Ann. Sci. Math. Québec **23** (1999), no. 2, 119–137.

COMPLÉMENTS DE DUALITÉ QUASI CONVEXE

CHARKI AMARA ET MICHEL VOLLE

RÉSUMÉ. On établit une formule de dualité pour la minimisation d'une fonction quasi convexe avec contraintes définies par une multiapplication convexe. Cette approche permet de traiter le cas des contraintes d'inégalité et fournit notamment une formule de dualité pour la minimisation d'une fonction quasi convexe composée.

ABSTRACT. We establish a duality formula for the infimum of a quasi-convex function subject to constraints defined by a multifunction. A special attention is payed for inequality constraints and for the minimization of a quasi-convex composite function.

1. Introduction. La première partie de ce travail est consacrée à l'établissement d'une formule de dualité pour un problème de minimisation d'une fonction quasi convexe avec contraintes définies par une multiapplication dont le graphe est convexe. Plus précisément, étant donné deux espaces de Fréchet X et Z, une partie convexe D de X, une fonction quasi convexe $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ et une relation convexe $\Gamma \subset Z \times X$, on considère le problème

$$(\mathcal{P}) \qquad \text{minimiser } f(x) \quad \text{pour } \ x \in D \cap \Gamma(0)\ .$$

La non convexité du problème $(\mathcal{P})$ tient au fait que la fonction f est seulement supposée quasi convexe ce qui, rappelons le, signifie que pour tout réel r l'ensemble

$$\{f < r\} := \{x \in D : f(x) < r\}$$

est convexe [2, 4, 5].

Le problème $(\mathcal{P})$ recouvre une large classe de problèmes, en particulier celle des problèmes avec contraintes d'inégalités. Soit par exemple $(g_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions convexes de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; en prenant $Z = \mathbb{R}^I$, $z = (z_i)_{i \in I}$ et $\Gamma(z) = \{x \in X : g_i(x) \leq z_i \quad \forall i \in I\}$ on obtient une relation convexe $\Gamma \subset \mathbb{R}^I \times X$ et le problème $(\mathcal{P})$ s'écrit alors

$$(\mathcal{P}_1) \qquad \text{minimiser } f(x) \quad \text{pour } \ x \in D \ \text{ et } \ g_i(x) \leq 0\ ,\ \forall i \in I\ .$$

Reçu le 5 février 1998 et, sous forme définitive, le 16 octobre 1998.

Plus généralement, on peut supposer que Z est muni d'un préordre défini par un cône convexe Z_+, se donner une application g définie sur une partie convexe B de X à valeurs dans Z et dont l'épigraphe

$$\text{epi } g := \{(x,z) \in B \times Z : z - g(x) \in Z_+\} \tag{1.1}$$

est une partie convexe de $X \times Z$ (voir par exemple [18, 20] pour l'étude des fonctions convexes à valeurs vectorielles).

Posant

$$\Gamma(z) = \{x \in B : z - g(x) \in Z_+\}$$

le problème $(\mathcal{P})$ s'écrit alors

$$(\mathcal{P}_2) \qquad \text{minimiser } f(x) \quad \text{pour} \quad x \in B \cap D \quad \text{et} \quad -g(x) \in Z_+ \, .$$

L'existence de multiplicateurs pour le problème $(\mathcal{P}_2)$ a été récemment obtenu dans [13]. Il s'agit là d'une généralisation d'un résultat de Luenberger [10] qui a considéré les problèmes du type $(\mathcal{P}_1)$ avec I fini et X de dimension finie. En dimension infinie, il est supposé dans [13] que l'épigraphe de la fonction g intervenant dans le problème $(\mathcal{P})$ est convexe **fermé**. On se propose d'assouplir cette condition en supposant que dans le problème $(\mathcal{P})$ le graphe de Γ est la projection d'un ensemble sériellement convexe (SC) : conformément à la terminologie introduite dans [1] nous dirons alors que Γ est sous-sériellement convexe (sous-SC). Les fonctions convexes numériques sous-SC sont les fonctions dont l'épigraphe est sous-SC. Lorsque I est fini ou dénombrable et que pour tout $i \in I$ la fonction g_i est sous-SC, le graphe de la relation Γ du problème $(\mathcal{P}_1)$ est sous-SC mais non forcément fermé ni SC (lemme 2.3.1).

En supposant comme dans [13] que la fonction quasi convexe f est directionnellement semi-continue supérieurement sur $D \cap \Gamma(Z)$, que le graphe de Γ est sous-SC, et que le cône engendré par le domaine de Γ est un sous-espace vectoriel fermé de Z on obtient l'existence d'une forme linéaire continue non nulle z^* de Z telle que (théorème 2.2.1) :

$$\inf_{x \in D \cap \Gamma(0)} f(x) = \inf_{(x,z) \in D \times Z} \{f(x) : \langle z, z^* \rangle \leq 0 \ \text{ et } \ x \in \Gamma(z)\} \, . \tag{1.2}$$

Dans le cas particulier du problème $(\mathcal{P}_2)$ on retrouve l'existence d'une forme linéaire positive continue $z^* \in Z_+^* \setminus \{0\}$ telle que (voir le théorème de [13])

$$\inf_{x \in B \cap D} \{f(x) : \ -g(x) \in Z_+\} = \inf_{x \in B \cap D} \{f(x) : \ \langle g(x), z^* \rangle \leq 0\}.$$

Ce résultat est essentiellement dû à une extension du théorème d'ouverture d'Ursescu-Robinson au cas des relations dont le graphe est sous-SC (lemme 2.1.1).

