Ann. Sci. Math. Québec **23** (1999), no. 2, 139–146.

QUASI-POLYNÔMES ET FILTRATION DIFFÉRENTIELLE

M. BIGOTTE, G. JACOB ET N. OUSSOUS

RÉSUMÉ. Une filtration différentielle de l'algèbre des quasi-polynômes a été introduite par B. Bendiffallah pour étudier l'indépendance linéaire des exponentielles d'éléments de Lie. Nous montrons qu'elle est équivalente à la filtration induite par les produits itérés d'éléments de Lie, comme l'avait conjecturé B. Bendiffallah. Enfin, nous donnons une présentation de l'algèbre graduée associée à cette filtration.

ABSTRACT. A differential filtration of the algebra of the quasi-polynomials was defined by B. Bendiffallah in order to prove the linear independence of exponentials of the Lie elements. We prove it is equivalent to the filtration defined by the iterated products of Lie elements, as conjectured by B. Bendiffallah. Finally, we give a presentation of the associated graded algebra.

Introduction. Soit X un alphabet fini. On note $X^\star$ l'ensemble des mots sur X, c'est-à-dire des suites finies de lettres : $w = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$. L'entier $n = |\, w\,|$ est la *longueur* de w. Le *mot vide*, noté ε, est l'unique suite de longueur 0. On pose $X^+ = X^\star\backslash\{\varepsilon\}$. Le *produit de concaténation* des mots u et v, noté uv, est la juxtaposition des deux suites de lettres u et v.

Une *série formelle* sur X à coefficients dans un corps $\mathbf{k}$ *(de caractéristique nulle)* est une somme formelle infinie $T = \sum_{w\in X^\star}\langle T \mid w\rangle\, w$ où $\langle T \mid w\rangle \in \mathbf{k}$. La somme de deux séries, et le produit d'une série par $\alpha \in \mathbf{k}$, sont définis «mot par mot». Le *produit de Cauchy* ST de deux séries S et T est défini par :

$$\forall w \in X^\star \quad \langle ST \mid w\rangle = \sum_{uv=w}\langle S \mid u\rangle\langle T \mid v\rangle, \quad \textit{(pour w fixé cette somme est finie)}$$

On pose encore support$(T) = \{w \mid \langle T \mid w\rangle \neq 0\}$. Un *polynôme* est une série P de support fini. Son *degré* $\deg(P)$ est la plus grande longueur d'un mot de son support. P est dit *homogène* si tous les mots de son support ont la même longueur. La *valuation* val(T) d'une série T est la plus courte longueur d'un mot de son support. On note $\mathbf{k}\langle X\rangle$ (resp. $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$) l'algèbre des polynômes (resp. des séries formelles) sur X. L'algèbre $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ est aussi le *complété séparé* de $\mathbf{k}\langle X\rangle$ pour la topologie induite par la valuation.

Le *produit de Lie* dans $\mathbf{k}\langle X\rangle$ est défini par : $[P,Q] = PQ - QP$. L'algèbre de Lie engendrée par l'alphabet X s'identifie à l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}ie\langle X\rangle$, et celle-ci admet

Reçu le 10 juin 1998 et, sous forme définitive, le 24 janvier 1999.

$\mathbf{k}\langle X\rangle$ pour algèbre enveloppante. On note $\mathcal{L}ie\langle\langle X\rangle\rangle$ la fermeture de $\mathcal{L}ie\langle X\rangle$ dans $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$. Toute série de Lie T (i.e. $T \in \mathcal{L}ie\langle\langle X\rangle\rangle$) est somme de ses *composantes homogènes*, qui sont des polynômes de Lie.

Bendiffallah définit pour tout mot u un opérateur différentiel D_u sur $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ (voir 1.2). Il note $\mathcal{D}$ la famille des opérateurs D_u pour tout mot u *non vide*, et ker$(\mathcal{D}^n)$ l'ensemble des séries annulées par tous les composés de n opérateurs de la famille $\mathcal{D}$. Il obtient ainsi une *filtration différentielle* de ker$(\mathcal{D}^\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}$ ker$(\mathcal{D}^n)$.

