Ann. Sci. Math. Québec **24** (2000), no. 1, 1–17.

ORTHOGONALITÉ ET CARACTÉRISATION DES ESPACES PRÉHILBERTIENS

BRAHIM BOUSSOUIS

RÉSUMÉ. Nous introduisons une nouvelle relation d'orthogonalité sur les espaces normés, et nous en déduisons de nouvelles caractérisations des espaces préhilbertiens.

ABSTRACT. We introduce a new orthogonality relation in normed linear spaces, and we prove some new characterizations of inner product spaces.

Introduction. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel de dimension supérieure ou égale à 2. Une orthogonalité sur E est une relation binaire qui coïncide avec l'orthogonalité usuelle lorsque la norme provient d'un produit scalaire. Il existe plusieurs relations de ce type, introduites par différents auteurs (pour plus de détails, voir [1] et les références qui y sont données). Leur étude fournit des renseignements sur la structure géométrique de l'espace, et permet en particulier de trouver des propriétés caractéristiques des espaces préhilbertiens (voir [1] à [9]).

Dans cet article, nous introduisons une nouvelle relation d'orthogonalité, que nous appellerons C'-orthogonalité, qui généralise l'orthogonalité de Carlsson. L'article se compose de cinq sections. La première section est réservée au rappel de définitions et aux préliminaires. Dans la deuxième section, on introduit la C'-orthogonalité et on montre qu'elle est existante à droite et à gauche. Nous démontrons aussi un théorème établissant un lien entre la C'-orthogonalité et les dérivées de la norme. Ce théorème va nous être utile lors de l'étude de l'homogénéité de la C'-orthogonalité. Dans la troisième section, on résout une équation fonctionnelle qui sera rencontrée ultérieurement. On utilise la transformée de Fourier qui est particulièrement adaptée pour résoudre une telle équation car elle n'exige aucune condition de dérivabilité de la fonction inconnue, contrairement à la méthode des F-séries utilisée dans [5]. Dans la quatrième section, on montre que si la C'-orthogonalité est homogène ou additive (à droite ou à gauche), alors l'espace est préhilbertien. Enfin, dans la cinquième et dernière section, on montre que si la C'-orthogonalité implique (ou est impliquée par) la B-orthogonalité, alors l'espace est préhilbertien.

Reçu le 16 février 1998 et, sous forme définitive, le 21 octobre 1998.

1. Préliminaires et notations. Dans toute la suite

- $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé réel de dimension ≥ 2;
- S est la sphère unité de E : $S = \{x \in E : \|x\| = 1\}$;
- $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels;
- $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes;
- $\Im z$ la partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$;
- L'abréviation $\perp_X \Rightarrow \perp_Y$ signifie que l'orthogonalité au sens X entraîne l'orthogonalité au sens Y.

Soit $(x, y) \in E^2$.

Définition 1.1. [3, 8]. On dit que x est B-orthogonal à y, ce que nous noterons par $x \perp_B y$, si et seulement si $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2. [5]. On dit que x est C-orthogonal à y, ce que nous noterons par $x \perp_C y$, si et seulement si, $\sum_{k=1}^{m} a_k \|b_k x + c_k y\|^2 = 0$, où m est un entier ≥ 2, les a_k, b_k, c_k sont des réels tels que :

$$a_k \neq 0, (k = 1, \ldots, m);\ \sum_{k=1}^{m} a_k b_k^2 = \sum_{k=1}^{m} a_k c_k^2 = 0;\ \sum_{k=1}^{m} a_k b_k c_k = 1.$$

Notons que la C-orthogonalité englobe plusieurs concepts d'orthogonalité, en particulier les deux suivants considérés par James [7] :

1. l'orthogonalité isocèle : $x \perp_I y \iff \|x - y\| = \|x + y\|$.
2. l'orthogonalité de Pythagore : $x \perp_P y \iff \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Définition 1.3. Une orthogonalité $\perp$ est dite :

- continue si $x_n \perp y_n$ pour tout entier n et $\lim_{n \to \infty}(x_n, y_n) = (x, y)$ entraînent $x \perp y$;
- simplifiable si $x \perp y$ entraîne $\lambda x \perp \lambda y$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;
- homogène si $x \perp y$ entraîne $\lambda x \perp \mu y$, pour tous réels λ et μ;
- existante à droite (respectivement à gauche) si pour tout $(x, y) \in E^2$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x \perp \alpha x + y$ (respectivement tel que $\alpha x + y \perp x$);
- unique à droite (respectivement à gauche) si le réel α ci-dessus est unique chaque fois que $x \neq 0$;
- additive à droite (respectivement à gauche) si $z \perp x$ et $z \perp y$ entraînent $z \perp (x + y)$ (respectivement si $x \perp z$ et $y \perp z$ entraînent $(x + y) \perp z$).

Nous rappelons dans ce qui suit quelques résultats qui nous seront utiles dans la suite.

Lemme 1.4. [8]. *Les limites*

$$N_{\pm}(x, y) = \lim_{\lambda \to \pm 0} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda},$$

existent pour tout $(x,y)\in E^2$*. De plus, on a les relations suivantes :*

$$\begin{aligned}
N_-(x,y) &\leq N_+(x,y);\\
|N_\pm(x,y)| &\leq \|y\|;\\
N_+(x,\alpha y) &= \begin{cases} \alpha N_+(x,y) & \text{si } \alpha\geq 0;\\ \alpha N_-(x,y) & \text{si } \alpha\leq 0;\end{cases}\\
N_+(x,\alpha x+y) &= \alpha\|x\| + N_+(x,y);\\
N_-(x,\alpha x+y) &= \alpha\|x\| + N_-(x,y).
\end{aligned}$$

Définition 1.5. La norme est dite Gâteaux-différentiable (G-différentiable, en abrégé) en x si $N_+(x,y) = N_-(x,y) := N(x,y)$, pour tout $y\in E$.