La formule (1.2) s'écrit encore

$$\inf_{x \in D \cap \Gamma(0)} f(x) = \max_{z^* \in Z^* \setminus \{0\}} \ \inf_{(x,z) \in D \times Z} \{f(x) : \langle z, z^* \rangle \leq 0 \ \text{ et } \ x \in \Gamma(z)\} \, .$$

Le problème

$$(\mathcal{Q}) \qquad \text{maximiser} \ \inf_{(x,z) \in D \times Z} \{f(x) : \langle z, z^* \rangle \leq 0 \ \text{ et } \ x \in \Gamma(z)\} \quad \text{pour} \quad z^* \in Z^*$$

peut être considéré comme dual du problème $(\mathcal{P})$ dans la mesure où on a toujours

$$\text{inf } (\mathcal{P}) \geq \text{ sup } (\mathcal{Q}) \ .$$

Avec les hypothèses mentionnées plus haut, on voit alors que le saut de dualité est nul et que $(\mathcal{Q})$ possède une solution optimale (ce qui n'est pas forcément le cas pour $(\mathcal{P})$). Nous observons que le problème dual $(\mathcal{Q})$ peut aussi être obtenu en considérant la fonction marginale

$$m(z) = \text{inf } \{f(x) : x \in D \cap \Gamma(z)\}$$

et en calculant la biconjuguée de m dans un schéma de dualité associé aux fonctions «evenly» quasi convexes.

La deuxième partie du travail a pour objet d'établir une formule de dualité pour le problème

$$(\mathcal{R}) \qquad \text{minimiser } \max(f(x), h(g(x))) \qquad \text{pour } x \in B \cap D.$$

Ici B et D sont deux parties convexes non vides d'un espace vectoriel topologique X, Z un autre espace vectoriel topologique préordonné par un cône convexe Z_+, $g : B \to Z$ une application convexe pour ce préordre, $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ et $h : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions quasi convexes avec h semi-continue supérieurement et croissante sur $g(B) + Z_+$. On peut raisonnablement penser que le problème $\mathcal{R}$ joue un rôle analogue à celui (très important) tenu par la minimisation de $f + h \circ g$ lorsque les fonctions f et g sont convexes (voir [3]). Ici on remplace la fonction $f + h \circ g$ par $f \vee h \circ g$ car $f + h \circ g$, somme de deux fonctions quasi convexes, n'est pas forcément quasi convexe ([4]). Notons que le problème $(\mathcal{R})$ peut se mettre sous la forme $(\mathcal{P}_2)$ et qu'on peut lui appliquer les résultats obtenus dans la première partie de ce travail (corollaire 2.3.3, corollaire 2.3.4). Ici on considère le problème $(\mathcal{R})$ dans des espaces plus généraux et on adopte une approche différente. On montre alors (théorème 3.1.1) qu'il existe une forme linéaire continue positive z^* de Z et un réel r tels que :

$$\text{inf}(\mathcal{R}) = \left(\inf_{x \in B \cap D} \{f(x) : \langle g(x), z^* \rangle < r\} \right) \wedge \left(\inf_{z \in Z} \{h(z) : \langle z, z^* \rangle \geq r\} \right).$$

Ce résultat a de nombreuses applications : en prenant pour f la fonction identiquement égale à $-\infty$ sur $D = X$ on obtient une formule de dualité pour la minimisation d'une fonction quasi convexe composée $h \circ g$ (corollaire 3.2.2); si $X = Z$ et g est l'identité on retrouve la formule pour la minimisation du max de deux fonctions quasi convexes [22, théorème 3.1]. Si l'intérieur de Z_+ est non vide et si h est la fonction vallée de $-\text{int } Z$ on obtient l'existence d'une forme linéaire positive continue non nulle z^* de Z telle que (corollaire 3.2.4) :

$$\inf_{x \in B \cap D} \{f(x) : -g(x) \in \text{int } Z_+\} = \inf_{x \in B \cap D} \{f(x) : \langle g(x), z^* \rangle < 0\}.$$

Revenant au probleme $(\mathcal{P})$ on établit enfin une formule analogue à (1.2) dans le cadre des espaces vectoriels topologiques généraux. Il faut pour cela supposer que la multiapplication Γ est semi-continue inférieurement (théorème 3.2.1, corollaire 3.2.5).

