Ann. Sci. Math. Québec **23** (1999), no. 2, 147–156.

CONTRÔLE OPTIMAL DES SYSTÈMES GOUVERNÉS PAR UNE ÉQUATION HYPERBOLIQUE NON LINÉAIRE. APPROXIMATION

ANNA DĘBIŃSKA-NAGÓRSKA, ANDRZEJ JUST ET ZDZISŁAW STEMPIEŃ

RÉSUMÉ. Nous présentons dans cet article le problème de l'existence des contrôles optimaux pour un système gouverné par une équation hyperbolique avec conditions aux limites homogènes et avec la fonction quadratique de coût. Nous introduisons ensuite l'approximation de Galerkin de ce problème. Le résultat principal de notre travail est la démonstration de l'existence des points faibles et forts d'accumulation de l'ensemble des solutions approchées. Chacun d'entre eux est une solution exacte du problème donné. Nous présentons aussi un exemple.

ABSTRACT. We consider optimal control of a nonlinear hyperbolic equation with homogeneous boundary conditions. The quadratic cost function is classical. First, we prove existence of optimal controls. Then, we present the Galerkin approximation and we prove the existence of weak and strong accumulation points of a set of solution of the approximate optimization problems. Each of these points is a solution of the initial optimization problem. For illustration, an example is given.

1. Introduction et notation. Nous présentons dans cet article le problème de l'existence des contrôles optimaux pour un système gouverné par une équation hyperbolique avec fonction quadratique de coût et l'approximation de Galerkin de ce problème.

L'utilisation des équations paraboliques et l'étude des problèmes de contrôle correspondants ont fait l'objet de nombreux travaux (par exemple H. Fattorini, I. Lasiecka, J. L. Lions, T. Seidman, D. Tiba, F. Tröltzsch). Plusieurs résultats ont été rassemblés dans la monographie de D. Tiba et P. Neittaanmäki [7].

Pour les équations hyperboliques les résultats sont moins nombreux. La minimisation du temps et l'approximation de ce genre de problèmes sont prises en considération par W. Krabs et U. Lamp. L'existence des contrôles optimaux pour une fonction de coût plus générale est étudiée par D. Tiba, V. Komornik, M. Brokate et d'autres.

Le résultat principal de notre travail est la démonstration de l'existence des suites des solutions approchées qui convergent faiblement et fortement dans les espaces convenables vers les solutions exactes du problème donné.

On désigne par $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné dont la frontière Γ est suffisamment régulière [5] et par S un intervalle $(0,T)$ pour $0 < T < \infty$. On pose $Q = S \times \Omega$.

Reçu le 17 décembre 1996 et, sous forme définitive, le 7 octobre 1998.

Les notations suivantes sont utilisées: $H = L^2(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$, $L^p(S;X) = \{y : S \to X$ et $\int_0^T \|y(t)\|_X^p dt < \infty$ pour $1 \le p < \infty$ et $\text{vraisup}_{t\in S} \|y(t)\|_X < \infty$ pour $p = \infty\}$, $W(S;X) = \{y : S \to X \;$ et $\; y, y' \in L^2(S;X)\}$, X^* est le dual de X où X est un espace de Banach.

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites [2, 8]:

(i) Opérateur $A : V \to V^*$ et $Ay = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}) + a_0(x)y$ avec $a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega)$ pour $i,j = 1,2,\ldots,n$,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \ge \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \forall_{\,\xi_i,\xi_j\in\mathbb{R}} \text{ et p.p. } x \in \Omega$$

pour un certain $\alpha > 0$, $a_0(x) \ge \alpha$ p.p. $x \in \Omega$. La matrice $[a_{ij}(x)]_{i,j\le n}$ est symétrique.

(ii) L'opérateur $f : H \to H$ est monotone, $f(0) = 0$ et $\|f(y_1(t)) - f(y_2(t))\|_H \le \gamma(t)\|y_1(t) - y_2(t)\|_H \;\forall\, y_1, y_2 \in L^2(S;H)$ p.p. $t \in S$ et $\gamma \in L^\infty(S)$.