Si l'on note $\mathcal{L}ie_n\langle X\rangle$ l'espace vectoriel engendré par les produits d'au plus n polynômes de Lie, et $\mathcal{L}ie_n\langle\langle X\rangle\rangle$ sa fermeture dans $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$, on obtient une filtration de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}ie_n\langle\langle X\rangle\rangle$ appelée *filtration de Lie*.

Comme l'avait conjecturé B. Bendiffallah (voir [1, p. 106]), nous montrons que ces deux filtrations coïncident, c'est-à-dire :

$$\ker(\mathcal{D}^{n+1}) = \mathcal{L}ie_n\langle\langle X\rangle\rangle \tag{1}$$

en introduisant une troisième filtration, définie par dualité. Nous disposons ainsi de trois outils équivalents pour calculer le degré différentiel d'une série T. On en tire en particulier [1, p. 106]) :

$$\ker(\mathcal{D}^{n+2}) = \mathbf{k}_n\langle X\rangle \oplus \mathcal{L}ie^{n+1}\langle\langle X\rangle\rangle \tag{2}$$

où $\mathbf{k}_n\langle X\rangle$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus n et $\mathcal{L}ie^n\langle\langle X\rangle\rangle$ la fermeture topologique dans $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ de l'espace vectoriel engendré par les produits d'*exactement* n séries de Lie. Nous en déduisons aussi une présentation de *l'algèbre graduée* associée à l'algèbre filtrée ker$(\mathcal{D}^\infty)$.

Tout ceci s'interprète naturellement dans le cadre des algèbres de Hopf [9, 12, 13]. Ces résultats et leurs preuves se généralisent dans le cas des super-algèbres de Lie (voir [6, 8]).

1. Les trois filtrations.

1.1. Filtration de Lie. La chaîne d'inclusions $\mathbf{k} = \mathcal{L}ie_0\langle\langle X\rangle\rangle \subset \cdots \subset \mathcal{L}ie_n\langle\langle X\rangle\rangle \subset \mathcal{L}ie_{n+1}\langle\langle X\rangle\rangle \subset \cdots$ définit une filtration croissante de $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{L}ie_n\langle\langle X\rangle\rangle$, appelée *filtration de Lie*. On pose alors :

$$\mathcal{F}(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T \in \mathbf{k} = \mathcal{L}ie_0\langle\langle X\rangle\rangle \\ n & \text{si } T \in \mathcal{L}ie_n\langle\langle X\rangle\rangle \setminus \mathcal{L}ie_{n-1}\langle\langle X\rangle\rangle \end{cases}$$

1.2. Fitration différentielle. On définit classiquement sur $\mathbf{k}\langle X\rangle$ le coproduit Γ comme suit :

- Si $x \in X$, on pose $\Gamma(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Si $u, v \in X^\star$, on pose $\Gamma(uv) = \Gamma(u)\Gamma(v)$.
- On prolonge Γ aux séries $T \in \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ en posant

$$\Gamma(T) \;=\; \sum_{w\in X^\star} \langle T \mid w\rangle \Gamma(w)\ .$$

Le *produit de mélange* (shuffle) $P \sqcup\!\sqcup Q$ de deux polynômes P et Q est défini par $\langle P \sqcup\!\sqcup Q \mid w\rangle = \langle \Gamma(w) \mid P \otimes Q\rangle$ pour tout mot w. (C'est donc le dual du coproduit Γ).