2. Contraintes définies par une multiapplication.

2.1. Le théorème d'ouverture d'Ursescu-Robinson étendu aux relations sous-sériellement convexes. Rappelons qu'une partie C d'un espace vectoriel topologique Y est sériellement convexe (SC) (voir [8, 9]) si pour toute série convergente $\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i x_i$ avec les x_i dans C, les $\lambda_i \geq 0$, et $\sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i = 1$, la somme de la série appartient à C. On dit que C est sous-sériellement convexe (sous-SC) s'il existe un espace de Fréchet F et une partie SC de $Y \times F$ dont la projection sur Y coïncide avec C.

La notion d'ensemble sous-SC a été introduite dans [1] pour remédier au manque de stabilité des ensembles SC (par exemple, toute projection d'ensemble sous-SC est encore sous-SC (*cf.* [1, théorème 2.1] alors que la projection d'un ensemble SC n'est pas SC en général). La classe, plus stable, des ensembles sous-SC possède encore la propriété fondamentale des ensembles SC que l'on peut énoncer comme suit :

Théorème 2.1.1. [1] *L'intérieur algébrique de toute partie sous-SC d'un espace de Fréchet coïncide avec son intérieur topologique.*

Un autre résultat concernant les ensembles sous-SC nous sera utile par la suite :

Proposition 2.1.1. [1] *Soit X un espace de Fréchet, Y un espace vectoriel topologique et $M : X \overrightarrow{\longrightarrow} Y$ une multiapplication dont le graphe est sous-SC. Alors l'image par M de toute partie sous-SC de X est sous-SC.*

On trouvera dans [1] d'autres propriétés des ensembles et des fonctions sous-SC. Nous sommes maintenant en mesure d'établir une généralisation du théorème d'ouverture d'Ursescu-Robinson [15, 19]. Ce résultat est aussi une conséquence du théorème 2.5 de [1]. Nous donnons ci-dessous une preuve complète.

Lemme 2.1.1. *Soit X, Z deux espaces de Fréchet et $M : X \overrightarrow{\longrightarrow} Z$ une multiapplication dont le graphe est sous-SC. Supposons que*

$$\mathbb{R}_+(M(X)) = Z \ . \tag{2.1}$$

Dès lors, pour tout $v \in M^{-1}(0)$ et tout voisinage V de v, $M(V)$ est un voisinage de 0.

Preuve. Soit $v \in M^{-1}(0)$ et V un voisinage ouvert convexe de v. Montrons tout d'abord que 0 appartient à l'intérieur algèbrique de $M(V)$, autrement dit que

$$\mathbb{R}_+(M(V)) = Z \ . \tag{2.2}$$

Soit donc $z \in Z$. D'après (2.1) il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $(x, y) \in M$ tels que $z = \lambda y$. Puisque M est convexe on a

$$(1-t)(v, 0) + t(x, y) = ((1-t)v + tx, ty) \in M \ , \tag{2.3}$$

pour tout $t \in [0, 1[$. D'autre part, vu que V est un ouvert contenant v, il existe $r \in]0, 1]$ tel que

$$(1-t)v + tx \in V$$

pour tout $t \in [0, r]$. D'après (2.3) on a donc $ty \in M(V)$ pour tout $t \in [0, r]$. En prenant $t \in]0, 1]$ tel que $t\lambda \in [0, r]$ on obtient

$$z = \frac{1}{t}(t\lambda)y \in \mathbb{R}_+(M(V)) \ .$$

Ceci prouve que 0 appartient à l'intérieur algèbrique de $M(V)$. Or, V est convexe ouvert donc S.C. donc sous-SC et le graphe de M est sous-SC. D'après la proposition 2.1.1, $M(V)$ est donc sous-SC. Du théorème 2.1.1 résulte alors que $M(V)$ est un voisinage de 0. $\square$

2.2. La formule de dualité. Revenons au problème $(\mathcal{P})$ considéré dans l'introduction, à savoir

$$(\mathcal{P}) \qquad \text{minimiser } f(x) \quad \text{pour } \ x \in D \cap \Gamma(0)$$

où X et Z sont deux espaces de Fréchet, $\Gamma : Z \rightrightarrows X$ une multiapplication de graphe sous-SC, D une partie convexe non vide de X, et $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction quasi convexe sur D.

Introduisons le problème dual

$$(\mathcal{Q}) \qquad \text{maximiser } \inf_{(x,z)\in D\times Z} \{f(x) : \langle z, z^*\rangle \le 0 \ \text{ et } \ x \in \Gamma(z)\} \quad \text{pour } \ z^* \in Z^* .$$