(iii) L'opérateur $B \in \mathcal{L}(U; W(S;H))$ est linéaire et borné où U est un espace de Hilbert (l'espace de contrôles).

Nous avons le résultat suivant:

Théorème 1.1. *Supposons que les hypothèses (i)–(iii) sont vérifiées et que $y_0 \in V$, $y_* \in H$, $g \in W(S;H)$. Alors le problème*

$$\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dt^2} + Ay + f(y) = g + Bu \quad \textit{sur} \;\; Q, \\ &y(0) = y_0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = y_* \qquad \textit{sur} \;\; \Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

admet une solution unique qui satisfait les conditions suivantes:

$$y \in L^\infty(S;V) \cap C(\bar{S};H), \quad y' \in L^\infty(S;H) \cap C(\bar{S};V^*), \quad y'' \in L^\infty(S;V^*).$$

De plus l'opérateur $\boldsymbol{F} : U \to L^2(S;V) \times L^2(S;H)$ donné par la formule $\boldsymbol{F}(u) = (y, y')$ (où y est la solution de l'équation (1.1) vérifie la condition de Lipschitz.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'opérateur $\boldsymbol{F}$ vérifie la condition de Lipschitz parce que la preuve de la première partie de ce théorème résulte de [1].

Le problème (1.1) équivaut à

$$\begin{aligned} &\forall z \in V \text{ p.p. } t \in S \quad y(0) = y_0, y'(0) = y_*, \\ &\langle y''(t), z\rangle + \langle Ay(t), z\rangle + \langle f(y(t)), z\rangle = \langle g(t), z\rangle + \langle (Bu)(t), z\rangle \end{aligned} \tag{1.2}$$

où par $\langle \phi_1, \phi_2\rangle$ on désigne la dualité entre V^* et V qui équivaut au produit scalaire sur H si $\phi_1, \phi_2 \in H$ [1].

En posant $z = y'(t)$ dans (1.2) et en intégrant par parties le premier membre et en appliquant la formule de Green au deuxième membre, il vient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|y'(t)\|_H^2 + a(y(t), y(t))] + \langle (f(y))(t), y'(t)\rangle \\ &\qquad\qquad = \langle g(t), y'(t)\rangle + \langle (Bu)(t), y'(t)\rangle, \end{aligned} \tag{1.3}$$

où $a(\phi_1,\phi_2)=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial\phi_1}{\partial x_i}\frac{\partial\phi_2}{\partial x_j}dx+\int_\Omega\phi_1\phi_2dx$.

En intégrant (1.3) sur l'intervalle $(0,t)$ avec t quelconque et en appliquant le lemme de Gronwall [6] nous avons, grâce aux hypothèses (i)–(iii) et à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, le résultat suivant

$$\|y'(t)\|_H^2+\|y(t)\|_V^2\le C(\|y_0\|_V^2+\|y_*\|_H^2+\|g\|_{W(S;H)}^2+\|u\|_U^2)$$

p.p. $t\in S$ et pour un certain $C>0$. D'où

$$\|y'\|_{L^2(S;H)}+\|y\|_{L^2(S;V)}\le C_1(\|y_0\|_V+\|y_*\|_H+\|g\|_{W(S;H)}+\|u\|_U) \tag{1.4}$$

avec $C_1>0$. L'estimation (1.4) entraîne que l'opérateur $\boldsymbol{F}$ vérifie la condition de Lipschitz. $\square$

Maintenant nous démontrerons le théorème adjoint (le résultat parallèle pour un système parabolique est démontré dans [3]).

Lemme 1.1. *Sous les hypothèses du théorème 1.1, l'opérateur* $\boldsymbol{F}$ *défini dans le théorème 1.1 est faiblement continu.*

Démonstration. Soit la suite $u_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \bar{u}$ faiblement dans U. Du théorème 1.1 nous savons que le problème

$$\begin{aligned}\langle y''(t),z\rangle+a\langle y_n(t),z\rangle+\langle f(y_n(t)),z\rangle&\\ =\langle g(t),z\rangle+\langle(Bu_n)(t),z\rangle&\\ \forall z\in V\quad y_n(0)=y_0,\ \text{ et }\ y_n'(0)=y_*&\end{aligned} \tag{1.5}$$

possède une solution unique y_n quel que soit $n\in N$.

