(p)} a_k s_{p,\mu}^k, \sum_{k\in I(p)} b_k s_{p,\mu}^k \in \mathbf{E}_{p,\mu}$, où $a_k, b_k \in \mathbf{A}_p$ pour $k \in I(p)$, alors le produit de ces nombres est défini par :

$$\left(\sum_{k\in I(p)} a_k s_{p,\mu}^k\right)\left(\sum_{k\in I(p)} b_k s_{p,\mu}^k\right) = \sum_{k\in I(p)}\left(\sum_{\substack{k_1,k_2\in I(p)\\ k_1+k_2\equiv k(\mathrm{mod}\,p)}} a_{k_1} b_{k_2}^{(r(\mu,k,k_1))}\right) s_{p,\mu}^k\,, \quad (8)$$

où $r(\mu,k,k_1) = 0$, si $k_1 \leq k$, et $r(\mu,k,k_1) = \mu$, si $k_1 > k$. Avec l'addition coordonnée à coordonnée et la multiplication (8), chaque $\mathbf{E}_{p,\mu}$ a la structure algébrique d'un module unitaire de dimension p sur l'anneau $\mathbf{A}_p$ et l'ensemble $\{1, s_{p,\mu}, s_{p,\mu}^2, \ldots, s_{p,\mu}^{p-1}\}$ en est une base. Puisque tout $\mathbf{A}_p$, s'exprime comme un espace vectoriel de dimension $p-1$ sur le corps $\mathbf{A}_2$, l'ensemble $\mathbf{E}_{p,\mu}$ est aussi un espace vectoriel de dimension $(p-1)p$ sur $\mathbf{A}_2$. Cet espace vectoriel sera noté $\mathbf{E}_{2;p,\mu}$. On montre aisément qu'aucun des anneaux $\mathbf{E}_{p,\mu}$ n'est intègre si $p \geq 3$; l'anneau $\mathbf{E}_{2,1}$ est pour sa part un corps isomorphe à $\mathbf{C}$, alors que $\mathbf{E}_{2,0}$ est isomorphe à l'ensemble des nombres doubles ([5], p. 11).

Désignons par $\mathbf{E}_{p,\mu}^\circ$ l'ensemble des diviseurs de zéro de $\mathbf{E}_{p,\mu}$. Puisque $\mathbf{E}_{p,1} \simeq \mathbf{A}_{p^2}$, on obtient immédiatement du paragraphe précédent que si $p \geq 3$ alors l'ensemble $\mathbf{E}_{p,1}^\circ$ est l'union de $(p-1)p/2$ sous-espaces de codimension 2 de $\mathbf{E}_{2;p,1}$. Un raisonnement similaire à celui que nous avons appliqué pour déterminer $\mathbf{A}_m^\circ$ montre que $\mathbf{E}_{2,0}^\circ$ est l'union de deux droites, $\mathbf{E}_{3,0}^\circ$ est l'union de deux sous-espaces de codimension 2 et d'un sous-espace de codimension 3 et $\mathbf{E}_{p,0}^\circ$, $p \geq 5$, est l'union d'un sous-espace de codimension $p-1$, de $(p-1)/2$ sous-espaces de codimension $2(p-1)$ et de $(p-1)/2$ sous-espaces de codimension $2p$ de $\mathbf{E}_{2;p,0}$. On a aussi que $\mathbf{E}_{p,\mu}^\circ$ ne contient aucun nombre non nul de l'un ou l'autre des p^2 monoïdes de $\mathbf{E}_{p,\mu}$. Désignons par $\mathbf{E}_{p,\mu}^\star$ l'ensemble des non-diviseurs de zéro de $\mathbf{E}_{p,\mu}$. L'inverse multiplicatif de $a \in \mathbf{E}_{p,\mu}^\star$ est défini par la solution $x \in \mathbf{E}_{p,\mu}^\star$ de $ax = 1$. Cet inverse sera noté $1/a$.