Ce problème dual peut s'obtenir par l'intermédiaire de la fonction de perturbation

$$m(z) = \inf_{x\in D\cap\Gamma(z)} f(x)$$

et de la conjugaison «evenly» quasi convexe [7, 11, 12, 14, 17, 22]. Rappelons à cette occasion qu'une fonction f est dite «evenly» quasi convexe si ses tranches $\{f \le r\}$ $(r \in \mathbb{R})$ sont intersections de demi-espaces ouverts. La conjuguée «evenly» quasi convexe m^c de m est donnée par

$$m^c(z^*, r) = -\inf_{\langle z,z^*\rangle \ge r} \ \inf_{x\in D\cap\Gamma(z)} f(x)$$

pour tout $(z^*, r) \in Z^* \times \mathbb{R}$. La biconjuguée de m à l'origine s'écrit alors

$$m^{cc}(0) = \sup_{\substack{z^*\in Z^* \\ r\le 0}} -m^c(z^*, r) = \sup_{z^*\in Z^*} \ \sup_{r\le 0} \ \inf_{\langle z,z^*\rangle\ge r} \ \inf_{x\in D\cap\Gamma(z)} f(x) .$$

Pour chaque $z^* \in Z$ la fonction

$$r \longmapsto \inf_{\langle z,z^*\rangle\ge r} \ \inf_{x\in D\cap\Gamma(z)} f(x)$$

est croissante, ce qui nous permet d'écrire

$$m^{cc}(0) = \sup_{z^*\in Z^*} \ \inf_{(x,z)\in D\times Z} \{f(x) : \langle z, z^*\rangle \ge 0 \ \text{ et } \ x \in \Gamma(z)\}$$

ou encore

$$m^{cc}(0) = \sup_{z^*\in Z^*} \ \inf_{(x,z)\in D\times Z} \{f(x) : \langle z, z^*\rangle \le 0 \ \text{ et } \ x \in \Gamma(z)\}$$

On donne ainsi une interprétation perturbationnelle du problème $(\mathcal{Q})$. On a en particulier

$$(2.4) \qquad \inf\ (\mathcal{P}) = m(0) \ge m^{cc}(0) = \ \sup(\mathcal{Q}) .$$

Plus précisément nous savons [11, 12, 13, 22] que la fonction biconjuguée m^{cc} coïncide avec la plus grande fonction «evenly» quasi convexe qui minore m.

Comme dans [13], on supposera que la fonction quasi convexe f est directionnellement semi-continue supérieurement en tout point de $D \cap \Gamma(Z)$, ce qui veut dire que :

$$\text{pour tout } \ x \in D \cap \Gamma(Z)\ ,\ v \in X \setminus \{0\}\ , \quad \limsup_{\substack{(t,w)\to(0^+,v)\\ x+tw\in D\cap\Gamma(Z)}} f(x+tw) \le f(x)\ .$$

Cette condition est moins forte que la semicontinuité supérieure de f et elle implique la semicontinuité supérieure de f sur les segments ; de plus (voir aussi [4]) :

Propriété 2.2.1. *Soit D un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction quasi convexe. Les trois propriétés ci-dessous sont équivalentes:*

a) *f est semi-continue supérieurement sur D.*
b) *f est directionnellement semi-continue supérieurement sur D.*
c) *f est semi-continue supérieurement sur les segments.*

Preuve. On a bien sûr **a)** $\Rightarrow$ **b)** $\Rightarrow$ **c)**, et il suffit de démontrer que **c)** $\Rightarrow$ **a)**. Soit donc $x \in D$ et $K = \mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_{2^n}\}$ un voisinage cubique de x inclus dans D. Pour $r > f(x)$ et pour chaque $i \in \{1, \ldots, 2^n\}$, la semicontinuité supérieure de f sur le segment $[x, x_i]$ entraîne l'existence d'un réel $t_i > 0$ tel que $r > f(x + t_i(x_i - x))$. Posant

$$t = \min_{1\le i\le 2^n} t_i \quad \text{et} \quad y_i = x + t(x_i - x)$$

on obtient un voisinage cubique $K = \mathrm{co}\{y_1, \ldots, y_{2^n}\}$ de x tel que pour tout $y \in K$

$$f(y) \le \max_{1\le i\le 2^n} f(y_i) < r.$$

Ceci montre que f est semi-continue supérieurement en x. $\square$

Énonçons maintenant le résultat principal de ce paragraphe. On désigne par

$$\mathrm{dom}\ \Gamma := \{z \in Z : \Gamma(z) \neq \emptyset\}$$

le domaine de la multiapplication Γ.

Théorème 2.2.1. *Soit X, Z deux espaces de Fréchet, f une fonction quasi convexe définie sur une partie convexe D de X, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, et $\Gamma : Z \ \substack{\longrightarrow\\ \longrightarrow}\ X$ une multiapplication dont le graphe est sous-SC. On suppose que f est directionnellement semi-continue supérieurement en tout point de $D \cap \Gamma(Z)$. On suppose aussi que*

$$(\mathbf{C.Q.1}) \qquad \begin{cases} Z_1 := \mathbb{R}_+(\mathrm{dom}\ \Gamma) \ \text{ est un} \\ \text{sous-espace vectoriel fermé de } \ Z\ . \end{cases}$$

Alors

$$(2.5) \qquad \inf_{x\in D\cap\Gamma(0)} f(x) = \max_{z^*\in Z^*\setminus\{0\}} \inf_{(x,z)\in D\times Z} \{f(x) : \langle z, z^*\rangle \le 0 \ \text{ et } \ x \in \Gamma(z)\}.$$

Preuve. Notons α et β les valeurs respectives des deux membres de l'égalité ci-dessus. L'inégalité (2.4) entraîne alors que $\alpha \geq \beta$.