Lemme 1.6. ([5], lemme 2.7). *S'il existe deux réels* λ *et* μ, $\lambda+\mu\neq 0$, *tels que* $\lambda N_+(x,y)+\mu N_-(x,y)$ *soit une fonction continue de* (x,y), $x\neq 0$, *alors la norme est G-différentiable en dehors de l'origine.*

Lemme 1.7. [8]. *La* B*-orthogonalité possède les propriétés suivantes :*

1. *La* B*-orthogonalité est homogène;*
2. *La* B*-orthogonalité est existante à droite, et l'on a :*

   $$x\perp_B \alpha x+y \iff N_-(x,y)\leq -\alpha\|x\|\leq N_+(x,y).$$

   En particulier si la norme est G-différentiable en x*, alors* $x\perp_B y$ *si et seulement si* $N(x,y)=0$*;*
3. *La* B*-orthogonalité est existante à gauche, et l'on a :*

   $$\beta x+y\perp_B x \iff \|\beta x+y\| = Inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\|\lambda x+y\|;$$

4. *La* B*-orthogonalité est unique à droite si et seulement si la norme est G-différentiable en dehors de l'origine;*
5. *La* B*-orthogonalité est unique à gauche si et seulement si l'espace est strictement convexe (i.e. sa sphère unité ne contient pas de segments).*

Lemme 1.8. ([5], lemmes 4.1 et 4.2). *Soit* P *un plan vectoriel inclus dans* E *(i.e. un sous-espace vectoriel de* E *de dimension 2),* $C=S\cap P$, $(u,v)\in C^2$ *et* $\varphi(\lambda)=\|u+\lambda v\|^2$*. On a alors :*

1. $\varphi(\lambda)=\lambda^2+O(\lambda)$ *lorsque* $|\lambda|\to+\infty$*;*
2. *Il existe une partie dense* D *de* C *telle que pour tout* $(u,v)\in D\times P$ *tel que* $u\perp_B v$*, on a :* $\varphi(\lambda)=1+O(\lambda^2)$ *lorsque* $\lambda\to 0$*.*

Lemme 1.9. ([5], lemme 2.2). *Pour tout* $(x,y)\in E^2$ *et pour tout réel* α*, on a la formule suivante :*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\frac{\|(\alpha+\lambda)x+y\|^2-\|\lambda x+y\|^2}{\lambda} = 2\alpha\|x\|^2.$$

Lemme 1.10. [7]. *E est préhilbertien si et seulement si pour tout plan vectoriel P inclus dans E et pour tout $u \in P$, il existe $v \in P$, $v \neq 0$, tel que $\|u - \lambda v\| = \|u + \lambda v\|$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

2. Généralisation de la C-orthogonalité. Soit (Ω, μ) un espace mesuré, (μ mesure positive), a, b et c trois fonctions définies sur Ω à valeurs réelles, μ-mesurables telles que $a(\omega) \neq 0$ μ-p.p., ab^2 et ac^2 sont μ-intégrables sur Ω (donc la fonction abc est aussi μ-intégrable sur Ω, car $2|abc| \leq |ac^2| + |ab^2|$), et vérifient les équations suivantes :

$$\int_\Omega a(\omega) b^2(\omega) d\mu(\omega) = 0, \tag{1}$$

$$\int_\Omega a(\omega) c^2(\omega) d\mu(\omega) = 0, \tag{2}$$

$$\int_\Omega a(\omega) b(\omega) c(\omega) d\mu(\omega) = 1. \tag{3}$$

Si l'espace est préhilbertien et la norme provient du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors on peut écrire pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$2\langle x, y \rangle = \int_\Omega a(\omega) \|b(\omega)x + c(\omega)y\|^2 d\mu(\omega).$$

De telle sorte que l'orthogonalité de x à y puisse s'exprimer par :

$$x \perp y \iff \int_\Omega a(\omega) \|b(\omega)x + c(\omega)y\|^2 d\mu(\omega) = 0.$$

Ceci nous amène à formuler la définition suivante :

Définition 2.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à 2 et soit $(x, y) \in E^2$. On dira que x est C'-orthogonal à y, ce que nous noterons par $x \perp_{C'} y$, si et seulement si,

$$\int_\Omega a(\omega) \|b(\omega)x + c(\omega)y\|^2 d\mu(\omega) = 0.$$

Exemple 2.2. Soit m un entier ≥ 2. Lorsqu'on prend $\Omega = \{1, \ldots, m\}$, μ est la mesure du dénombrement, $a(\omega), b(\omega)$ et $c(\omega)$ des réels tels que :

$$a(\omega) \neq 0,\ \omega = 1, \ldots, m\,,$$

$$\sum_{\omega=1}^{m} a(\omega) b^2(\omega) = \sum_{\omega=1}^{m} a(\omega) c^2(\omega) = 0\,, \qquad \sum_{\omega=1}^{m} a(\omega) b(\omega) c_(\omega) = 1\,,$$

alors on retrouve la C-orthogonalité introduite par Carlsson [5].

Remarque 2.3.

1. la C'-orthogonalité est simplifiable et continue (au sens de la définition 1.3) ; Cette dernière propriété se démontre facilement en utilisant le théorème de convergence dominée.

2. La relation T définie sur $E \times E$ par :

$$xTy \iff y \perp_{C'} x,$$

est aussi une une C'-orthogonalité. Symboliquement si $\perp_{C'}=\perp_{(\Omega,a,b,c)}$, alors $T=\perp_{(\Omega,a,c,b)}$ (les rôles des fonctions b et c sont intervertis). De ce fait, si la famille des C'-orthogonalités vérifie une propriété à droite (telle que l'existence, l'additivité, ...), elle vérifiera aussi la propriété analogue à gauche et vice-versa.

Théorème 2.4. *La C'-orthogonalité est existante à droite et à gauche. De plus si α et β sont deux réels tels que $x \perp_{C'} \alpha x + y$ et $\beta x + y \perp_{C'} x$, alors on a les inégalités suivantes :*

$$|\alpha|.\|x\| \leq \|y\| \int_\Omega |a(\omega)c(\omega)| \cdot |b(\omega) + \alpha c(\omega)| d\mu(\omega), \tag{4}$$

$$|\beta|.\|x\| \leq \|y\| \int_\Omega |a(\omega)b(\omega)| \cdot |c(\omega) + \beta b(\omega)| d\mu(\omega). \tag{5}$$

Démonstration. Grâce à la deuxième proposition de la remarque 2.3, il suffit de démontrer l'existence à droite et l'inégalité (4). Soit $(x,y) \in E^2$. Si $x = 0$, n'importe quel réel α vérifierait $x \perp_{C'} \alpha x + y$ et l'inégalité (4). Supposons $x \neq 0$ et posons

$$F(\lambda) = \int_\Omega a(\omega)\|b(\omega)x + c(\omega)(\lambda x + y)\|^2 d\mu(\omega) \ (\lambda \in \mathbb{R}).$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, il est facile de voir que F est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, en tenant compte de l'équation (2), on peut écrire pour $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{F(\lambda)}{\lambda} &= \int_\Omega a(\omega) \frac{\|[b(\omega) + \lambda c(\omega)]x + c(\omega)y\|^2 - \|c(\omega)(\lambda x + y)\|^2}{\lambda} d\mu(\omega) \\ &= \int_{c\neq 0} f(\lambda,\omega) d\mu(\omega) + \frac{\|x\|^2}{\lambda} \int_{c=0} a(\omega) b^2(\omega)\, d\mu(\omega). \end{aligned}$$

où

$$f(\lambda,\omega) = a(\omega)c^2(\omega) \frac{\left\|\left[b(\omega)c^{-1}(\omega) + \lambda\right] x + y\right\|^2 - \|\lambda x + y\|^2}{\lambda}$$