4. L'addidérivation. Afin de définir une limite, puis une dérivée sur $\mathbf{E}_{p,\mu}$, nous allons y introduire la notion de p-prévaleur absolue. Nous dirons qu'une fonction de $\mathbf{E}_{p,\mu}$ sur $\mathbf{R}_{+}$, notée $z \mapsto \|z\|_p$, est une p-prévaleur absolue si elle satisfait : i) $\|z\|_p = 0$ si et seulement si $z = 0$, ii) $\|z + w\|_p \leq \|z\|_p + \|w\|_p$, iii) $\|zw\|_p \leq \|z\|_p\|w\|_p$ quels que soient $z, w \in \mathbf{E}_{p,\mu}$.

Soit $\langle a_{k,j}\rangle$, $\langle b_{k,j}\rangle$, $j \in I(p)$, les coordonnées des expressions réduites de respectivement $a_k, b_k \in \mathbf{A}_p$ pour $k \in I(p)$. En remarquant que $\langle a_{k,j} + b_{k,j}\rangle \leq \langle a_{k,j}\rangle + \langle b_{k,j}\rangle$ et

$$\left\langle \sum_{\substack{j_1, j_2 \in I(p)\\ j_1+j_2 \equiv j (\mathrm{mod} p)}} a_{k,j_1} b_{k,j_2} \right\rangle \leq \sum_{\substack{j_1, j_2 \in I(p)\\ j_1+j_2 \equiv j (\mathrm{mod} p)}} \langle a_{k,j_1}\rangle \langle b_{k,j_2}\rangle$$

pour tout $k \in I(p)$, on montre directement que la fonction $z \mapsto \|z\|_p$ définie par :

$$\left\| \sum_{k\in I(p)} a_k s^k_{p,\mu} \right\|_p = \sum_{k\in I(p)} \left(\sum_{j\in I(p)} \langle a_{k,j}\rangle \right)$$

est une p-prévaleur absolue sur $\mathbf{E}_{p,\mu}$ [3].

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{E}_{p,\mu}$ et prenant ses valeurs dans $\mathbf{E}_{p,\mu}$. Soit aussi $z \in \mathbf{E}_{p,\mu}$ un élément du domaine de f.

Définition 2. Nous dirons que f est p-addidérivable en z si

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) -_p f(z)}{\Delta z}$$

existe indépendamment de la façon dont $\Delta z \in \mathbf{E}^{\star}_{p,\mu}$ tend vers zéro, au sens de la p-prévaleur absolue définie sur $\mathbf{E}_{p,\mu}$.

Nous appellerons p-addidérivée de $f(z)$ et noterons $f'(z)$ la valeur de celle limite. Une conséquence immédiate de cette définition est que les fonctions d'une variable dans $\mathbf{E}_{p,\mu}$ satisfont aux règles usuelles de dérivation.

Une fonction définie sur $\mathbf{E}_{p,\mu}$ sera dite p-addiholomorphe en un point si elle est p-addidérivable en tout point d'un voisinage, défini en termes de la p-prévaleur absolue, du point considéré. Nous dirons qu'une fonction est p-addiholomorphe dans un domaine de $\mathbf{E}_{p,\mu}$ si elle est p-addiholomorphe en tout point de ce domaine.

5. Une généralisation des équations de Cauchy-Riemann. Si $z = \sum_{k\in I(p)} x_k s^k_{p,\mu} \in \mathbf{E}_{p,\mu}$, où $x_k = \sum_{l\in I(p)} x^{(l)}_{k,l} \in \mathbf{A}_p$ pour $k \in I(p)$, et

$$f(z) = \sum_{k\in I(p)} u_k(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) s^k_{p,\mu},$$

on définit la p-addidérivée partielle de u_j par rapport à x_k par :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \sum_{l\in I(p)} \left\langle \frac{\partial u_j}{\partial x_{k,l}} \right\rangle^{(l)} . \tag{9}$$

Notons que si $\bar{x}_k$ désigne la restriction de $x_k \in \mathbf{A}_p$, $k \in I(p)$, au sous-ensemble de $\mathbf{A}_p$ isomorphe au corps $\mathbf{A}_2$, qui est lui-même isomorphe à $\mathbf{R}$, alors (9) devient la dérivée partielle usuelle de $u_j : \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^{p-1}$ par rapport à $\bar{x}_k$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit p-addiholomorphe dans un domaine de $\mathbf{E}_{p,\mu}$.