Montrons maintenant que $\alpha \leq \beta$. Considérons pour cela la multiapplication $\Gamma_1 : Z_1 \rightrightarrows X$ définie par $\Gamma_1(z) = \Gamma(z)$ pour tout $z \in Z_1$. On a alors, d'après (**C.Q.1**) :

$$\text{dom}\,\Gamma_1 = \text{dom}\,\Gamma\ . \tag{2.6}$$

Supposons que $\Gamma_1^{-1}(\{f < \alpha\}) = \emptyset$, ce qui, d'après (2.6), équivaut à $\Gamma^{-1}(\{f < \alpha\}) = \emptyset$. Dès lors, pour tout $(z,x) \in \Gamma$ on a $f(x) \geq \alpha$. De ce fait, dans la formule (2.5) toute forme linéaire z^* réalise le maximum (égal à α).

Supposons maintenant que $\Gamma_1^{-1}(\{f < \alpha\}) \neq \emptyset$.

Nous allons montrer que l'intérieur dans Z_1 de cet ensemble est alors non vide. Fixons pour cela z dans $\Gamma_1^{-1}(\{f < \alpha\})$. Il existe donc $x \in D$ tel que

$$z \in \Gamma_1^{-1}(x) \quad \text{et} \quad f(x) < \alpha.$$

Puisque $\text{dom}\Gamma = \text{dom}\Gamma_1$ est convexe, la condition (**C.Q.1**) entraîne que $0 \in \text{dom}\Gamma_1$. Soit alors $v \in \Gamma_1(0)$. Observons que v est différent de x.

En effet, si $v = x$ on aurait $v \in D \cap \Gamma(0)$ et de ce fait

$$\alpha \leq f(v) = f(x) < \alpha\ ,$$

ce qui est absurde.

Puisque f est directionnellement semi-continue supérieurement au point $x \in D \cap \Gamma(z)$, il existe un réel $t \in]0,1[$ et un voisinage V de v tel que

$$f(x + t(u - x)) < \alpha \quad \text{pour tout} \quad u \in V\ .$$

Il résulte alors de la convexité du graphe de Γ_1 que

$$t\Gamma_1^{-1}(u) + (1-t)\Gamma_1^{-1}(x) \subset \Gamma_1^{-1}(x + t(u-x)) \subset \Gamma^{-1}(\{f < \alpha\})$$

pour tout $u \in V$. On a donc en particulier

$$t\Gamma_1^{-1}(V) + (1-t)z \subset \Gamma^{-1}(\{f < \alpha\})\ .$$

Or Γ_1 est sous-SC et $\mathbb{R}_+(\Gamma_1^{-1}(X)) = \mathbb{R}_+(\text{dom}\,\Gamma_1) = Z_1$. Il résulte du lemme 2.1.1 que $\Gamma_1^{-1}(V)$ est un voisinage de 0 dans Z_1. Ainsi, $\Gamma_1^{-1}(\{f < \alpha\})$ est une partie convexe d'intérieur non vide dans Z_1. De plus, par définition de α, cette partie ne contient pas 0. On peut alors séparer les deux convexes disjoints $\{0\}$ et $\Gamma_1^{-1}(\{f < \alpha\})$. Il existe donc une forme linéaire continue non nulle z_1^* de Z_1 telle que :

$$\Gamma_1^{-1}(\{f < \alpha\}) \subset \{\langle \cdot, z_1^* \rangle \geq 0\}\ .$$

Plus précisément on a :

$$\Gamma_1^{-1}(\{f < \alpha\}) \subset \{\langle \cdot, z_1^* \rangle > 0\}\ . \tag{2.7}$$

En effet, si $z \in \Gamma_1^{-1}(\{f < \alpha\})$ alors on vient de voir qu'il existe un réel $t \in]0,1[$ tel que $\Gamma_1^{-1}(\{f < \alpha\})$ contient un voisinage W de $(1-t)z$ dans Z_1. Dès lors $W \subset \{\langle \cdot, z_1^* \rangle \geq 0\}$ et $\langle z, z_1^* \rangle$ ne peut être nul (sinon $(1-t)z$ serait un minimum local de la forme linéaire non nulle z_1^*). Observons maintenant que l'inclusion (2.7) équivaut à

$$\forall z \in z_1 \quad \langle z, z_1^* \rangle \leq 0 \implies \{f < \alpha\} \cap \Gamma_1(z) = \emptyset \,,$$

soit encore

$$\forall z \in z_1 \quad \langle z, z_1^* \rangle \leq 0 \implies \inf_{x \in D \cap \Gamma_1(z)} f(x) \geq \alpha \,.$$

On a donc finalement

$$\inf_{(x,z) \in D \times Z} \{f(x) : \langle z, z_1^* \rangle \leq 0 \text{ et } x \in \Gamma_1(z)\} \geq \alpha \,.$$