Le deuxième terme de la somme précédente tend vers zéro lorsque $|\lambda| \to \infty$. Par ailleurs, d'après le lemme 1.9 :

$$\begin{aligned} \lim_{|\lambda|\to\infty} f(\lambda,.) &= ac^2 \lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{\|[bc^{-1} + \lambda]x + y\|^2 - \|\lambda x + y\|^2}{\lambda} \\ &= 2abc\|x\|^2. \end{aligned}$$

Si $|\lambda| \geq 1$, alors on a la majoration suivante (valable sur $\{\omega \in \Omega : c(\omega) \neq 0\}$) :

$$\begin{aligned} |f(\lambda,\cdot)| &= |ac^2| \times \left|\|(bc^{-1} + \lambda)x + y\| - \|\lambda x + y\|\right| \times \frac{\|(bc^{-1} + \lambda)x + y\| + \|\lambda x + y\|}{|\lambda|} \\ &\leq 2|abc| \times \left[\|x\|^2 + \|x\| \cdot \|y\|\right] + \|x\|^2 \cdot |ab^2|. \end{aligned}$$

La fonction majorante étant μ-intégrable, on a d'après le théorème de convergence dominée et la relation (3) :

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{F(\lambda)}{\lambda} = 2\|x\|^2 \int_{c\neq 0} a(\omega)b(\omega)c(\omega)d\mu(\omega) = 2\|x\|^2 > 0. \tag{6}$$

Donc F change de signe sur $\mathbb{R}$, et par conséquent, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $F(\alpha) = 0$, ou encore tel que $x \perp_{C'} \alpha x + y$.

Démontrons à présent l'inégalité (4). En effet on a :

$$F(\alpha) = \int_\Omega a(\omega)\|b(\omega)x + c(\omega)(\alpha x + y)\|^2 d\mu(\omega) = 0.$$

Donc

$$\int_{a>0} a\|[b+\alpha c]x + cy\|^2 d\mu = -\int_{a<0} a\|[b+\alpha c]x + cy\|^2 d\mu. \tag{7}$$

En utilisant les équations (1), (2), (3) et (7) et les inégalités suivantes :

$$\left[\|b+\alpha c|.\|x\| - \|c\|\cdot\|y\|\right]^2 \leq \|[b+\alpha c]x + cy\|^2,$$
$$\|[b+\alpha c]x + cy\|^2 \leq \left[\|b+\alpha c|\cdot\|x\| + \|c\|\cdot\|y\|\right]^2,$$

on obtient :

$$2\alpha\|x\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\| \int_\Omega \|a\cdot c\|\cdot\|b+\alpha c\|d\mu \leq 0,$$
$$2\alpha\|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| \int_\Omega \|a\cdot c\|\cdot\|b+\alpha c\|d\mu \geq 0,$$

d'où l'inégalité (4). $\square$

Corollaire 2.5. *Pour tout plan vectoriel P inclus dans E et pour tout $u \in P$, il existe $v \in P$, $v \neq 0$ tel que u soit C'-orthogonal à v.*

Démonstration. Le résultat est trivial si $u = 0$. Si $u \neq 0$, soit $w \in P$, w et u linéairement indépendants, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que u soit C'-orthogonal à $\alpha u + w$. Le vecteur $v = \alpha u + w$ répond à la question. $\square$

Le théorème 3.4 de James [8] donne une formule qui établissant un lien entre l'orthogonalité isocèle et les dérivées de la norme. Le théorème suivant généralise cette formule. Il nous sera d'une grande utilité pour étudier l'homogénéité de la C'-orthogonalité.

Théorème 2.6. *Soit $(x, y) \in E^2$, $x \neq 0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $\alpha(\lambda)$ et $\beta(\lambda)$ des réels tels que $\lambda x \perp_{C'} \alpha(\lambda)x + y$ et $\beta(\lambda)x + y \perp_{C'} \lambda x$. On a alors les formules suivantes :*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \alpha(\lambda) = \alpha(x, y); \tag{8}$$
$$\lim_{\lambda\to-\infty} \alpha(\lambda) = -\alpha(-x, y); \tag{9}$$
$$\lim_{\lambda\to+\infty} \beta(\lambda) = \alpha(x, y); \tag{10}$$
$$\lim_{\lambda\to-\infty} \beta(\lambda) = -\alpha(-x, y); \tag{11}$$

où

$$\alpha(x,y) = -\frac{pN_+(x,y) + (1-p)N_-(x,y)}{\|x\|};\ p = \int_{bc>0} a(\omega)b(\omega)c(\omega)\,d\mu(\omega).$$

Démonstration. On va démontrer seulement la formule (8), les autres se démontrent de façon analogue. Puisque $(\lambda x) \perp_{C'} [\lambda^{-1}\alpha(\lambda)](\lambda x)+y$, on peut écrire d'après l'inégalité (4) :

$$|\lambda^{-1}\alpha(\lambda)| \cdot \|(\lambda x)\| \leq \|y\| \cdot \int_\Omega |a \cdot c| \cdot |b + \lambda^{-1}\alpha(\lambda)c|d\mu.$$

On en déduit

$$|\alpha(\lambda)| \times \left(1 - \frac{A}{|\lambda|}\right) \leq B, \tag{12}$$

où

$$A = \frac{\|y\|}{\|x\|}\int_\Omega |ac^2|d\mu;\ B = \frac{\|y\|}{\|x\|}\int_\Omega |a.b.c|\,d\mu.$$

Ce qui prouve que $\alpha(\lambda)$ est bornée pour $|\lambda|$ assez grand.