En remplaçant dans (1.5) z par $y_n'(t)$ et analogiquement à la démonstration du théorème 1.1, on a l'estimation suivante

$$\|y_n'\|_{L^2(S;H)}+\|y_n\|_{L^2(S;V)}\le C_1(\|y_0\|_V+\|y_*\|+\|g\|_{W(S;H)}+\|u_n\|_U). \tag{1.6}$$

De (1.6) et des hypothèses du lemme on peut extraire une sous-suite, encore notée y_n, telle que

$$y_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \bar{y}\ \text{(dans } L^2(S;V) \text{ faible)},\qquad y_n' \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \bar{y}'\ \text{(dans } L^2(S;H) \text{ faible)}. \tag{1.7}$$

Il reste seulement à montrer que la fonction $\bar{y}$ vérifie le problème (1.2).

Multiplions l'équation (1.5) par une fonction quelconque $\phi\in C^1[0,T]$ telle que $\phi(T)=\phi'(T)=0$ et intégrons-la sur l'intervalle S. Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^T\langle y_n''(t),z\rangle\phi(t)dt+\int_0^T a(y_n(t),z)\phi(t)dt+\int_0^T\langle(f(y_n))(t),z\rangle\phi(t)dt&\\ =\int_0^T\langle g(t),z\rangle\phi(t)dt+\int_0^T\langle(Bu_n)(t),z\rangle\phi(t)dt\,.&\end{aligned} \tag{1.8}$$

En intégrant par parties le premier membre de (1.8)

$$\tag{1.9} \begin{aligned} -\int_0^T \langle y_n'(t), z\rangle \phi'(t)dt + \int_0^T a(y_n(t), z)\phi(t)dt + \int_0^T \langle f(y_n(t)), z\rangle \phi(t)dt \\ = \int_0^T \langle g(t), z\rangle \phi(t)dt + \int_0^T \langle (Bu_n)(t), z\rangle \phi(t)dt + \langle y_*, z\rangle \phi(0). \end{aligned}$$

Grâce à (1.7) et aux hypothèses du lemme, on peut passer à la limite en (1.9), d'où

$$\tag{1.10} \begin{aligned} -\int_0^T \langle \overline{y}\,'(t), z\rangle \phi'(t)dt + \int_0^T a(\overline{y}(t), z)\phi(t)dt + \int_0^T \langle f(\overline{y}(t)), z\rangle \phi(t)dt \\ = \int_0^T \langle g(t), z\rangle \phi(t)dt + \int_0^T \langle (B\overline{u})(t), z\rangle \phi(t)dt + \langle y_*, z\rangle \phi(0) \\ \forall\, z \in V \quad \forall\, \phi \in C^1[0,T]. \end{aligned}$$

En prenant $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$ (l'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(0,T) \subset C^1[0,T]$), on en déduit que la fonction $\bar{y}$ vérifie l'équation

$$\tag{1.11} \begin{aligned} \int_0^T \langle \overline{y}\,''(t), z\rangle \phi(t)dt + \int_0^T a(\overline{y}(t), z)\phi(t)dt + \int_0^T \langle f(\overline{y}(t)), z\rangle \phi(t)dt \\ = \int_0^T \langle g(t), z\rangle \phi(t)dt + \int_0^T \langle (B\overline{u})(t), z\rangle \phi(t)dt \quad \forall\, z \in V \ \ \forall\, \phi \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned}$$

De (1.11) on déduit immédiatement que la fonction $\bar{y}$ vérifie la première équation de (1.2).