On appelle *différentielle de Bendiffallah* [1] d'une série T *par un polynôme* P la série formelle $D_P(T)$ définie par: $\forall\, w \in X^\star, \quad \langle D_P(T) \mid w\rangle = \langle T \mid w \sqcup\!\sqcup P\rangle$. On note $\mathcal{D} = \mathcal{D}^1$ la famille des opérateurs D_w pour tous les mots $w \neq \varepsilon$. Son *noyau* $\ker \mathcal{D}$, et ses noyaux itérés, sont définis comme suit:

$$\begin{aligned} T \in \ker(\mathcal{D}) &\iff \forall w \in X^+, \quad D_w(T) = 0 \\ T \in \ker(\mathcal{D}^{n+1}) &\iff \forall w \in X^+, \quad D_w(T) \in \ker(\mathcal{D}^n) \end{aligned}$$

La chaîne d'inclusions $\mathbf{k} = \ker(\mathcal{D}) \subset \cdots \subset \ker(\mathcal{D}^n) \subset \ker(\mathcal{D}^{n+1}) \subset \cdots$ définit une filtration de $\ker(\mathcal{D}^\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ker(\mathcal{D}^n)$, appelée la *filtration différentielle*.

Le *degré différentiel* $\mathrm{Deg}(T)$ ([1, 2]), d'une série $T \in \ker(\mathcal{D}^\infty)$ est défini par:

$$\mathrm{Deg}(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } T \in \mathbf{k} = \ker(\mathcal{D}^1) \\ n & \text{si } T \in \ker(\mathcal{D}^{n+1}) \setminus \ker(\mathcal{D}^n) \end{cases}$$

Une série formelle $T \in \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ est appelée *quasi-polynôme* ([1]) si $T \in \ker(\mathcal{D}^\infty)$.

1.3. Filtration par dualité. Soit $\mathbf{B} = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une base de $\mathcal{L}ie\langle X\rangle$ *homogène, totalement ordonnée pour un ordre «<» compatible avec le degré*, et soit $\mathbf{W}$ la *base de Poincaré-Birkhoff-Witt* de $\mathbf{k}\langle X\rangle$ associée. Tout $W \in \mathbf{W}$ s'écrit:

$$W = b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_m}, \qquad b_{i_1} \geq b_{i_2} \geq \cdots \geq b_{i_m}, \qquad (b_{i_j} \in \mathbf{B})$$

L'entier $\ell(W) = m$ est appelé *largeur de* W. Tout $W \in \mathbf{W}$ est donc un polynôme homogène de $\mathbf{k}\langle X\rangle$ (pour le degré).

On note $\mathbf{J} = \{J_W\}_{W\in\mathbf{W}}$ la famille de polynômes de $\mathbf{k}\langle X\rangle$ représentant la *«base duale»* de $\mathbf{W}$ ([12]). Elle est donc définie par:

$$\forall\, W, W' \in \mathbf{W}, \quad \langle J_W \mid W'\rangle = \delta_W^{W'}.$$

Pour tout $T \in \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$, on note $n = \mathrm{size}(T)$ le plus petit entier (s'il existe) vérifiant:

$$\forall\, W \in \mathbf{W}, \qquad \ell(W) > n \Rightarrow \langle J_W \mid T\rangle = 0.$$

La fonction «size» induit sur $\{T \mid \mathrm{size}(T) < \infty\}$ la *filtration par dualité*.

2. Les équivalences.

2.1. Préliminaires. Les résultats de cette sous-section sont soit connus, soit élémentaires.

Lemme 2.1. [1] *Tout produit d'au plus m éléments de Lie appartient à* $\ker(\mathcal{D}^{m+1})$.

Lemme 2.2. *Pour tout $P \in \mathbf{k}\langle X\rangle$, et tout $j \in \mathbb{N}$, les endomorphismes linéaires suivants de $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ sont continus: $T \mapsto \langle P \mid T\rangle$, $T \mapsto D_P(T)$ et $\tau_j : T \mapsto \sum_{|w|\leq j} \langle T \mid w\rangle w$.*

Lemme 2.3. *(Résultats de* [12] *pour la base duale)*

- *Pour tout $W \in \mathbf{W}$, J_W est un polynôme homogène de même degré que W.*
- *Les polynômes J_W forment une base de l'algèbre enveloppante de $\mathcal{L}ie\langle X\rangle$.*
- *Pour tout $W = b_{i_1} \cdots b_{i_m} \in \mathbf{W}$, on a : $J_W = 1/\alpha_W J_{b_{i_1}} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup J_{b_{i_m}}$ où α_W est un entier non nul. Pour la formule exacte, voir* [12].