Soit maintenant (λ_n) une suite de réels strictement positifs de limite $+\infty$. La suite $\big(\alpha(\lambda_n)\big)$ étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente qu'on notera pour simplifier (α_n). Soit $\alpha = \lim_{n\to\infty}\alpha_n$, et posons :

$$\begin{aligned}
U_n &= \int_\Omega a\frac{\|[b\lambda_n + c\alpha_n]x + cy\|^2}{\lambda_n}\,d\mu,\\
X_n &= \int_\Omega a\frac{\|[b\lambda_n + c\alpha_n]x + cy\|^2 - \|[b\lambda_n + c\alpha]x + cy\|^2}{\lambda_n}\,d\mu,\\
Y_n &= \int_{b\neq 0} ab^2\frac{\left\|[\lambda_n + b^{-1}c\alpha]x + b^{-1}cy\right\|^2 - \left\|\lambda_n x + b^{-1}cy\right\|^2}{\lambda_n}\,d\mu,\\
Z_n &= \frac{\|\alpha x + y\|^2}{\lambda_n}\int_{b=0} ac^2\,d\mu,\\
T_n &= \int_{b\neq 0} ab^2\frac{\left\|\lambda_n x + b^{-1}cy\right\|^2}{\lambda_n}\,d\mu.
\end{aligned}$$

Puisque $\lambda_n x \perp_{C'} \alpha_n x + y$, alors on a :

$$U_n \ = \ X_n + Y_n + Z_n + T_n = 0. \tag{13}$$

Il est facile de voir que

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = 0. \tag{14}$$

D'autre part, on a la majoration suivante :

$$|X_n| \leq \|x\|.|\alpha_n - \alpha| \times \int_\Omega |a \cdot c|\frac{\|[b\lambda_n + \alpha_n c]x + cy\| + \|[b\lambda_n + \alpha c]x + cy\|}{\lambda_n}d\mu.$$

L'intégrale ci-dessus peut être majorée indépendamment de n, donc

$$\lim_{n\to\infty} X_n = 0. \tag{15}$$

Écrivons $Y_n = \int_{b\neq 0} f_n(\omega)d\mu(\omega)$. En utilisant le lemme 1.8, on peut écrire

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = 2\alpha\|x\|^2 a(\omega)b(\omega)c(\omega).$$

D'autre part, pour n assez grand, on a $\lambda_n \geq 1$ et

$$|f_n| \leq 2|\alpha|.\|x\|^2 \cdot |abc| + |\alpha|\|x\|[2\|y\| + |\alpha|\|x\|] \cdot |ac^2|.$$

La fonction majorante étant μ-intégrable, en utilisant le théorème de convergence dominée et la relation (3), on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = 2\alpha\|x\|^2. \tag{16}$$

Grâce à la relation (1), on peut écrire :

$$\begin{aligned} T_n &= \int_{b\neq 0} ab^2 \frac{\|\lambda_n x + b^{-1}cy\|^2 - \|\lambda_n x\|^2}{\lambda_n}\, d\mu \\ &= \int_{b\neq 0} ab^2[\|\lambda_n x + b^{-1}cy\| - \|\lambda_n x\|] \times \frac{\|\lambda_n x + b^{-1}cy\| + \|\lambda_n x\|}{\lambda_n}\, d\mu \\ &= \int_{b\neq 0} g_n\, d\mu. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\lim_{n\to\infty} g_n(\omega) = 2\|x\|.a(\omega)b^2(\omega)N_+\left(x, b^{-1}(\omega)c(\omega)y\right).$$

Or d'après le lemme 1.4, on a :

$$N_+\left(x, b^{-1}(\omega)c(\omega)y\right) = \begin{cases} b^{-1}(\omega)c(\omega)N_+(x,y) & \text{si } b^{-1}(\omega)c(\omega) \geq 0, \\ b^{-1}(\omega)c(\omega)N_-(x,y) & \text{si } b^{-1}(\omega)c(\omega) \leq 0. \end{cases}$$

Par ailleurs on a pour n assez grand

$$|g_n| \leq 2\|x\| \cdot |abc| + \|y\| \cdot |ac^2|.$$

On réapplique le théorème de convergence dominée à nouveau et on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} T_n = 2\|x\|[pN_+(x,y) + (1-p)N_-(x,y)], \tag{17}$$

où

$$p = \int_{bc>0} abc\, d\mu = 1 - \int_{bc\leq 0} abc\, d\mu.$$

En tenant compte des équations (13) à (17), on obtient finalement :

$$\alpha = \alpha(x, y) = -\frac{pN_+(x, y) + (1-p)N_-(x, y)}{\|x\|}.$$

Ainsi pour toute suite (λ_n) de limite $+\infty$, il existe une sous-suite de $(\alpha(\lambda_n))$ qui converge vers $\alpha(x, y)$. Donc

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \alpha(\lambda) = \alpha(x, y)$$

D'où la formule (8). $\square$

3. Solution de l'équation fonctionnelle $\int_\Delta p(\omega)\varphi(\lambda q(\omega))d\mu(\omega) = C_1 + \lambda^2 C_2$**.** Soit (Δ, μ) un espace mesuré et soit p et q deux fonctions définies sur Δ à valeurs réelles non nulles, μ-mesurables et telles que p et pq^2 soient μ-intégrables sur Δ. Dans ce qui suit, on va chercher les fonctions continues $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation fonctionnelle avec conditions asymptotiques suivante :

$$(E) \qquad \begin{cases} \int_\Delta p(\omega)\varphi(\lambda q(\omega))d\mu(\omega) = C_1 + \lambda^2 C_2 & (\lambda \in \mathbb{R}); \\ \varphi(\lambda) = 1 + O(\lambda^2) & \text{lorsque } \lambda \to 0; \\ \varphi(\lambda) = \lambda^2 + O(\lambda) & \text{lorsque } |\lambda| \to +\infty\ ; \end{cases}$$

où

$$C_1 = \int_\Delta p(\omega)\, d\mu(\omega);\ C_2 = \int_\Delta p(\omega)q^2(\omega)\, d\mu(\omega);\ \int_\Delta p(\omega)q(\omega)\, d\mu(\omega) = 1.$$

Commençons par établir le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Soit A et B deux fonctions réelles μ-mesurables telles que A, Ae^B et Ae^{2B} soient μ-intégrables sur Δ et telles que la fonction analytique*

$$z \longmapsto \Phi(z) = \int_\Delta A(\omega)e^{izB(\omega)}\, d\mu(\omega)$$

ne soit pas identiquement nulle sur la bande horizontale

$$H = \{z \in \mathbb{C} : -2 < \Im z < 0\}.$$

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}, d\lambda)$ telle que :

$$\begin{cases} \int_\Delta A(\omega)f\left(\lambda + B(\omega)\right)\, d\mu(\omega) = 0 & \lambda \in \mathbb{R}, \\ f(\lambda) = O(e^{2\lambda}) & \textit{lorsque } \lambda \to -\infty, \\ f(\lambda) = O(e^{\lambda}) & \textit{lorsque } \lambda \to +\infty. \end{cases}$$

Alors f est presque partout nulle sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Posons

$$J = \{z \in \mathbb{C} : |\ \Im z\ | < \frac{1}{4}\},$$

$$g(\lambda) = e^{-3\lambda/2} f(\lambda),$$

$$G(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{-i\lambda z}\, d\lambda \text{ (transformée de Fourier de } g).$$