Maintenant on peut intégrer par parties le premier membre de (1.10) et en profitant de (1.11) nous savons que

$$\tag{1.12} \bar{y}'(0) = y_*.$$

En intégrant par parties le premier membre de (1.9) et en profitant de (1.5), il vient

$$\tag{1.13} \begin{aligned} \int_0^T \langle y_n(t), z\rangle \phi''(t)dt + \int_0^T a(y_n(t), z)\phi(t)dt + \int_0^T \langle f(y_n(t)), z\rangle \phi(t)dt \\ = \int_0^T \langle g(t), z\rangle \phi(t)dt + \int_0^T \langle (Bu_n)(t), z\rangle \phi(t)dt + \langle y_*, z\rangle \phi(0) - \langle y_0, z\rangle \phi'(0). \end{aligned}$$

Passant à la limite dans (1.13) et en profitant de (1.11), (1.12) et du théorème d'intégration par parties nous savons que

$$\tag{1.14} \bar{y}(0) = y_0.$$

Les égalités (1.11), (1.12) et (1.14) montrent que la fonction $\bar{y}$ est la solution du problème (1.1).

Du théorème 1.1 on sait que la solution y du problème (1.1) est unique, d'où $\bar{y} = y$ et $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ (dans $L^2(S;V)$ faible) et $y_n' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y'$ (dans $L^2(S;H)$ faible) c'est-à-dire, $\boldsymbol{F}(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{F}(\bar{u}) = (y, y')$ (dans $L^2(S;V) \times L^2(S;H)$ faible). $\square$

2. Position du problème de contrôle optimal. Soit U un espace de Hilbert de contrôles et $u_0 \in U$ un élément donné. Considérons le problème de contrôle suivant (P_1) : trouver $u^0 \in U$ qui minimise la fonctionnelle du coût:

$$J(y,u) = \|y\|^2_{L^2(Q)} + \|u - u_0\|^2_U, \tag{2.1}$$

où $y = y(u)$ est la solution de (1.1) pour $u \in U$. Posons $\Phi(u) = J(y(u), u)$.

Théorème 2.1. *On suppose que les hypothèses du théorème 1.1 sont vérifiées. Alors le problème de contrôle optimal* (P_1) *admet au moins une solution* $u^0 \in U$ *telle que* $\Phi(u^0) = \inf_{u\in U} \Phi(u)$.

Démonstration. Désignons par $(u_n)_{n\in N}$ une suite minimisante pour la fonctionnelle $\Phi : u_n \in U, n \in N$ et $\lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \inf_{u\in U} \Phi(u)$. La fonctionnelle Φ est coercive donc la suite $(u_n)_{n\in N}$ est bornée dans U. Alors, il existe une sous-suite, notée encore $(u_n)_{n\in N}$ telle que $u_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \bar{u}$ (dans U faible). Posons $y_n = y(u_n)$. Par le lemme 1.1, la suite $y_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \bar{y}$ (dans $L^2(S;V)$ faible) où le couple $(\bar{x}, \bar{y})$ est la solution de l'équation (1.1). Montrons que ce couple est la solution optimale du problème (P_1). En effet, la fonctionnelle (2.1) étant convexe et différentiable est faiblement semi-continue inférieurement dans $L^2(Q) \times U$. Alors, $\inf_{u\in U} \Phi(u) = \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \liminf_{n\to\infty} J(y_n, u_n) \geq J(\bar{y}, \bar{u})$. D'où il résulte que $J(\bar{y}, \bar{u}) = \inf_{u\in U} \Phi(u) = J(y^0, u^0)$. $\square$

Considérons un problème de contrôle plus général (P_2): trouver un élément $u^0 \in U_{ad}$, où U_{ad} est un ensemble dans U (l'ensemble des contrôles admissibles) qui minimise la fonctionnelle (2.1); $u_0 \in U$ et $y = y(u)$ est la solution de (1.1) pour $u \in U_{ad}$.

Théorème 2.2. *On suppose que les hypothèses du théorème 2.1 sont vérifiées. Si* $U_{ad} \subset U$ *est convexe fermé et non-vide, alors le problème de contrôle* (P_2) *admet une solution* u^0 *telle que* $\Phi(u^0) = \inf_{u\in U} \Phi(u)$.

La démonstration est la même que pour le théorème 2.1.

3. Approximation des problèmes de contrôle. Introduisons une famille $\{V_h\}_{h\in G}$ de sous-espaces de dimension finie de l'espace V satisfaisant les conditions [8]:

$$\begin{aligned} &\forall\, h_1, h_2 \in G (h_1 > h_2 \Rightarrow V_{h_1} \subset V_{h_2}), \\ &\overline{\bigcup_{h\in G} V_h} = V, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où zéro est le point d'accumulation de l'ensemble des paramètres $G \subset (0, 1]$.