2.2. Convergence. Toute somme infinie de la forme $\sum_{W\in\mathbf{W}} t_W W$ avec $t_W \in \mathbf{k}$ doit être calculée dans $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ pour la topologie de $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$. Pour la sommer, il faut un *ordre de sommation* sur l'ensemble infini $\mathbf{W}$.

Un ordre total (noté «$\prec$») sur $\mathbf{W}$ sera dit *adapté* s'il est compatible avec le degré, i.e. s'il vérifie, pour tous éléments $W_1, W_2 \in \mathbf{W}$: $\deg(W_1) < \deg(W_2) \implies W_1 \prec W_2$.

Lemme 2.4. *(Convergence commutative) Toute somme infinie $\sum_{W\in\mathbf{W}} t_W\ W$ avec $\{t_W \in \mathbf{k}\}$ sommée suivant l'ordre $\prec$ converge. De plus sa somme ne dépend pas de l'ordre adapté choisi.*

Preuve. Puisque $\prec$ est un ordre adapté, le coefficient d'un mot w de degré n est le même dans la somme infinie que dans la somme partielle restreinte aux W de degré n, et cette dernière somme est finie. D'où le résultat. $\square$

Proposition 2.1. *Appelons expansion de PBW de la série T la somme*

$$T^\sharp = \sum_{W\in\mathbf{W}} \langle J_W \mid T\rangle\, W.$$

Pour toute série formelle T, on a $T^\sharp = T$.

Preuve. Pour tout $W' \in \mathbf{W}$, par continuité de l'application $S \mapsto \langle J_{W'} \mid S\rangle$ (lemme 2.2), on a :

$$\langle J_{W'} \mid T^\sharp\rangle = \langle J_{W'} \mid \sum_{W\in\mathbf{W}} \langle J_W \mid T\rangle\, W\rangle = \sum_{W\in\mathbf{W}} \langle J_W \mid T\rangle\, \langle J_{W'} \mid W\rangle = \langle J_{W'} \mid T\rangle$$

Or les J_W forment une base de $\mathbf{k}\langle X\rangle$. D'où $\langle u \mid T^\sharp\rangle = \langle u \mid T\rangle$ pour tout mot u, et donc $T^\sharp = T$. $\square$

2.3. Le théorème principal.

Théorème 1. *Pour toute série formelle T, on a :* $\mathrm{Deg}(T) = \mathrm{size}(T) = \mathcal{F}(T)$*, et donc les trois filtrations (de Lie, différentielle, et par dualité) coïncident.*

Preuve.

- $\mathcal{F}(T) \geq \mathrm{Deg}(T)$. *Supposons $\mathcal{F}(T) = n$.*

– Si $T \in \mathcal{L}ie_n\langle X\rangle$, alors par le lemme 2.1 $\deg(T) \leq n$.

– Si T est limite d'une suite de polynômes $Q_j \in \mathcal{L}ie_n\langle X\rangle$, alors $\deg(Q_j) \leq n$ pour tout j. Chacun des Q_j est donc annulé par tout opérateur de $\mathcal{D}^{n+1}$, et donc aussi T par continuité (lemme 2.2), et donc $\deg(T) \leq n$.

- $\mathrm{Deg}(T) \geq \mathrm{size}(T)$. *Supposons* $\mathrm{Deg}(T) = n$.
  Pour $W = b_1 \cdots b_m \in \mathbf{W}$ vérifiant $m = \ell(W) > n$, on a (*cf.* lemme 2.3):

$$\langle J_W \mid T \rangle \; = \; 1/\alpha_W \langle J_{b_1} ⧢ \cdots ⧢ J_{b_m} \mid T \rangle \; = \; 1/\alpha_W \langle D_{J_{b_1}} \cdots D_{J_{b_m}}(T) \mid \varepsilon \rangle \; = \; 0$$