On a
$$e^{|\lambda|/4}g(\lambda) = O\left(e^{-|\lambda|/4})\right) \text{ lorsque } |\lambda| \to +\infty.$$
Donc $e^{|\lambda|/4}g(\lambda)$ est sommable sur $\mathbb{R}$, et par suite G est définie et analytique sur la bande J. D'autre part, on a :
$$e^{-i\lambda z}e^{-\frac{3\lambda}{2}} \int_\Delta A(\omega)f\left(\lambda + B(\omega)\right)\, d\mu(\omega) = 0,\ \forall(\lambda, z) \in \mathbb{R} \times (J \cap H)\,.$$
Intégrons cette dernière équation par rapport à λ sur $\mathbb{R}$, pour obtenir :
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda z}e^{-\frac{3\lambda}{2}}\, d\lambda \int_\Delta A(\omega)f\left(\lambda + B(\omega)\right)\, d\mu(\omega)\\ &= \int_\Delta A(\omega)\, d\mu(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda z}e^{-\frac{3\lambda}{2}} f\left(\lambda + B(\omega)\right)\, d\lambda\\ &= \int_\Delta A(\omega)e^{(iz+\frac{3}{2})B(\omega)}\, d\mu(\omega) \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}g(t)\, dt\\ &= \Phi\left(z - i\frac{3}{2}\right).G(z)\ =\ 0.\end{aligned}$$
L'interversion des intégrales sur $\mathbb{R}$ et sur Δ est licite grâce au théorème de Fubini et à la majoration suivante :
$$|A(\omega)e^{(iz+\frac{3}{2})B(\omega)}e^{-itz}g(t)| \leq |A(\omega)| \max(e^{B(\omega)}, e^{2B(\omega)}) \times |e^{-itz}g(t)|.$$
La fonction majorante étant intégrable sur $\Delta \times \mathbb{R}$, pour tout $z \in J \cap H$.

La fonction Φ n'étant pas identiquement nulle sur H, l'ensemble de ses zéros est formé de points isolés. On déduit alors de l'équation :
$$\forall z \in J \cap H,\ \Phi(z - i\frac{3}{2}).G(z) = 0,$$
que G est nulle sur $J \cap H$ et donc aussi sur $\mathbb{R}$, par continuité. Donc g est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$, ainsi que f. $\square$

Corollaire 3.2. *Soit P et Q deux fonctions définies sur Δ à valeurs réelles, $Q > 0$ μ-p.p sur Δ, telles que P et PQ^2 soient μ-intégrables sur Δ et telles que la fonction $z \mapsto \int_\Delta P(\omega)Q^{iz}(\omega)\, d\mu(\omega)$ ne soit pas identiquement nulle.*

Si h est une fonction continue sur $]0, +\infty[$ telle que :
$$\begin{cases} \int_\Delta P(\omega)h(\lambda Q(\omega))\, d\mu(\omega) = 0 & (\lambda > 0), \\ h(\lambda) = O(\lambda) & \text{lorsque } \lambda \to +\infty, \\ h(\lambda) = O(\lambda^2) & \text{lorsque } \lambda \to 0^+. \end{cases}$$
Alors h est identiquement nulle.

Démonstration. En posant
$$A = P,\ B = \log Q \text{ et } f(\lambda) = h(e^\lambda),$$
on se ramène à la situation du lemme 3.1. On en déduit que h est presque partout nulle, et puisqu'elle est continue, elle est donc identiquement nulle. $\square$

Théorème 3.3. *Soit f une fonction continue vérifiant :*

$$\begin{cases} \int_\Delta p(\omega) f(\lambda q(\omega)) d\mu(\omega) = 0 & (\lambda \in \mathbb{R}), \\ f(\lambda) = O(\lambda^2) & \text{lorsque } \lambda \to 0, \\ f(\lambda) = O(\lambda) & \text{lorsque } |\lambda| \to +\infty . \end{cases}$$

Alors

1. *f est paire s'il existe $z \in \mathbb{C}$, $-2 < \Im z < 0$, tel que $\int_\Delta pq|q|^{iz-1}\, d\mu \neq 0$.*
2. *f est impaire s'il existe $z \in \mathbb{C}$, $-2 < \Im z < 0$, tel que $\int_\Delta p|q|^{iz} d\mu \neq 0$.*

Démonstration. Posons

$$f_1(\lambda) = f(\lambda) + f(-\lambda); \qquad f_2(\lambda) = f(\lambda) - f(-\lambda);$$

$$p_1 = p; \qquad q_1 = |q|; \qquad p_2 = \frac{pq}{|q|}; \qquad q_2 = |q|.$$

Il est facile de voir que pour $k = 1$ ou 2, on a :

$$\begin{cases} \int_\Delta p_k(\omega) f_k(\lambda q_k(\omega))\, d\mu(\omega) = 0 & (\lambda > 0), \\ f_k(\lambda) = O(\lambda) & \text{lorsque } \lambda \to +\infty, \\ f_k(\lambda) = O(\lambda^2) & \text{lorsque } \lambda \to 0^+ . \end{cases}$$

On applique alors le corollaire 3.2 aux fonctions f_1 et f_2, pour en déduire le théorème 3.3. $\square$

Corollaire 3.4. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue solution de l'équation fonctionnelle (E). Alors φ est paire.*

Démonstration. On applique le théorème 3.3 à $f(\lambda) = \varphi(\lambda) - (1 + \lambda^2)$ en posant $z = -i$. $\square$

Remarque 3.5. Si en plus des conditions du corollaire 3.4, il existe $z \in \mathbb{C}$, $-2 < \Im z < 0$, tel que $\int_\Delta p|q|^{iz}\, d\mu \neq 0$, alors $\varphi(\lambda) = 1 + \lambda^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Ce n'est pas toujours le cas comme le montre l'exemple suivant :

$$\Delta = \{1, 2\}; \quad \mu\{1\} = \mu\{2\} = 1; \quad p(1) = \frac{1}{2}; \quad p(2) = -\frac{1}{2}; \quad q(1) = q(2) = 1.$$

L'équation fonctionnelle associée à ces données s'écrit : $\varphi(\lambda) - \varphi(-\lambda) = 0$. N'importe quelle fonction paire en est solution.

4. Étude de l'homogénéité et de l'additivité de la C'-orthogonalité. Nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.1. *E est préhilbertien si et seulement si la C'-orthogonalité est homogène.*

Démonstration. Il est clair que la condition est nécessaire. Inversement supposons-la vérifiée. Soit P un plan vectoriel inclus dans E, $C = S \cap P = \{x \in P : \|x\| = 1\}$ et soit $u \in P$, $u \neq 0$. D'après le corollaire 2.5, il existe $v \in P$, $v \neq 0$ tel que $u \perp_{C'} v$.