Théorème 1. *Soit $z \in \mathbf{E}_{p,\mu}$ et $f : \mathbf{E}_{p,\mu} \to \mathbf{E}_{p,\mu}$. Si*

$$f(z) = \sum_{k \in I(p)} u_k(x_0, \ldots, x_{p-1}) s_{p,\mu}^k,$$

où les fonctions $u_k : \mathbf{A}_p^p \to \mathbf{A}_p$, $k \in I(p)$, ont des p-addidérivées partielles continues par rapport à x_j, $j \in I(p)$, alors f est p-addiholomorphe dans un domaine D de $\mathbf{E}_{p,\mu}$ si et seulement si les $(p-1)p^2/2$ équations suivantes sont satisfaites dans D :

$$\frac{\partial u_{(i+k)(\mathrm{mod}\,p)}}{\partial x_i} = 1^{([e_{p,\mu}(k,j) - e_{p,\mu}(k,i)](\mathrm{mod}\,p))} \frac{\partial u_{(j+k)(\mathrm{mod}\,p)}}{\partial x_j}\,, \tag{10}$$

où $i, j, k \in I(p)$, $i \neq j$, et

$$e_{p,\mu}(k,i) = \begin{cases} 0, & \textit{si } i = 0, 1, \ldots, p-k-1 \\ p-\mu, & \textit{si } i = p-k, \ldots, p-1\,. \end{cases} \tag{11}$$

Démonstration. Si f est p-addiholomorphe dans D, il est facile de voir que pour tout $z \in D$ et $i \in I(p)$:

$$f'(z) = 1^{(p-\mu)} \sum_{k \in I(p)} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} s_{p,\mu}^{p+k-i}\,. \tag{12}$$

Par conséquent

$$\sum_{k \in I(p)} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} s_{p,\mu}^{k-i} = \sum_{l \in I(p)} \frac{\partial u_l}{\partial x_j} s_{p,\mu}^{l-j} \tag{13}$$

pour tout $i, j \in I(p)$, $i \neq j$. En identifiant les coefficients des différentes puissances de $s_{p,\mu}$ en (13), on obtient les équations :

$$1^{(e_{p,\mu}(k,i))} \frac{\partial u_{(i+k)(\mathrm{mod}\,p)}}{\partial x_i} = 1^{(e_{p,\mu}(k,j))} \frac{\partial u_{(j+k)(\mathrm{mod}\,p)}}{\partial x_j}\,,$$

où $e_{p,\mu}(k,i)$ est défini par (11). La formule (10) suit alors immédiatement.

Montrons maintenant que la vérification des équations (10) dans un domaine D de $\mathbf{E}_{p,\mu}$ fait que la fonction f y est p-addiholomorphe. Étant donné la définition (9), on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à chacune des fonctions déduites des u_k, $k \in I(p)$, en gardant fixées $p-1$ de ses p variables. Il s'ensuit que pour tout $j, k \in I(p)$, il existe un $\varepsilon_{k,j} = \sum_{i \in I(p)} \varepsilon_{k,j,i}^{(i)} \in \mathbf{A}_p$ tel que

$$\begin{aligned} &u_k(\xi_0, \ldots, \xi_{j-1}, x_j + \Delta x_j, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{p-1}) -_p u_k(\xi_0, \ldots, \xi_{j-1}, x_j, \xi_{j+1}, \ldots, \xi_{p-1}) \\ &\qquad = \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \varepsilon_{k,j} \right) \Delta x_j\,, \end{aligned}$$