  où α_W est un entier non nul. Donc $\mathrm{size}(T) \leq n$.
- $\mathrm{size}(T) \geq \mathcal{F}(T)$. *Supposons* $\mathrm{size}(T) = n$.
  D'après la proposition 2.1, on a $T = \sum_{W \in \mathbf{W}} \langle J_W \mid T \rangle W = \sum_{\ell(W) \leq n} \langle J_W \mid T \rangle \, W$.
  La série T est donc la somme des $\langle J_W \mid T \rangle \; W$ pour $\mathcal{F}(W) \leq n$, et par conséquent $\mathcal{F}(T) \leq n$. $\square$

Corollaire 2.1. *Une série T est un quasi-polynôme si et seulement si elle est de filtration de Lie finie. Plus précisément, on a pour tout entier n:*

$$\mathrm{ker}(\mathcal{D}^{n+1}) = \mathcal{L}ie_n \langle\!\langle X \rangle\!\rangle = \{T \in \mathbf{k}\langle\!\langle X \rangle\!\rangle \mid \mathrm{size}(T) \leq n\}$$

Soit $\mathcal{L}ie^n \langle X \rangle$ l'espace vectoriel engendré par les produits *d'exactement* n polynômes de Lie, $\mathcal{L}ie^n \langle\!\langle X \rangle\!\rangle$ sa fermeture dans $\mathbf{k}\langle\!\langle X \rangle\!\rangle$, et $\mathbf{k}_n \langle X \rangle$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

Corollaire 2.2. *Pour tout entier n strictement positif, on a* ([1, p. 106]):

$$\mathrm{ker}(\mathcal{D}^{n+2}) \; = \; \mathcal{L}ie_{n+1} \langle\!\langle X \rangle\!\rangle \; = \; \mathbf{k}_n \langle X \rangle \oplus \mathcal{L}ie^{n+1} \langle\!\langle X \rangle\!\rangle$$

Preuve. Il est clair que $\mathbf{k}_n \langle X \rangle \cap \mathcal{L}ie^{n+1} \langle\!\langle X \rangle\!\rangle = 0$. Puisque les trois espaces intervenant sont fermés dans $\mathbf{k}\langle\!\langle X \rangle\!\rangle$, il suffit en fait de montrer: $\mathcal{L}ie_{n+1} \langle X \rangle = \mathbf{k}_n \langle X \rangle \oplus \mathcal{L}ie^{n+1} \langle X \rangle$. Il suffit alors de montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'inclusion: $\mathcal{L}ie^n \langle X \rangle \subset \mathbf{k}X^n + \mathcal{L}ie^{n+1} \langle X \rangle$.

Or on a: $\mathcal{L}ie^1 \langle X \rangle \subset \mathbf{k}X + \mathcal{L}ie^2 \langle X \rangle$, et si l'inclusion est vraie à l'ordre n, on obtient:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}ie^n . \mathcal{L}ie \langle X \rangle &\subset \mathbf{k}X^n . \mathcal{L}ie \langle X \rangle + \mathcal{L}ie^{n+1} \langle X \rangle . \mathcal{L}ie \langle X \rangle \\ \mathcal{L}ie^{n+1} \langle X \rangle &\subset \mathbf{k}X^{n+1} + \mathbf{k}X^n . \mathcal{L}ie^2 \langle X \rangle + \mathcal{L}ie^{n+2} \langle X \rangle \\ \mathcal{L}ie^{n+1} \langle X \rangle &\subset \mathbf{k}X^{n+1} + \mathcal{L}ie^{n+2} \langle X \rangle . \qquad \square \end{aligned}$$

2.4. Graduation. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\mathcal{L}\mathbf{B}^n \langle\!\langle X \rangle\!\rangle = \{T \in \mathbf{k}\langle\!\langle X \rangle\!\rangle \mid \langle J_W \mid T \rangle \neq 0 \implies \ell(W) = n\}.$$