Par hypothèse, on a $\lambda u \perp_{C'} v$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On en déduit, d'après le théorème 2.6, que $\alpha(u,v) = -\alpha(-u,v) = 0$, ou encore,

$$pN_+(u,v) + (1-p)N_-(u,v) = 0, \tag{18}$$
$$pN_-(u,v) + (1-p)N_+(u,v) = 0. \tag{19}$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient $N_+(u,v)+N_-(u,v) = 0$. Donc $N_-(u,v) \leq 0 \leq N_+(u,v)$ et $u \perp_B v$, d'après le lemme 1.7.

Soit D la partie dense dans C, fournie par le lemme 1.8, et supposons pour commencer que $u \in D$. Posons $\varphi(\lambda) = \|u + \lambda v\|^2$. D'après le lemme 1.8, on a :

$$\varphi(\lambda) = 1 + O(\lambda^2) \quad \text{lorsque } \lambda \to 0;$$
$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + O(\lambda) \quad \text{lorsque } |\lambda| \to +\infty.$$

Par ailleurs le fait que u soit C'-orthogonal à λv se traduit par :

$$\int_\Omega a(\omega)\|b(\omega)u + \lambda c(\omega)v\|^2 \, d\mu(\omega) = 0.$$

Ou encore :

$$\int_\Delta p(\omega)\varphi(\lambda q(\omega)) \, d\mu(\omega) = C_1 + \lambda^2 C_2, \tag{20}$$

où :

$$\Delta = \{\omega \in \Omega : b(\omega)c(\omega) \neq 0\};\ p(\omega) = a(\omega)b^2(\omega);\ q(\omega) = c(\omega)b^{-1}(\omega)\ (\omega \in \Delta).$$

$$C_1 = -\int_{c=0} a(\omega)b^2(\omega)\,d\mu(\omega) = \int_\Delta a(\omega)b^2(\omega)\,d\mu(\omega) = \int_\Delta p(\omega)\,d\mu(\omega).$$
$$C_2 = -\int_{b=0} a(\omega)c^2(\omega)\,d\mu(\omega) = \int_\Delta a(\omega)c^2(\omega)\,d\mu(\omega) = \int_\Delta p(\omega)q^2(\omega)\,d\mu(\omega).$$

D'autre part, on a grâce à la relation (3) :

$$\int_\Delta p(\omega)q(\omega)\,d\mu(\omega) = \int_\Omega a(\omega)b(\omega)c(\omega)\,d\mu(\omega) = 1.$$

Toutes les conditions du corollaire 3.4 sont réunies, donc φ est paire. Donc pour tout $u \in D$, il existe $v \in P$, $v \neq 0$, tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on ait : $\|u - \lambda v\| = \|u + \lambda v\|$. Posons $w = v/\|v\|$. On a alors $w \in C$ et

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|u + \lambda w\| = \|u - \lambda w\|. \tag{$*$}$$

Si maintenant $u \in P$, $u \neq 0$ est arbitraire, alors on peut trouver une suite (u_n) d'éléments de D qui converge vers $u/\|u\|$. Pour tout entier n, on peut trouver $w_n \in C$ tel que (u_n, w_n) vérifie la relation $(*)$. Par compacité de C, on peut extraire de (w_n) une sous-suite (w_{n_k}) qui converge vers un élément $w \in C$. En passant à la limite, $(k \to +\infty)$, on en déduit que (u,w) vérifie $(*)$, et que E est préhilbertien, d'après le lemme 1.10. $\square$

Théorème 4.2. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) E *est préhilbertien;*
(2) *Pour tout* $(u, v) \in E^2$, $u \neq 0$, *tel que* $u \perp_{C'} v$, *il existe* $\delta = \delta(u, v) > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \in]0, \delta[$, *on a* $u \perp_{C'} \lambda v$*;*
(3) *Il existe deux réels* λ *et* μ, $\lambda + \mu \neq 0$, *tels que pour tout* $(u, v) \in E^2$, $u \neq 0$, *on a :*

$$u \perp_{C'} v \Rightarrow \lambda N_+(u, v) + \mu N_-(u, v) = 0.$$

Démonstration. L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est évidente. Supposons maintenant que (2) soit vraie, et soit $(u, v) \in E^2$ tel que $u \perp_{C'} v$. Posons

$$F(\lambda) = \int_\Omega a(\omega)\|b(\omega)u + \lambda c(\omega)v\|^2 \, d\mu(\omega), \ (\lambda \in]0, \delta[).$$

F admet une dérivée à droite $F'_d(0)$ en 0 et l'on a :

$$F'_d(0) = 2\|u\|[pN_+(u, v) + (1 - p)N_-(u, v)] = 0, \tag{21}$$

où $p = \int_{bc>0} abc \, d\mu$. On en déduit la proposition (3), en posant $\lambda = p$ et $\mu = 1 - p$.

Supposons maintenant que la proposition (3) soit vérifiée. Soit $(u, v) \in E^2$, $u \neq 0$, et soit $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $u \perp_{C'} \beta u + v$. En utilisant le lemme 1.4, on aurait :

$$\lambda N_+(u, \beta u + v) + \mu N_-(u, \beta u + v) = (\lambda + \mu)\beta\|u\| + \lambda N_+(u, v) + \mu N_-(u, v) = 0.$$

Donc

$$\beta = -\frac{\lambda N_+(u, v) + \mu N_-(u, v)}{(\lambda + \mu)\|u\|}.$$

On en déduit que la C'-orthogonalité est unique à droite et que :

$$u \perp_{C'} \beta u + v \iff \beta = -\frac{\lambda N_+(u, v) + \mu N_-(u, v)}{(\lambda + \mu)\|u\|} = \beta(u, v). \tag{22}$$

Soit (u_n, v_n) une suite d'éléments de $E \times E$, $u_n \neq 0$, convergente vers $(u, v) \in E \times E$, $u \neq 0$. Posons $\beta_n = \beta(u_n, v_n)$. Notons d'abord que la suite (β_n) est bornée (car d'après le lemme 1.4, $|N_\pm(u_n, v_n)| \leq \|v_n\|$ et les suites $(\|v_n\|)$ et $(\|u_n\|^{-1})$ sont bornées). On peut donc extraire de (β_n) une sous-suite $(\beta_{n'})$ qui est convergente. Soit $\beta = \lim_{n' \to \infty} \beta_{n'}$. Par continuité de $\perp_{C'}$, on a $u \perp_{C'} \beta u + v$. On en déduit d'après (22), que $\beta = \beta(u, v)$, et que :

$$\lim_{n \to \infty} \beta(u_n, v_n) = \beta(u, v). \tag{23}$$

Donc $\beta(u, v)$ et $\lambda N_+(u, v) + \mu N_-(u, v)$ sont des fonctions continues de (u, v), $u \neq 0$. D'après le lemme 1.6, la norme est G-différentiable en dehors de l'origine, et la relation (22) devient :

$$u \perp_{C'} v \iff N(u, v) = 0 \iff u \perp_B v. \tag{24}$$

Ainsi la C'-orthogonalité est équivalente à la B-orthogonalité, donc elle est homogène et l'espace est préhilbertien, d'après le théorème 4.1. $\square$