Par approximation de l'espace $L^2(S;V)$, on entend une famille d'espaces $\{L^2(S;V_h)\}_{h\in G}$.

Nous allons définir une solution approchée de la solution de l'équation (1.1) par la fonction $y_h \in L^2(S;V_h)$ qui satisfait l'équation:

$$\langle y_h''(t), z_h\rangle + \langle Ay_h(t), z_h\rangle + \langle f(y_h(t)), z_h\rangle = \langle g(t), z_h\rangle + \langle (Bu)(t), z_h\rangle \quad \forall\, z_h \in V_h \tag{3.2}$$

avec les conditions initiales

$$y_h(0) = y_{0h},$$
$$y_h^{'}(0) = y_{*h},$$

où y_{0h} et y_{*h} sont les projections orthogonales de y_0 et y_* sur V_h avec respectivement la norme de V et de H.

Analogiquement, introduisons une famille $\{U_k\}_{k \in K}$ de sous-espaces de dimension finie de l'espace U satisfaisant les conditions :

$$\begin{aligned} &\forall\, k_1, k_2 \in K (k_1 > k_2 \Rightarrow U_{k_1} \subset U_{k_2}), \\ &\overline{\bigcup_{k \in K} U_k} = U, \end{aligned} \tag{3.3}$$

où zéro est le point d'accumulation de l'ensemble des paramètres $K \subset (0, 1]$.

Considérons maintenant le problème suivant $(P_1)_h$: trouver $u^0_{kh} \in U_k$ qui minimise le coût

$$\Phi(u_k) = J(y_{hk}, u_k) = \|y_{hk}\|^2_{L^2(Q)} + \|u_k - u_{0k}\|^2_U, \tag{3.4}$$

où $y_{hk} = y_h(u_k)$ est la solution de l'équation (3.2) pour $u = u_k$, u_{0k} est la projection orthogonale de u_0 sur U_k.

Théorème 3.1. *Supposons que les hypothèses du théorème 2.1 sont vérifiées. Alors le problème de contrôle $(P_1)_h$ admet au moins une solution $u^0_{kh} \in U_k$ telle que $\Phi(u^0_{kh}) = \inf_{u_k \in U_k} \Phi(u_k)$.*

La démonstration résulte immédiatement du théorème 2.1.

Lemme 3.1. *Soit $(u_k)_{k \in K}$ une suite d'éléments de l'espace U_k et $(y_{hk})_{h \in G, k \in K}$, la suite correspondante des solutions de l'équation (3.2). On suppose que les hypothèses (i)–(iii) sont vérifiées. Alors*

a) *si $u_k \underset{k \to 0}{\rightharpoonup} \bar{u}$ (dans U faible) alors $y_{hk} \underset{h,k \to 0}{\rightharpoonup} \bar{y}$ (dans $L^2(S; V)$ faible) où $\bar{y}$ est la solution de l'équation (1.1) pour $u = \bar{u}$*

b) *$u_k \underset{k \to 0}{\longrightarrow} \bar{u}$ (dans U fort) alors $y_{hk} \underset{h,k \to 0}{\longrightarrow} \bar{y}$ (dans $L^2(S; V)$ fort) où $\bar{y}$ est la solution unique de (1.1) pour $u = \bar{u}$.*

La démonstration des parties (a) et (b) est immédiate (comparer avec le théorème 1.1 et le lemme 1.1).

Examinons maintenant la convergence de cette approximation.

Théorème 3.2. *On suppose que les hypothèses du lemme 3.1 sont vérifiées. Alors il existe des points d'accumulation faibles $\{(u^0_k, y^0_{kh})\}_{k \in K, h \in G}$ et chacun de ces points est une solution du problème d'optimisation (P_1).*

Démonstration. La suite $(u^0_{kh})_{k \in K, h \in G}$ est la suite minimisante pour la fonctionnelle J.