Proposition 2.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a*

$$\mathrm{ker}(\mathcal{D}^{n+1}) \; = \; \mathcal{L}ie_n \langle\!\langle X \rangle\!\rangle \; = \; \mathcal{L}ie_{n-1} \langle\!\langle X \rangle\!\rangle \oplus \mathcal{L}\mathbf{B}^n \langle\!\langle X \rangle\!\rangle.$$

Preuve. On a $\mathcal{L}ie_n \langle\!\langle X \rangle\!\rangle = \mathcal{L}ie_{n-1} \langle\!\langle X \rangle\!\rangle + \mathcal{L}\mathbf{B}^n \langle\!\langle X \rangle\!\rangle$ puisque $\mathcal{L}ie_n \langle X \rangle \subset \mathcal{L}ie_{n-1} \langle X \rangle + \mathcal{L}\mathbf{B}^n \langle X \rangle$, et puisque $\mathcal{L}\mathbf{B}^n \langle X \rangle \subset \mathcal{L}ie_n \langle\!\langle X \rangle\!\rangle$.

Reste à montrer que l'intersection se réduit à 0: si $T \in \mathcal{L}ie_{n-1} \langle\!\langle X \rangle\!\rangle \cap \mathcal{L}\mathbf{B}^n \langle\!\langle X \rangle\!\rangle$, alors $\langle J_W \mid T \rangle$ est nul si $\ell(W) > n-1$, mais aussi si $\ell(W) \neq n$. L'expansion de PBW de T a tous ses coefficients nuls, et donc $T = 0$. $\square$

Corollaire 2.3. *L'algèbre des quasi-polynômes admet la présentation graduée :*

$$\ker(\mathcal{D}^\infty) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}\mathbf{B}^n\langle\langle X\rangle\rangle$$

English extended abstract. Let $X^\star$ the set of words over the finite alphabet X. A word is a finite sequence of letters $w = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, where n is the *length* of w. The *empty word*, noted ε is the unique word of length 0. We set $X^+ = X^\star\backslash\varepsilon$. The concatenation product of the words u and v is noted uv.

A power series over a field $\mathbf{k}$ *(supposed here of characteristic* 0*)* is any infinite sum $T = \sum_{w\in X^\star}\langle T \mid w\rangle\, w$ with $\langle T \mid w\rangle \in \mathbf{k}$. The sum $S+T$ of two series S and T is defined by $\langle S+T \mid w\rangle = \langle S \mid w\rangle + \langle T \mid w\rangle$ for any word w. The product ST is of S and T defined by $\langle ST \mid w\rangle = \sum_{uv=w}\langle S \mid u\rangle\langle T \mid v\rangle$ *(for a fixed w this sum is finite).*

Let us define support$(T) = \{w \mid \langle T \mid w\rangle \neq 0\}$. A polynomial P is a power series of finite support. Its *degree* is the greatest lentgh of a word in support(P). The *valuation* of a power series T is the smallest lentgh of a word in support(T). For this valuation, the algebra $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$ of power series is the separated completion of the algebra $\mathbf{k}\langle X\rangle$ of polynomials.

By means of the Lie product, defined on polynomials by $[P,Q] = PQ - QP$, the letters of X generate the free Lie algebra $\mathcal{L}ie\langle X\rangle$, which admits $\mathbf{k}\langle X\rangle$ as envelopping algebra. We note $\mathcal{L}ie\langle\langle X\rangle\rangle$ the topological closure of $\mathcal{L}ie\langle X\rangle$ in $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$. Any Lie series $T \in \mathcal{L}ie\langle\langle X\rangle\rangle$ is the sum of its homogeneous components (for the *degree*).

To each word u, Bendiffallah associates a *differential operator* D_u over $\mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$. He denotes by $\mathcal{D}^n$ the set of all composition products of n operators of the form D_u for $u \neq \varepsilon$. Finally, $\ker(\mathcal{D}^n)$ is the intersection of the kernels of all operators in $\mathcal{D}^n$. A series S is called a quasi-polynomial if for some n we have $S \in \ker(\mathcal{D}^n)$.