où $\varepsilon_{k,j} \to 0$ lorsque $\Delta x_j \to 0$ au sens de la p-prévaleur absolue. Ainsi

$$\begin{aligned}
\Delta u_k &= u_k(x_0 + \Delta x_0, \ldots, x_{p-1} + \Delta x_{p-1}) -_p u_k(x_0, \ldots, x_{p-1}) \\
&= u_k(x_0 + \Delta x_0, \ldots, x_{p-1} + \Delta x_{p-1}) -_p u_k(x_0, x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_{p-1} + \Delta x_{p-1}) \\
&\quad + u_k(x_0, x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_{p-1} + \Delta x_{p-1}) \\
&\qquad -_p u_k(x_0, x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_{p-1} + \Delta x_{p-1}) \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + u_k(x_0, x_1, \ldots, x_{p-2}, x_{p-1} + \Delta x_{p-1}) -_p u_k(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) \\
&= \sum_{j \in I(p)} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \varepsilon_{k,j} \right) \Delta x_j \, .
\end{aligned}$$

Si $\varepsilon_j = \sum_{k \in I(p)} \varepsilon_{k,j} s_{p,\mu}^k$, on a alors :

$$\begin{aligned}
f(z + \Delta z) -_p f(z) &= \sum_{k \in I(p)} \Delta u_k s_{p,\mu}^k \\
&= \sum_{k \in I(p)} \left(\sum_{j \in I(p)} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \varepsilon_{k,j} \right) \Delta x_j \right) s_{p,\mu}^k \\
&= \sum_{j \in I(p)} \left(\sum_{k \in I(p)} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} s_{p,\mu}^k \right) \Delta x_j + \sum_{j \in I(p)} \varepsilon_j \Delta x_j
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j \in I(p)} \left(\sum_{k \in I(p)} 1^{(p - e_{p,\mu}((k-j)(\mathrm{mod}\, p), j))} \frac{\partial u_{(k-j)(\mathrm{mod}\, p)}}{\partial x_0} s_{p,\mu}^{k-j} \right) s_{p,\mu}^j \Delta x_j + \sum_{j \in I(p)} \varepsilon_j \Delta x_j$$

$$= \left(\sum_{k \in I(p)} \frac{\partial u_k}{\partial x_0} s_{p,\mu}^k \right) \left(\sum_{j \in I(p)} \Delta x_j s_{p,\mu}^j \right) + \sum_{j \in I(p)} \varepsilon_j \Delta x_j \, .$$

Ainsi

$$f'(z) = \sum_{k \in I(p)} \frac{\partial u_k}{\partial x_0} s_{p,\mu}^k = \frac{\partial f}{\partial x_0} \, . \tag{14}$$

Ceci montre que la p-addidérivée de f est uniquement déterminée dans D et donc que f y est p-addiholomorphe. $\square$

Remarquons que la généralisation (10) des équations de Cauchy-Riemann a été déduite directement de la définition de la dérivée de f, sans se référer à une condition équivalente du type de Stolz, comme c'est habituellement le cas pour les fonctions d'une variable multicomplexe [6].

Une généralisation de (14) découle immédiatement de (12).

Corollaire. *Si f est une fonction p-addiholomorphe dans un domaine D de $\mathbf{E}_{p,\mu}$ alors*

$$f'(z) = 1^{(p-\mu)} s_{p,\mu}^{p-k} \frac{\partial f(z)}{\partial x_k} \tag{15}$$

pour tout $z \in D$ et $k \in I(p)$.