En effet, pour $u^0 \in U$ il existe une suite $(v_k)_{k \in K}$ telle que $v_k \underset{k \to 0}{\longrightarrow} u^0$ (dans U fort), $\forall\, k \in K\;\; v_k \in U_k$ et $y_{hk} \to y^0$ (dans $L^2(Q)$ fort) où $y_{hk} = y_h(v_k)$ est la solution de

(3.2) pour $u = v_k$. Puisque

$$\inf_{u \in U} J(y,u) = J(y^0,u^0) \le J(y^0_{hk},u^0_{kh}) \le J(y_{hk},v_k)$$

et que la fonctionnelle J est continue sur $L^2(Q) \times U$, on a $\lim_{k,h\to 0} J(y_{hk},v_k) = J(y^0,u^0)$. Ainsi $\lim_{k,h\to 0} J(y^0_{hk},u^0_{kh}) = J(y^0,u^0)$ où $y^0_{hk} = y_h(u^0_k)$ est la solution de (3.2) est radialement non-bornée, donc il existe une sous-suite $(u^0_{kh})_{k\in K,h\in G}$, notée encore $(u^0_{kh})_{k\in K,h\in G}$, telle que $u^0_{hk} \underset{h,k\to 0}{\rightharpoonup} \tilde{u}$ (dans U faible). Du lemme 3.1 il résulte que $y^0_{hk} \underset{h,k\to 0}{\rightharpoonup} \tilde{y}$ (dans $L^2(S;V)$ faible) et $y^0_{hk} \underset{h,k\to 0}{\longrightarrow} \tilde{y}$ (dans $L^2(Q)$ fort) où $(\tilde{y},\tilde{u})$ est la solution de (1.1). La fonctionnelle (2.1) est faiblement semi-continue inférieurement dans $L^2(Q)\times U$. Donc on a :

$$\inf_{u\in U} \Phi(u) = \lim_{k,h\to 0} \Phi(u^0_{kh}) = \liminf_{h,k\to 0} J(y^0_{hk},u^0_{kh}) \ge J(\tilde{y},\tilde{u}).$$

D'où il résulte que le couple $(\tilde{y},\tilde{u})$ est une solution du problème d'optimisation (P_1). $\square$

Théorème 3.3. *Supposons que les hypothèses du lemme 3.1 sont vérifiées et*

$$(3.5) \qquad (u^0_{kh} - u_{0k}, u_k - u^0_{kh})_U + (y^0_{hk}, y_{hk} - y^0_{hk})_{L^2(Q)} \ge 0 \quad \forall u_k \in U_k \text{ [4]}.$$

Alors il existe des points d'accumulation forts de $\{(u^0_k, y^0_{kh})\}_{k\in K,h\in G}$ *et chacun de ces points est une solution du problème d'optimisation* (P_1).

Démonstration. Du théorème 3.2, on a une sous-suite $(u^0_{kh})_{k\in K,h\in G}$ qui satisfait $u^0_{kh} \underset{h,k\to 0}{\rightharpoonup} u^0$ (dans U faible) et une sous-suite $(y^0_{hk})_{h\in G,k\in K}$ qui converge vers y^0 faible dans $L^2(S;V)$ et fort dans $L^2(Q)$. D'après (3.3) pour u^0 il existe une suite $(v_{k0})_{k\in K}$ telle que $v_{k0} \underset{k\to 0}{\longrightarrow} u^0$ (dans U fort) où $v_{k0} \in U_k \quad \forall k \in K$. En profitant de (3.5) nous obtenons, pour $u_k = v_{k0}$ et $y_{hk0} = y_h(v_{k0})$:

$$\begin{aligned} 0 \le \|u^0_{kh} - v_{k0}\|^2_{L^2(Q)} & \\ &\le (y^0_{hk}, y_{hk0} - y^0_{hk})_{L^2(Q)} - (v_{k0} - u_{0k}, u^0_{kh} - v_{k0})_U \\ &\qquad \underset{k,h\to 0}{\longrightarrow} (y^0,y^0) - \liminf_{h,k\to 0} \|y^0_{hk}\|^2 \le 0. \end{aligned}$$