Avec un prolongement linéaire continu z^* de z_1^* à Z et vu que $\Gamma(z) = \Gamma_1(z)$ si $z \in z_1$ et $\Gamma(z) = \emptyset$ si $z \in Z \setminus Z_1$, on a alors

$$\beta \geq \inf_{(x,z) \in D \times Z} \{f(x) : \langle z, z^* \rangle \leq 0 \text{ et } x \in \Gamma(z)\} \geq \alpha \geq \beta \,.$$

La preuve est ainsi terminée. $\square$

Corollaire 2.2.1. *Si dans le théorème 2.2.1 on remplace la condition* (**C.Q.1**) *par la condition*

(C.Q.1)' $\qquad \operatorname{dom} \Gamma = Z \,,$

alors, pour tout $z \in Z$ on a

$$\inf_{x \in D \cap \Gamma(z)} f(x) = \max_{z^* \in Z^* \setminus \{0\}} \inf_{(x,y) \in D \times Z} \{f(x) : \langle y, z^* \rangle \leq \langle z, z^* \rangle \;\; et \;\; x \in \Gamma(z)\}.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 2.2.1 en remplaçant Γ par la multiapplication $\Omega : Z \rightrightarrows X$ définie par $\Omega(y) = \Gamma(y + z)$ pour tout $y \in Z$ (z étant fixé). D'après (**C.Q.1**)' on a alors

$$\mathbb{R}_+(\operatorname{dom} \Omega) = \mathbb{R}_+(-z + \operatorname{dom} \Gamma) = Z. \qquad \square$$

2.3. Applications.

2.3.1. Problèmes avec contraintes d'inégalité. Revenons maintenant au problème $(\mathcal{P}_2)$ mentionné dans l'introduction, à savoir :

$(\mathcal{P}_2) \qquad$ minimiser $f(x) \qquad$ pour $\quad x \in B \cap D$ et $-g(x) \in Z_+$

où X et Z sont deux espaces de Fréchet avec Z muni d'un préordre défini par le cône convexe Z_+, B et D deux parties convexes non vides de X, f et g deux applications vérifiant les conditions ci-dessous :

$$(\mathbf{H}_1) \qquad \begin{cases} f : D \to \overline{\mathbb{R}} \text{ est quasi convexe} \\ \text{directionnellement semi-continue supérieurement sur } B \cap D \end{cases}$$

i.e., pour tout $x \in D \cap B$, $v \in X \setminus \{0\}$ $\quad \limsup_{\substack{(t,w)\to(0_+,v)\\ x+tw\in B\cap D}} f(x+tw) \leq f(x)$,

(H$_2$) $\left\{\begin{array}{l} g : B \to Z \text{ est une application dont} \\ \text{l'épigraphe défini par (1.1) est sous-SC dans } X \times Z. \end{array}\right.$

Considérons la multiapplication $\Gamma : Z \rightrightarrows X$ définie par

$$\Gamma(z) := \{x \in B : g(x) - z \in -Z_+\}$$

pour tout $z \in Z$. Le problème $(\mathcal{P}_2)$ s'écrit alors :

$$(\mathcal{P}'_2) \qquad \text{minimiser } f(x) \quad \text{pour } \ x \in D \cap \Gamma(0)\ .$$

Observons aussi que le graphe de Γ n'est autre que l'image par l'application linéaire $(x, z) \longmapsto (z, x)$ de l'épigraphe de g qui est sous-SC; il est donc sous-SC (d'après la proposition 2.1.1). Par ailleurs, il est facile de voir que

$$\text{dom}\, \Gamma = g(B) + Z_+ \quad \text{et que} \quad \Gamma(Z) = B\ .$$

Désignons par

$$Z^*_+ := \{z^* \in Z^* : \langle z^*, z\rangle \geq 0 \quad \forall z \in Z_+\}$$

le cône polaire positif de Z_+. Le résultat suivant étend ceux de Luenberger et Crouzeix ainsi que le théorème démontré par Penot et Volle dans [13] au cas où l'épigraphe de g est sous-SC.

Corollaire 2.3.1. *Sous les hypothèses* (**H**$_1$), (**H**$_2$) *et si, de plus,*

*(**C.Q.2**)* $\left\{\begin{array}{l} Z_1 := \mathbb{R}_+(g(B) + Z_+) \quad \textit{est un} \\ \textit{sous espace vectoriel fermé de } Z\ , \end{array}\right.$

alors

$$(2.8) \qquad \left\{\begin{array}{l} \inf\limits_{x\in B\cap D}\{f(x)\ :\ -g(x) \in Z_+\} \\ = \max\limits_{z^*\in Z^*_+\setminus\{0\}}\ \inf\limits_{x\in B\cap D}\{f(x)\ :\ \langle g(x), z^*\rangle \leq 0\}\ . \end{array}\right.$$

Preuve. Désignons encore par α et β les valeurs respectives des deux membres de l'égalité (2.8). Observons que l'inégalité $\alpha \geq \beta$ a toujours lieu.