6. Les fonctions p-addiharmoniques. Si la fonction f est p fois continûment p-addidérivable dans D et les p-addidérivées partielles de f sont définies suivant (9), c'est-à-dire que

$$\frac{\partial^l f}{\partial x_k^l} = \sum_{j\in I(p)} \left\langle \frac{\partial^l f}{\partial x_{k,j}^l} \right\rangle^{(j)} ,$$

où $k \in I(p)$ et $l \in \mathbf{N}$, on tire de (15) que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^p f}{\partial x_k^p} &= s_{p,\mu}^{kp} f^{[p]}(z) \\ &= 1^{((k\mu)(\mathrm{mod} p))} f^{[p]}(z) , \end{aligned}$$

où $f^{[p]}$ désigne la p-addidérivée d'ordre p de f. Si $\mu = 0$, on a donc :

$$\sum_{k\in I(p)} 1^{(k)} \frac{\partial^p f}{\partial x_k^p} = 0 , \tag{16}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k\in I(p)} \frac{\partial^p f}{\partial x_k^p} = p \frac{\partial^p f}{\partial x_0^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{p-1}^{\alpha_{p-1}}} ,$$

où $\alpha_i \in \mathbf{N}$ et $\sum_{i\in I(p)} \alpha_i = p$. De même, si $\mu = 1$, alors

$$\sum_{k\in I(p)} \frac{\partial^p f}{\partial x_k^p} = 0 . \tag{17}$$

Les équations (16) et (17) sont satisfaites par toute fonction p-addiholomorphe dans respectivement $\mathbf{E}_{p,0}$ et $\mathbf{E}_{p,1}$.

Définition 3. Nous dirons que les solutions $u : \mathbf{A}_p^p \to \mathbf{A}_p$ de (16) sont des fonctions p_0-addiharmoniques et que celles de (17) sont des fonctions p_1-addiharmoniques.

Les fonctions 2_1-addiharmoniques sont les fonctions harmoniques usuelles. Si la fonction $f = \sum_{k\in I(p)} u_k s_{p,\mu}^k$ est p-addiholomorphe dans un domaine D de $\mathbf{E}_{p,\mu}$ alors toutes les fonctions u_k, $k \in I(p)$, seront p_μ-addiharmoniques dans D, car les opérateurs de p-addidérivation partielle sont linéaires.

Déterminons la forme générale des fonctions p_μ-addiharmoniques en trouvant les solutions générales, dans $\mathbf{E}_{p,\mu}$, des équations aux p-addidérivées partielles (16) et (17). Puisque ces équations sont linéaires, à coefficients constants et d'ordre p, leurs solutions générales s'exprimeront comme des combinaisons linéaires de p fonctions des variables x_k, $k \in I(p)$, qui en sont elles-mêmes des solutions linéairement indépendantes (voir par exemple [2], p. 44). Nous commencerons par l'équation (16), qui devient l'équation des ondes à une dimension spatiale lorsque $p = 2$ et la vitesse de propagation vaut l'unité. Cette équation se résout en déterminant p nombres m_k, $k \in I(p)$, linéairement indépendants dans l'espace vectoriel $\mathbf{E}_{2;p,0}$, qui vérifient l'équation caractéristique de (16), à savoir :

$$\sum_{k\in I(p)} 1^{(k)} m_k^p = 0\,.$$

Un tel ensemble de nombres est donné par $\sum_{j\in I(p)} x_j^{(jk)}$, où $x_j \in \mathbf{A}_p$ pour $j,k \in I(p)$. La solution générale de (16) est donc :

$$f(x_0,x_1,\dots,x_{p-1}) = \sum_{k\in I(p)} g_k\left(\sum_{j\in I(p)} x_j^{(jk)}\right)\,, \tag{18}$$

où les g_k, $k\in I(p)$, sont des fonctions quelconques p fois p-addidérivables sur $\mathbf{A}_p$. Notons que (18) devient la solution de d'Alembert lorsque $p=2$.