De l'inégalité $\|u^0_{kh} - u^0\|_U \le \|u^0_{kh} - v_{k0}\|_U + \|v_{k0} - u^0\|_U$ nous obtenons finalement $u^0_{kh} \underset{k,h\to 0}{\longrightarrow} u^0$. $\square$

Examinons maintenant l'approximation du problème $(P_2)_h$: trouver $u^0_{kh} \in U_{adk} = U_{ad} \cap U_k$ qui minimise la fonctionnelle (3.4) où $y_{hk} = y_h(u_k)$ est la solution de l'équation (3.2) pour $u = u_k \in U_{adk}$ et u_{0k} est la projection orthogonale de u_0 sur U_{adk}.

Théorème 3.4. *Si les hypothèses du théorème 2.1 sont vérifiées et* $U_{adk} \neq \emptyset$, *alors le problème de contrôle optimal* $(P_2)_h$ *admet au moins une solution* $u^0_{kh} \in U_{adk}$.

Puisque U_{adk} est non vide convexe et fermé dans U, on peut démontrer ce théorème de façon analogue au théorème 2.1.

De la même façon, on peut démontrer les théorèmes suivants :

Théorème 3.5. *Supposons que les hypothèses du théorème 2.2 sont vérifiées et que* $\mathrm{int}(U_{ad}) \neq \emptyset$. *Alors il existe des points d'accumulation faibles de* $\{(u_k^0, y_{kh}^0)\}_{k\in K, h\in G}$ *et chacun de ces points est une solution du problème d'optimisation* (P_2).

Théorème 3.6. *Supposons que les hypothèses du théorème 3.5 sont vérifiées et que*

$$(u_{kh}^0 - u_{0k}, u_k - u_{kh}^0)_U + (y_{hk}^0, y_{hk} - y_{hk}^0)_{L^2(Q)} \geq 0 \quad \forall\, u_k \in U_{adk}. \tag{3.6}$$

Alors il existe des points d'accumulation forts de $\{(u_k^0, y_{kh}^0)\}_{k\in K, h\in G}$ *et chacun de ces points est une solution du problème d'optimisation* (P_2).

Remarque. De l'hypothèse $\mathrm{int}(U_{ad}) \neq \emptyset$, il résulte que $\overline{\bigcup_{k\in K} U_k \cap U_{ad}} = U_{ad}$. Alors pour $u^0 \in U_{ad}$, il existe une suite $(v_k)_{k\in K}$ telle que $v_k \xrightarrow[k\to 0]{} u^0$ (dans U fort) et $v_k \in U_{adk} \quad \forall\, k \in K$.

4. Exemple. On définit l'opérateur $A : V \to V^*$

$$Ay = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} + y$$

et on choisit $f : H \to H$ de façon suivante :

$$f(y) = \mathrm{Arc\,tg}\, y.$$

Alors les opérateurs A et f vérifient toutes les suppositions (i) et (ii) de la section 1.

Le problème de contrôle est alors le suivant : trouver $u^0 \in W(S; H)(u^0 \in U_{ad} \subset W(S; H))$ réalisant le minimum de la fonction

$$J(y, u) = \|y\|^2_{L^2(Q)} + \|u\|^2_{L^2(Q)},$$

où y est une solution du problème différentiel

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} + y + \mathrm{Arc\,tg}\, y = u && \text{sur } Q, \\ &y(0) = y_0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = y_* && \text{sur } \Omega, \end{aligned}$$

avec $y_0 \in V$, $\quad y_* \in H$ donnés.

Les équations d'évolution du 2[e] ordre en t apparaissent dans le contrôle distribué des vibrations. L'opérateur non linéaire décrit les changements d'énergie dans le matériel et dépend du genre du matériel considéré et du milieu dans lequel il se trouve.