Corollaire 4.3. *E est préhilbertien si et seulement si la C'-orthogonalité est additive à gauche (ou à droite).*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Inversement supposons que la C'-orthogonalité soit additive à gauche et soit $(u, v) \in E^2$, $u \neq 0$ tel que $u \perp_{C'} v$. Par hypothèse on a $nu \perp_{C'} v$, pour tout entier n. D'après le théorème 2.6, on a $\alpha(u, v) = 0$, et par suite $pN_+(u, v) + (1-p)N_-(u, v) = 0$. D'après le théorème 4.2, l'espace E est préhilbertien. Grâce à la deuxième proposition de la remarque 2.3, on aboutirait à la même conclusion, si on avait supposé que la C'-orthogonalité est additive à droite. □

5. Relations entre la C'-orthogonalité et la B-orthogonalité. Le résultat suivant généralise [6].

Théorème 5.1. *E est préhilbertien si et seulement si $\perp_B \Rightarrow \perp_{C'}$.*

Démonstration. La condition est manifestement nécessaire. Inversement supposons-la remplie. Soit P un plan vectoriel inclus dans E et soit $u \in P$. Il existe $v \in P$, $v \neq 0$, tel que $u \perp_B v$ (l'existence de v se démontre de la même manière que dans le corollaire 2.5). Puisque $\perp_B$ est homogène et que $\perp_B \Rightarrow \perp_{C'}$, on aurait $u \perp_{C'} \lambda v$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans la démonstration du théorème 4.1, on obtiendrait que la fonction $\varphi(\lambda) = \|u + \lambda v\|^2$ est paire, c'est-à-dire :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|u + \lambda v\| = \|u - \lambda v\|.$$

On en déduit que E est préhilbertien, en utilisant le lemme 1.10. □

Théorème 5.2. *E est préhilbertien si et seulement si $\perp_{C'} \Rightarrow \perp_B$.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, on ne perd pas en généralité en supposant en plus que E est de dimension deux[1]. Démontrons d'abord que sous ces deux conditions, l'espace est strictement convexe. Sinon, il existerait $(x, y) \in S^2$, $x \neq y$ tel que $[x, y] \subset S$ et tel que x soit un point extrémal de S (i.e. si $x = \lambda u + (1-\lambda)v$, avec $0 < \lambda < 1$ et $(u, v) \in S^2$, alors $u = v$). Posons $u_i = \lambda_i x + (1-\lambda_i)y$, $i = 1$ ou 2, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$; $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, 2$. Puisque la C'-orthogonalité est existante à droite, on peut associer à tout réel non nul λ un réel $\alpha(\lambda)$ tel que $\lambda u_1 \perp_{C'} \alpha(\lambda)u_1 + u_2$. Comme on a $\perp_{C'} \Rightarrow \perp_B$, et que $\perp_B$ est homogène, on aurait $u_1 \perp_{C'} \alpha(\lambda)u_1 + u_2$. D'après la deuxième proposition du lemme 1.7, on en déduirait que :

$$N_-(u_1, u_2) \leq -\alpha(\lambda) \leq N_+(u_1, u_2). \tag{25}$$

Par ailleurs puisque $[x, y] \subset S$, on a $\|\beta x + \gamma y\| = |\beta + \gamma|$, si $\beta\gamma \geq 0$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} N_\pm(u_1, u_2) &= \lim_{\lambda \to \pm 0} \frac{\|u_1 + \lambda u_2\| - 1}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \to \pm 0} \frac{\|(\lambda_1 + \lambda\lambda_2)x + [1 - \lambda_1 + \lambda(1-\lambda_2)]y\| - 1}{\lambda} \\ &= 1. \end{aligned}$$

[1] Pour qu'un espace soit préhilbertien, il faut et il suffit que tous ses sous-espaces de dimension 2 soient préhilbertiens. C'est une conséquence directe du lemme 1.10.

(car pour $|\lambda|$ assez petit on a : $\lambda_1 + \lambda\lambda_2 > 0$; $1 - \lambda_1 + \lambda(1-\lambda_2) > 0$).

Donc $\alpha(\lambda) = -1$ et $\lambda u_1 \perp_{C'} -u_1 + u_2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons

$$v = \frac{x-y}{\|x-y\|} \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda) = \|u_1 + \lambda v\|^2.$$

Puisque $\perp_{C'}$ est simplifiable, on a $u_1 \perp_{C'} \lambda v$. Donc on peut écrire :

$$\int_\Omega a(\omega)\|b(\omega)u_1 + \lambda c(\omega)v\|^2\, d\mu(\omega) = 0,$$

ou encore, en reprenant les notations déjà utilisées dans la démonstration du théorème 4.1 :

$$\int_\Delta p(\omega)\varphi(\lambda q(\omega))\, d\mu(\omega) = C_1 + \lambda^2 C_2. \tag{26}$$

D'autre part,

$$\left|\varphi(\lambda) - \lambda^2\right| = |\|u_1 + \lambda v\| - \|\lambda v\|| \times \left[\|u_1 + \lambda v\| + \|\lambda v\|\right] \leq 1 + 2|\lambda|.$$

Donc

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + O(\lambda) \text{ lorsque } |\lambda| \to +\infty. \tag{27}$$

Au voisinage de zéro, on a :

$$\lambda_1 + \frac{\lambda}{\|x-y\|} > 0 \text{ et } 1 - \lambda_1 - \frac{\lambda}{\|x-y\|} > 0.$$

Donc pour λ assez petit, on a :

$$\varphi(\lambda) = \left\|[\lambda_1 + \frac{\lambda}{\|x-y\|}]x + [1 - \lambda_1 - \frac{\lambda}{\|x-y\|}]y\right\|^2 \ = \ 1 = 1 + O(\lambda^2). \tag{28}$$

D'après le corollaire 3.4, la fonction φ est paire, et par suite :

$$\|[\lambda_1 x + (1-\lambda_1)y] + \lambda(x-y)\| = \|[\lambda_1 x + (1-\lambda_1)y] - \lambda(x-y)\|. \tag{29}$$

En faisant tendre λ et λ_1 vers 1, on obtient :

$$\|2x - y\| = \|y\| = 1. \tag{30}$$

Donc $x' = 2x - y \in S$. On a alors :

$$x = \frac{x'+y}{2}, \text{ avec } (x', y) \in S^2 \text{ et } x' \neq y.$$

Ce qui contredit l'extrémalité de x dans S. Donc E est strictement convexe.