L'équation caractéristique de (17) est :

$$\sum_{k\in I(p)} m_k^p = 0\,. \tag{19}$$

Un ensemble de p nombres linéairement indépendants dans $\mathbf{E}_{2;p,1}$ et qui vérifient (19) est donné par $\sum_{j\in I(p)} x_j^{(jk)} s_{p,1}^j$, où $x_j\in\mathbf{A}_p$ pour $j,k\in I(p)$. La solution générale de (17) sera donc :

$$f(x_0,x_1,\dots,x_{p-1}) = \sum_{k\in I(p)} g_k\left(\sum_{j\in I(p)} x_j^{(jk)} s_{p,1}^j\right)\,,$$

où les g_k, $k\in I(p)$, sont des fonctions quelconques p fois p-addidérivables sur $\mathbf{E}_{p,1}$. Nous avons ainsi démontré le

Théorème 2. *La forme générale des fonctions p_μ-addiharmoniques est :*

$$f(x_0,x_1,\dots,x_{p-1}) = \sum_{k\in I(p)} g_k\left(\sum_{j\in I(p)} x_j^{(jk)} s_{p,\mu}^{j\mu}\right)\,,$$

où les g_k, $k\in I(p)$, sont des fonctions arbitraires p fois p-addidérivables sur $\mathbf{A}_p$ si $\mu=0$ et sur $\mathbf{E}_{p,1}$ si $\mu=1$.

Comme dans le cas où $p=2$, il est possible d'obtenir des solutions de (16) et (17) qui s'expriment sous la forme de séries ou d'intégrales, à la condition que ces séries ou intégrales définissent des fonctions p fois p-addidérivables sur $\mathbf{E}_{p,\mu}$. Déterminons, par exemple, des solutions de (16) s'exprimant par des séries. Nous savons d'abord que toutes les fonctions $G_{k,n}(y_0,y_1,\dots,y_{p-1})$, $k\in I(p)$, $n\in\mathbf{N}$, de $\mathbf{A}_p^p$ sur $\mathbf{A}_p$ définies par :

$$\left(\sum_{k\in I(p)} y_k s_{p,1}^k\right)^n = \sum_{k\in I(p)} G_{k,n}(y_0,y_1,\dots,y_{p-1}) s_{p,1}^k$$

sont des solutions de (16). Puisque (16) est linéaire, toutes les séries :

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} a_{k,n} G_{k,n}(y_0, y_1, \dots, y_{p-1})\,, \quad k \in I(p)\,,$$

où $a_{k,n} \in \mathbf{A}_p$ pour $k \in I(p)$ et $n \in \mathbf{N}$, seront des solutions de (16), partout où elles définissent des fonctions p fois p-addidérivables. D'autres solutions s'écrivent sous la forme d'une exponentielle. Pour (16), on a ainsi :

$$h_k(x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) = \exp\left(\sum_{j\in I(p)} x_j^{(jk)}\right)\,, \quad k \in I(p)\,,$$

où les x_j, $j \in I(p)$, sont comme en (18). Ces expressions permettent de trouver des solutions de (16) qui s'expriment par des fonctions généralisant les fonctions trigonométriques. À noter toutefois qu'aucune de ces fonctions n'est périodique sur $\mathbf{A}_p$ lorsque $p \geq 3$ [3].

7. L'équation des «ondes» à deux dimensions spatiales addisymétriques. Nous examinerons maintenant l'équation (16), dans le cas particulier où $p = 3$, afin de voir quel genre d'interprétation il est possible de lui associer. La solution (18) devient ici :

$$f(x_0, x_1, x_2) = g_0(x_0 + x_1 + x_2) + g_1(x_0 + x_1^{(1)} + x_2^{(2)}) + g_2(x_0 + x_1^{(2)} + x_2^{(1)})\,, \quad (20)$$

où $x_0, x_1, x_2 \in \mathbf{A}_p$ et g_0, g_1, g_2 sont des fonctions arbitraires et indépendantes, qui sont elles-mêmes des solutions de (16). En identifiant x_0, par exemple, à une coordonnée «temporelle» 3-addisymétrique et x_1, x_2 à des coordonnées «spatiales» 3-addisymétriques, on a que (20) décrit une «onde» qui se propage à la vitesse unité dans un espace à deux dimensions «spatiales» 3-addisymétriques. En effet, si $a \in \mathbf{R}_+$ correspond à un temps 3-addisymétrique primaire alors :