Let $\mathcal{L}ie_n\langle X\rangle$ the vector space spanned by the products of at most n Lie polynomials. We show here, as conjectured by B. Bendiffallah, that for each n

$$\ker(\mathcal{D}^{n+1}) = \mathcal{L}ie_n\langle\langle X\rangle\rangle. \tag{3}$$

1. Three filtrations.

1.1. Lie Filtration. The inclusion chain $\mathbf{k} = \mathcal{L}ie_0\langle\langle X\rangle\rangle \subset \cdots \subset \mathcal{L}ie_n\langle\langle X\rangle\rangle \subset \mathcal{L}ie_{n+1}\langle\langle X\rangle\rangle \subset \cdots$ defines an increasing filtration called *Lie filtration*.

For each integer $n > 0$, we set $\mathcal{F}(T) = n$ iff $T \in \mathcal{L}ie_n\langle\langle X\rangle\rangle \setminus \mathcal{L}ie_{n-1}\langle\langle X\rangle\rangle$.

Differential Filtration. The *shuffle product* $P \sqcup\!\sqcup Q$ of two polynomials P and Q is the polynomial defined by $\langle P \sqcup\!\sqcup Q \mid w\rangle = \langle \Gamma(w) \mid P \otimes Q\rangle$ for any $u \in X^\star$, where Γ is the coproduct classically defined as follows :

- If $x \in X$, we set $\Gamma(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x$. If $u, v \in X^\star$, we set $\Gamma(uv) = \Gamma(u)\Gamma(v)$.
- For a power series $T \in \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$, we set $\Gamma(T) = \sum_{w\in X^\star}\langle T \mid w\rangle\Gamma(w)$.

The *Bendiffallah differential* $D_P(T)$ of a series T by a polynomial P is defined by setting : $\langle D_P(T) \mid w\rangle = \langle T \mid w \sqcup\!\sqcup P\rangle$ for any $w \in X^\star$. We note $\mathcal{D}$ the set of the operators D_u for all $u \neq \varepsilon$. Then we set :

$$T \in \ker(\mathcal{D}) \iff \forall w \in X^+, \quad D_w(T) = 0$$
$$T \in \ker(\mathcal{D}^{n+1}) \iff \forall w \in X^+, \quad D_w(T) \in \ker(\mathcal{D}^n)$$

For each integer $n > 0$ we set $\mathrm{Deg}(T) = n$ iff $T \in \ker(\mathcal{D}^{n+1}) \setminus \ker(\mathcal{D}^n)$.

The family of inclusions $\ker(\mathcal{D}^n) \subset \ker(\mathcal{D}^{n+1})$ defines the *differential filtration*.

1.3. Filtration by duality. Let $\mathbf{B} = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ an homogeneous basis of $\mathcal{L}ie\langle X\rangle$ totally ordered by an ordering compatible with the degree. Let $\mathbf{W}$ the associated *Poincaré-Birkhoff-Witt basis* of $\mathbf{k}\langle X\rangle$. For any $W \in \mathbf{W}$:

$$W = b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_m}, \qquad b_{i_1} \geq b_{i_2} \geq \cdots \geq b_{i_m}, \qquad (b_{i_j} \in \mathbf{B}),$$

the integer $\ell(W) = m$ will be called the *largeness of* W.

Let $\mathbf{J} = \{J_W\}_{W\in\mathbf{W}}$ the "dual basis" of $\mathbf{W}$. We have: $\forall\, W, W' \in \mathbf{W}$, $\langle J_W \mid W'\rangle = \delta_W^{W'}$.

For $T \in \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle$, we call $\mathrm{size}(T)$ the smallest integer n such that:

$$\forall\, W \in \mathbf{W}, \qquad \ell(W) > n \Rightarrow \langle J_W \mid T\rangle = 0$$

The size function induces the *filtration by duality*.