Si $g(B \cap \{f < \alpha\}) = \emptyset$ alors $\alpha \leq \beta$ et donc $\alpha = \beta$. On peut donc supposer que $g(B \cap \{f < \alpha\}) \neq \emptyset$. En appliquant le théorème 2.2.1 au problème $(\mathcal{P}'_2)$ on obtient l'existence d'une forme linéaire continue non nulle z^* de Z telle que

$$(2.9) \qquad \alpha = \inf_{x\in B\cap D}\{f(x) :\ \ x \in \Gamma(z) \ \text{ et } \ \langle z, z^*\rangle \leq 0\}\ .$$

On sait que les restrictions z^*_1 de z^* et Γ_1 de Γ au sous-espace vectoriel Z_1 vérifient l'inclusion (2.7). Or

$$\Gamma_1^{-1}(\{f < \alpha\}) = \Big(g(B \cap \{f < \alpha\}) + Z_+\Big) \cap Z_1$$

soit, d'après (**C.Q.2**),

$$\Gamma_1^{-1}(\{f < \alpha\}) = g(B \cap \{f < \alpha\}) + Z_+.$$

D'autre part, toujours d'après (**C.Q.2**), l'ensemble convexe $g(B) + Z_+$ contient 0 et on a

$$Z_+ \subset g(B) + Z_+ + Z_+ = g(B) + Z_+ \subset Z_1 \ .$$

L'inclusion (2.7) et la non vacuité de $B \cap \{f < \alpha\}$ entraînent alors que

$$\langle z, z_1^* \rangle \geq 0 \qquad \text{pour tout} \ \ z \in Z_1 \cap Z_+ = Z_+ \ .$$

Ainsi le prolongement linéaire continu z^* de z_1^* à Z est dans Z_+^*. On en déduit l'inclusion $\{(x, g(x)) \in X \times Z : x \in B \cap D \quad \text{et} \quad \langle g(x), z^* \rangle \leq 0\} \subset \{(x, z) \in X \times Z \ : \ x \in B \cap D \ , \ \langle z, z^* \rangle \leq 0 \ \text{ et } \ g(x) - z \in -Z_+\}$.

Il résulte donc de (2.9) que

$$\alpha \leq \inf_{x \in B \cap D} \{f(x) : \ \ \langle g(x), z^* \rangle \leq 0\} \leq \ \beta.$$

En fait on a $\alpha = \beta$ puisque par ailleurs $\{x \in X : x \in B \cap D \ \text{ et } \ \langle g(x), z^* \rangle \leq 0\}$ contient $B \cap D \cap g^{-1}(-Z_+)$. $\square$

Corollaire 2.3.2. *Sous les hypothèses* (**H**$_1$), (**H**$_2$) *et si, de plus,*

$$g(B) + Z_+ = Z,$$

alors, pour tout $z \in Z$*,*

$$\begin{cases} \inf\limits_{x \in B \cap D} \{f(x) \ : \ \ -g(x) + z \in Z_+\} \\ \max\limits_{z^* \in Z_+^* \setminus \{0\}} \ \inf\limits_{x \in B \cap D} \{f(x) \ : \ \ \langle g(x), z^* \rangle \leq \langle z, z^* \rangle\} \ . \end{cases}$$

Preuve. Pour $z \in Z$ fixé, on considère l'application $g_z : B \to Z$ définie par $g_z(x) = g(x) - z$ pour tout $x \in B$. On a alors

$$\mathbb{R}_+(g_z(B) + Z_+) = \mathbb{R}_+(g(B) - z + Z_+) = Z.$$

Pour conclure il suffit donc d'appliquer le corollaire 2.3.1 en remplaçant g par g_z. $\square$

Afin d'appliquer le corollaire 2.3.1 au problème $(\mathcal{P}_1)$ mentionné dans l'introduction, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *Soit* $(g_i)_{i \in I}$ *une famille finie ou dénombrable de fonctions sous-SC de* X *dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*, et soit* $B = \cap_{i \in I} \mathrm{dom} g_i$*. L'épigraphe de l'application*

$$g : B \to \mathbb{R}^I$$

définie par $g(x) = (g_i(x))_{i \in I}$ *pour tout* $x \in B$ *est sous-SC.*

Preuve. Posons

$$A_j := \{(x, (z_i)_{i \in I}) \ : \ x \in \text{dom } g_j : \ \text{ et } \ g_j(x) \leq z_j\}$$

pour tout $j \in I$. On a alors

$$\text{epi } g = \bigcap_{j \in I} A_j \ .$$

Mais chaque A_j est l'image de epi g_j par la multiapplication

$$X \times \mathbb{R} \ni (x, r) \mapsto \{(x, (z_i)_{i \in I}) \in X \times \mathbb{R}^I \ \ : \ \ z_j = r\}$$

dont le graphe est un sous-espace vectoriel fermé. D'après la proposition 2.1.1 chaque A_j est donc sous-SC et on sait (voir [1]) que toute intersection finie ou dénombrable d'ensembles sous-SC est sous-SC. $\square$