$$\left.\begin{aligned} g_0[x_0 + a + x_1 + x_2 + a^{(1)} + a^{(2)}] &= g_0(x_0 + x_1 + x_2),\\ g_1[x_0 + a + (x_1 + a)^{(1)} + (x_2 + a)^{(2)}] &= g_1(x_0 + x_1^{(1)} + x_2^{(2)}),\\ g_2[x_0 + a + (x_1 + a)^{(2)} + (x_2 + a)^{(1)}] &= g_2(x_0 + x_1^{(2)} + x_2^{(1)})\,. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

De même, si $a \in \mathbf{R}_+$ on a alors que $a^{(1)} + a^{(2)}$ correspond à un temps 3-addisymétrique qui est l'inverse additif d'un temps primaire. Par conséquent

$$\left.\begin{aligned} g_0[x_0 + a^{(1)} + a^{(2)} + x_1 + x_2 + a] &= g_0(x_0 + x_1 + x_2)\\ g_1[x_0 + a^{(1)} + a^{(2)} + (x_1 + a^{(1)} + a^{(2)})^{(1)} &+ \\ +(x_2 + a^{(1)} + a^{(2)})^{(2)}] &= g_1(x_0 + x_1^{(1)} + x_2^{(2)})\\ g_2[x_0 + a^{(1)} + a^{(2)} + (x_1 + a^{(1)} + a^{(2)})^{(2)} &+ \\ +(x_2 + a^{(1)} + a^{(2)})^{(1)}] &= g_2(x_0 + x_1^{(2)} + x_2^{(1)})\,. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Selon (21), les solutions déterminées par g_1 et g_2 représentent des ondes directes qui se propagent à la vitesse unité selon les monoïdes primaires de chacune des dimensions spatiales 3-addisymétriques décrites par x_1 et x_2. De (21), on a aussi que la solution g_0 représente une onde de retour qui se propage à la vitesse unité en sens opposé à celui des monoïdes primaires de x_1 et x_2. La situation est inversée pour (22) : la solution g_0 décrit une onde directe alors que g_1 et g_2 représentent des ondes de retour.

8. Conclusion. L'introduction de l'addidérivation nous a permis de généraliser la notion de fonctions holomorphes à des espaces de dimension $(p-1)p$ sur $\mathbf{R}$. Nous avons montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle fonction soit addiholomorphe est la vérification d'équations qui généralisent celles de Cauchy-Riemann. À noter que cette condition coïncide avec celle s'appliquant aux fonctions d'une variable multicomplexe seulement lorsque $p=2$. Ceci nous a conduit à la mise en évidence de généralisations des fonctions harmoniques. Nous avons ainsi étendu à $\mathbf{E}_{p,\mu}$ des éléments de la théorie des fonctions d'une variable complexe qui découlent de la dérivation. Signalons que des éléments d'une généralisation à $\mathbf{E}_{p,1}$ de l'intégration complexe ont été présentés en [3].

English extended abstract. Let $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$. We define the set $\mathbf{A}_m$ of m-addisymmetric numbers and observe that $\mathbf{A}_m \simeq \mathbf{R}[x]/\langle \Phi_m(x) \rangle$, where $\Phi_m(x)$ is the cyclotomic polynomial of order m. Two kinds of algebraic extensions of $\mathbf{A}_p$, where p is a prime number, are considered. The first one $\mathbf{E}_{p,1}$ is shown to be isomorphic to $\mathbf{A}_{p^2}$ while the second one $\mathbf{E}_{p,0}$, to be isomorphic to $\mathbf{A}_p \oplus (\mathbf{A}_p \otimes \mathbf{A}_p)$. Except for $\mathbf{E}_{2,1} \simeq \mathbf{C}$, those extensions have non-trivial divisors of zero. The set of divisors of zero of $\mathbf{E}_{p,1}$, $p \geq 3$, is the union of $(p-1)/2$ subspaces of codimension 2 of $\mathbf{E}_{p,1}$, the latter being seen as vector space over $\mathbf{R}$. The set of divisors of zero of $\mathbf{E}_{p,0}$ is the union of two straight lines if $p=2$, the union of two subspaces of codimension 2 and one subspace of codimension 3 if $p=3$ and the union of one subspace of codimension $p-1$, $(p-1)/2$ subspaces of codimension $2(p-1)$ and $(p-1)/2$ subspaces of codimension $2p$ if $p \geq 5$, all of these being subspaces of $\mathbf{E}_{p,0}$ considered as vector space over $\mathbf{R}$.