2. The main theorem. The main theorem shows that the three filtrations *(Lie, differential, and by duality)* coincide.

Theorem 1. *For any power series T, we have:*

$$\mathrm{Deg}(T) = \mathrm{size}(T) = \mathcal{F}(T)$$

Corollary 2.1. *A power series T is a quasi polynomial iff it has a finite Lie filtration, namely:*

$$\ker(\mathcal{D}^{n+1}) = \mathcal{L}ie_n\langle\langle X\rangle\rangle = \{T \in \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle \mid \mathrm{size}(T) \leq n\}$$

Corollary 2.2. *For any integer $n > 0$ one has*

$$\ker(\mathcal{D}^{n+2}) \;=\; \mathcal{L}ie_{n+1}\langle\langle X\rangle\rangle \;=\; \mathbf{k}_n\langle X\rangle \oplus \mathcal{L}ie^{n+1}\langle\langle X\rangle\rangle$$

where $\mathbf{k}_n\langle X\rangle$ is the set of polynomials of degree at most equal to n.

2.1. Graduation. For any integer $n > 0$, we set:

$$\mathcal{L}\mathbf{B}^n\langle\langle X\rangle\rangle = \{T \in \mathbf{k}\langle\langle X\rangle\rangle \mid \langle J_W \mid T\rangle \neq 0 \implies \ell(W) = n\}.$$

Proposition 2.1. *For $n > 1$, we have*

$$\ker(\mathcal{D}^{n+1}) \;=\; \mathcal{L}ie_n\langle\langle X\rangle\rangle \;=\; \mathcal{L}ie_{n-1}\langle\langle X\rangle\rangle \oplus \mathcal{L}\mathbf{B}^n\langle\langle X\rangle\rangle.$$

Corollary 2.3. *The algebra of quasi-polynomials admits the graded presentation:*

$$\ker(\mathcal{D}^\infty) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}\mathbf{B}^n\langle\langle X\rangle\rangle$$

BIBLIOGRAPHIE

1. B. Bendiffalah, *Contribution à l'étude locale des singularités: Forme ombre, Polylogarithmes et éléments de Lie*, Thèse, Université de Aix-Marseille I, 20 janvier 1994.
2. B. Bendiffalah, *Exponentielles d'éléments de Lie et calcul différentiel libre*, Ann. Sci. Math. Québec **20** (1996), 135–154.
3. N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques. Fasc. XXXVII. Groupes et Algèbres de Lie. Chapitre II: Algèbres de Lie libres*, Hermann, Paris, 1972.
4. G. J. Berstel et C. Reutenauer, *Rational series and their languages*, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, vol. 12, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1988.
5. J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Les Grands Classiques Gauthiers-Villars, Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996.
6. G. Jacob, *Lie-Jordan super-algebras and completely free finitely generated super-algebras*, Ateliers Franco-Québécois de Combinatoire, Bordeaux, mai 1991.
7. G. Jacob et N. Oussous, *Sur un résultat de Ree: Séries de Lie et Algèbres de mélange*, Rapport de recherche no 103, LIFL, Université Lille I, 1987.
8. A. A. Mikhalev et A. A. Zolotykh, *Combinatorial Aspects of Lie Superalgebras*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
9. J. W. Milnor et J. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. (2) **81** (1965), 211–264.
10. D. E. Radford, *A natural ring basis for the shuffle algebra and an application to group schemes*, J. Algebra **58** (1979), 432–454.
11. R. Ree, *Lie elements and an algebra associated with shuffles*, Ann. of Math. (2) **68** (1958), 210–220.
12. C. Reutenauer, *Free Lie algebras*, London Mathematical Society Monographs. New series, vol. 7, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.
13. Moss E. Sweedler, *Hopf algebras*, Mathematics Lecture Note Series, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
14. X. Viennot, *Algèbres de Lie libres et monoïdes libres. Bases des algèbres de Lie libres et factorisations des monoïdes libres*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 691, Springer, Berlin, 1978.

M. Bigotte, G. Jacob et N. Oussous
LIFL (URA 369 CNRS)
Université Lille I
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France