En utilisant les notations du chapitre 3, on obtient le problème de contrôle optimal pour le système d'équations différentielles ordinaires non linéaires

$$\begin{aligned} &\langle \frac{d^2 y_h(t)}{dt}, z_h \rangle + a(y_h(t), z_h) + (\mathrm{Arc\,tg}\, y_h(t), z_h)_H = (u_k(t), z_h)_H, \\ &y_h(0) = y_{0h}, \quad y_h'(0) = y_{*h}, \end{aligned}$$

avec la fonction du coût

$$J(y_{hk}, u_k) = \|y_{hk}\|^2_{L^2(Q)} + \|u_k\|^2_{L^2(Q)}.$$

Du lemme de Lax-Milgram, il suit que

$$a(y_h, z_h) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_h}{\partial x_i} \frac{\partial z_h}{\partial x_i} dx + \int_\Omega y_h z_h dx.$$

English extended abstract. In this paper we consider the optimal control problems (P_1), (P_2) for a nonlinear hyperbolic equation (1.1) with quadratic cost (2.1).

In a first preparatory part, we prove two theorems:

Theorem. *Let the assumptions (i)–(iii) be satisfied, $y_0 \in V$, $y_* \in H$, $g \in W(S;H)$. Then there exists a unique y, which is the solution of the problem*

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ay + f(y) = g + Bu \quad \text{on} \quad Q,$$

with the initial conditions

$$y(0) = y_0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = y_* \qquad \text{on} \quad \Omega,$$

and $y \in L^\infty(S;V) \cap C(\bar{S};H)$, $y' \in L^\infty(S;H) \cap C(\bar{S};V^*)$, $y'' \in L^\infty(S;V^*)$. Moreover, $\boldsymbol{F} : U \to L^2(S;V) \times L^2(S;H)$ such that $\boldsymbol{F}(u) = (y, y')$ is a Lipschitz's map.

Lemma. *Under the assumptions of Theorem 1.1 the operator $\boldsymbol{F}$ from Theorem 1.1 is weakly continuous.*

In the second part of the paper we prove existence of optimal controls u^0 for the problems (P_1) and (P_2).

The third part of the paper is concerned with the convergence of Galerkin method for the approximation of the problems (P_1), (P_2).

Theorem. *Let the assumption of Theorem 1.1 be satisfied. Then there exist weak accumulation points of a set of solutions of the optimization problems $(P_1)_h$ in $U \times L^2(S;V)$ and each of these points is a solution of the optimization problem (P_1).*

Theorem. *Let the assumptions of Theorem 1.1 be satisfied and*

$$(u^0_{kh} - u_{0k}, u_k - u^0_{kh})_U + (y^0_{hk}, y_{hk} - y^0_{hk})_{L^2(Q)} \geq 0 \quad \forall u_k \in U_k.$$

Then there exist strong accumulation points of a set of solutions of the optimization problems $(P_1)_h$ in $U \times L^2(S;H)$ and each of these points is a solution of the optimization problem (P_1).

Similarly to Theorems 3.2 and 3.3 we prove existence of the weak and strong accumulation points of a set of solutions of the optimization problems $(P_2)_h$ in $U \times L^2(S;H)$ under the assumption $\mathrm{int}(U_{ad}) \neq \emptyset$. Each of these points is a solution of the optimization problem (P_2).

Finally, we apply the results to the example.

Bibliographie

1. V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff International Publishing, Leiden, 1976.
2. K. Deimling, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1985.
3. A. Dębińska-Nagórska, A. Just et Z. Stempień, *Approximation of some optimization problems of systems governed by nonlinear parabolic equation*, Control Cybernet. **24** (1995), 29–40.
4. A. Just, *Existencial theorems for certain problems of optimal control of systems governed by nonlinear operator and operator-differential equations in Banach spaces. Galerkin approximation*, Scientific Bulletin of Lodz Technical University (1994); no. 692, Lodz.
5. J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.
6. J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications; Vol. 1*, Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17, Dunod, Paris, 1968.
7. P. Neittaanmäki et D. Tiba, *Optimal control of nonlinear parabolic systems. Theory, algorithms and applications*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 179, Marcel Dekker, Inc., New York, 1994.
8. E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications*, II/B: Nonlinear monotone operators, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1990.

A. Dębińska-Nagórska, A. Just et Z. Stempień
Institute of Mathematics
Technical University of Lodz
PL-90-924
Lodz
Al. Politechniki 11
POLAND
E-mail: debinska@ck-sg.p.lodz.pl