A function $f : \mathbf{E}_{p,\mu} \to \mathbf{E}_{p,\mu}$, $\mu = 0, 1$, is said to be p-addiderivable at a point z if $\lim_{\Delta z \to 0}[f(z + \Delta z) -_p f(z)]/\Delta z$ exists and is independent of the manner in which any non-divisor of zero Δz aproaches zero. Here $-_p = \sum_{k \in I^*(p)} 1^{(k)}$ designates the additive inverse of 1 in $\mathbf{A}_p$. The function f will be said to be p-addiholomorphic at z if it is p-addiderivable at each point in every neighbourhood of z. Theorem 1 gives a necessary and sufficient condition for f to be p-addiholomorphic in a domain D of $\mathbf{E}_{p,\mu}$. This condition is a direct generalization of the Cauchy-Riemann condition for a function to be holomorphic in a domain of $\mathbf{C}$. In order to formulate this condition, let $f(z) = \sum_{k \in I(p)} u_k(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}) s^k_{p,\mu}$, where the functions $u_k : \mathbf{A}^k_k \to \mathbf{A}_p$, $k \in I(p)$, have continuous partial derivatives with respect to x_j, $j \in I(p)$. Theorem 1 then asserts that f is p-addiholomorphic if and only if the $(p-1)p^2/2$ partial differential equations of (10) are satisfied in D.

Equations (16) and (17) generalize to higher order in $\mathbf{E}_{p,0}$ and $\mathbf{E}_{p,1}$ respectively the wave and Laplace equations. Theorem 2 gives the general solutions of these generalized equations in terms of arbitrary functions defined on $\mathbf{A}_p$ if $\mu = 0$ and on $\mathbf{E}_{p,1}$ if $\mu = 1$. We finally show how the solution of the 'wave' equation in two addisymmetric spatial dimensions generalizes the classical d'Alembert solution.

BIBLIOGRAPHIE

1. F. Brackx, R. Delanghe et F. Sommen, *Clifford Analysis*, Research Notes in Mathematics, vol. 76, Pitman, Mass.-London, 1982.
2. R. Dennemeyer, *Introduction to Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, 1968.
3. C. Gauthier, *Sur les nombres à inverse additif composé et une généralisation de la fonction zêta de Riemann*, Rapport de recherche Math-29, Université de Moncton (1997).
4. I. J. Good, *A Simple Generalization of Analytic Function Theory*, Exposition. Math. **6** (1988), 289–311.
5. I. L. Kantor et A. S. Solodovnikov, *Hypercomplex Numbers. An Elementary Introduction to Algebras*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1989.
6. G. B. Price, *An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 140, Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.
7. D. Rochon, *Sur une généralisation des nombres complexes : les tétranombres*, Mémoire de maîtrise, Université de Montréal (1997).
8. J. A. Ward, *A Theory of Analytic Functions in Linear Associative Algebras*, Duke Math. J. **7** (1940), 233–248.

P. DEGUIRE ET C. GAUTHIER
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
UNIVERSITÉ DE MONCTON
MONCTON (NOUVEAU-BRUNSWICK) CANADA
E1A 3E9
COURRIEL : deguirp@umoncton.ca ET gauthic@umoncton.ca