Montrons à présent que $\perp_B \Rightarrow \perp_{C'}$. Soit $(x,y) \in E^2$, $y \neq 0$ tel que $x \perp_B y$. Puisque $\perp_{C'}$ est existante à gauche, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha y + x \perp_{C'} y$. Comme $\perp_{C'} \Rightarrow \perp_B$, on a aussi $\alpha y + x \perp_B y$. Or, E est strictement convexe et $\perp_B$ est unique à gauche d'après le lemme 1.7, donc $\alpha = 0$ et $x \perp_{C'} y$. Donc $\perp_B \Rightarrow \perp_{C'}$, et E est préhilbertien d'après le théorème 5.1. $\square$

Remerciements. L'auteur tient à exprimer ses plus vifs remerciements aux deux rapporteurs pour leurs remarques pertinentes.

English extended abstract. Orthogonality in inner product spaces can be expressed in many ways that are also meaningful in the case of arbitrary normed linear spaces. This observation gives rise to different concepts of orthogonality in these more general structures (see *e.g.* [1, 2]). Among them, we recall the following ones:

Let $(E, \|.\|)$ be a real normed linear space. A point $x \in E$ is said to be orthogonal to $y \in E$, in the respective sense, when

- Birkhoff-James [3, 8], $x \perp_B y \iff \|x\| \leq \|x + \lambda y\|$, for every real number λ.
- Carlsson [5], $x \perp_C y \iff \sum_{k=1}^{m} a_k \|b_k x + c_k y\|^2 = 0$, where $m \geq 2$ and $a_k \neq 0, b_k, c_k$ are fixed real numbers such that,

$$\sum_{k=1}^{m} a_k {b_k}^2 = \sum_{k=1}^{m} a_k {c_k}^2 = 0; \ \sum_{k=1}^{m} a_k b_k c_k = 1.$$

  C-orthogonality is not a single concept of orthogonality but a family of them, which embraces, *e.g.*,
  - - Isosceles [7], $x \perp_I y \iff \|x - y\| = \|x + y\|$.
  - - Pythagorean [7], $x \perp_P y \iff \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

The study of these generalized orthogonalities provides a lot of information about the geometric structure of the space (*e.g.* existence of an inner product compatible with the norm, rotundity, smoothness, . . .).

In this paper, we introduce a new orthogonality relation, named C'-orthogonality, which embraces C-orthogonality:

$$x \perp_{C'} y \iff \int_{\Omega} a(\omega) \|b(\omega)x + c(\omega)y\|^2 \, d\mu(\omega) = 0,$$

where (Ω, μ) is a positive measure space and a, b, c are μ-measurable real valued functions defined on Ω such that $a \neq 0$, μ-a.e., ab^2 and ac^2 are μ-integrable and

$$\int_{\Omega} ab^2 \, d\mu = \int_{\Omega} ac^2 \, d\mu = 0; \ \int_{\Omega} abc \, d\mu = 1.$$

The main results of this paper are as follows. In Section 2, we prove the existence of C'-orthogonal elements in every two-dimensional subspace of E and, we prove the following formula which establishes a relation between C'-orthogonality and the derivatives of the norm:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \alpha(\lambda) = -\frac{pN_+(x, y) + (1 - p)N_-(x, y)}{\|x\|},$$

where $(x, y) \in E^2$, $x \neq 0$ and $N_\pm(x, y)$ are the one-sided derivatives of the norm at x in the direction of y, λ and $\alpha(\lambda)$ are real numbers such that $\lambda x \perp_{C'} \alpha(\lambda)x + y$ for every $\lambda \in \mathbb{R}$ and, where $p = \int_{bc>0} abc \, d\mu$.

In section 3, we prepare the study of homogeneity and additivity of C'-orthogonality. We show that if φ is a continuous function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ which satisfies the following

conditions

$$(E) \qquad \begin{cases} \int_\Delta p(\omega)\varphi(\lambda q(\omega))d\mu(\omega) = C_1 + \lambda^2 C_2 & (\lambda \in \mathbb{R}), \\ \varphi(\lambda) = 1 + O(\lambda^2) & \text{when } \lambda \to 0, \\ \varphi(\lambda) = \lambda^2 + O(\lambda) & \text{when } |\lambda| \to +\infty, \end{cases}$$

where

$$C_1 = \int_\Delta p(\omega)\, d\mu(\omega);\ C_2 = \int_\Delta p(\omega) q^2(\omega)\, d\mu(\omega);\ \int_\Delta p(\omega)q(\omega)\, d\mu(\omega) = 1.$$

Then φ is necessarily even.

Our proof uses the Fourier transform and is simpler than the method of F-series used by Carlsson in [5].

In section 4, we show that if C'-orthogonality is homogeneous or additive in the space E, then E is an inner product space.

In section 5, we compare C'-orthogonality and B-orthogonality and we show that E is an inner product space, when C'-orthogonality implies (or is implied by) B-orthogonality.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Alonso, *Ortogonalidad en espacions normados*, Thèse de doctorat, Univ. Extremadura, Badajoz (Spain) (1984).
2. D. Amir, *Characterizations of inner product spaces.*, Séminaire d'analyse fonctionelle 1984/1985, vol. 26, Publ. Math. Univ. Paris VII, Univ. Paris VII, Paris, pp. 77–93.
3. G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J. **1** (1935), 169–172.
4. B. Boussouis, *Relations entre l'orthogonalité de Birkhoff-James et l'orthogonalité de Carlsson*, Ann. Sci. Math. Québec **17** (1993), 139–143.
5. S. O. Carlsson, *Orthogonality in normed linear spaces*, Ark. Mat. **4** (1962), 297–318.
6. J. Desbiens, *Une nouvelle caractérisation des espaces de Hilbert*, Ann. Sci. Math. Québec **14** (1990), 17–22.
7. R. C. James, *Orthogonality in normed linear spaces*, Duke Math. J. **12** (1945), 291–302.
8. R. C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 265–292.

B. Boussouis
Département des mathématiques et informatique
Faculté des sciences Dhar Mahraz
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
B. P. 1796 — (Fés-Atlas)
Fés, MAROC