L'ensemble I étant fini ou dénombrable, l'espace $\mathbb{R}^I$ est de Fréchet et admet pour dual topologique l'espace

$$\mathbb{R}^{(I)} := \{(\lambda_i)_{i \in I} : \lambda_i = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } \ i \in I\}.$$

On peut maintenant déduire du corollaire 2.3.1 le résultat suivant :

Corollaire 2.3.3. *Soit $(g_i)_{i \in I}$ une famille finie ou dénombrable de fonctions sous-SC de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que*

$$\begin{cases} \mathbb{R}_+ \Big[\bigcup_{x \in X} \{(z_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I \ : \ g_i(x) \leq z_i \ , \ \forall i \in I\} \Big] \\ \textit{est un sous-espace vectoriel fermé de } \mathbb{R}^I \end{cases}$$

et soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction quasi convexe directionnellement semi-continue supérieurement sur X. Il existe alors $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ avec $\lambda_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in I$ tel que :

$$\inf_{x \in X} \{f(x) \ : \ g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\} = \inf_{x \in X} \{f(x) \ : \ \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \leq 0\}.$$

2.3.2. Problèmes quasi convexes composés. On introduit maintenant une autre fonction h définie sur l'ensemble convexe $g(B \cap D) + Z_+$ et vérifiant

$$(\mathbf{H}_3) \qquad \begin{cases} h \ \text{ est quasi convexe, directionnellement semi-continue} \\ \text{supérieurement et croissante sur} \quad g(B \cap D) + Z_+ \\ \text{en ce sens que pour tout } \ u, v \ \text{ dans } \ g((B \cap D) + Z_+ \\ \text{tels que } \ v - u \in Z_+ \ \text{ on a } \ h(u) \leq h(v). \end{cases}$$

On considère alors le problème de minimisation :

$$(\mathcal{R}) \qquad \text{minimiser} \quad f(x) \vee h(g(x)) \qquad \text{pour} \quad x \in B \cap D \ ,$$

où $f(x) \vee h(g(x)) := \max(f(x), h(g(x)))$. L'hypothèse $(\mathbf{H}_3)$ nous permet d'écrire le problème $(\mathcal{R})$ comme suit :

$$(\mathcal{R}') \qquad \text{minimiser } \ f(x) \vee h(z) \qquad \text{pour } x \in B \cap D \ \ \text{et} \ \ g(x) - z \in -Z_+ \ .$$

En considérant les fonctions $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ définies respectivement sur $\tilde{D} := D \times (g(B \cap D) + Z_+)$ et $\tilde{B} := B \times Z$ par :

$$\tilde{f}(x,z) := f(x) \vee h(z) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(x,z) := g(x) - z$$

on voit que le problème $(\mathcal{R}')$ peut se ramener à un problème du type $(\mathcal{P}_2)$ soit :

$$(\mathcal{P}_2'') \qquad \text{minimiser} \quad \tilde{f}(x,z) \quad \text{pour} \quad (x,z) \in \tilde{B} \cap \tilde{D} \quad \text{et} \quad \tilde{g}(x,z) \in -Z_+ \,.$$

Puisque f et h sont directionnellement semi-continue supérieurement respectivement sur $B \cap D$ et sur $g(B \cap D) + Z_+$, il est facile de voir que $\tilde{f}$ est directionnellement semi-continue supérieurement sur

$$(B \cap D) \times (g(B \cap D) + Z_+) = \tilde{B} \cap \tilde{D}.$$

Concernant la fonction $\tilde{g}$ nous avons :

Lemme 2.3.2. *L'épigraphe de $\tilde{g}$ est sous-SC.*

Preuve. Considérons la multiapplication $T : X \times Z \rightrightarrows X \times Z \times Z$ définie par :

$$T(x,z) = \{(x',y',z') \in X \times Z \times Z : x' = x \quad \text{et} \quad y' + z' = z\} \,.$$

Le graphe de T est un sous-espace vectoriel fermé, donc une partie sous-SC de $X \times Z \times X \times Z \times Z$. Par ailleurs, l'épigraphe de $\tilde{g}$ n'est autre que l'image par T de l'épigraphe de g. Puisque epi g est sous-SC, la proposition 2.1.1 permet de conclure. □

On peut alors déduire du corollaire 2.3.1 le résultat suivant :

Corollaire 2.3.4. *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ *et* $(\mathbf{H}_3)$, *on a*

$$(2.10) \qquad \begin{cases} \inf\limits_{x \in B \cap D} f(x) \vee h(g(x)) \\ = \max\limits_{z^* \in Z_+^* \setminus \{0\}} \inf\limits_{z \in Z} \left(h(z) \vee \inf\limits_{x \in B \cap D} \{ f(x) \;:\; \langle g(x), z^* \rangle \le \langle z, z^* \rangle \} \right). \end{cases}$$

Preuve. Puisque $\tilde{g}(\tilde{B}) = g(B) - Z = Z$ la condition **(C.Q.2)** est satisfaite. Le corollaire 2.3.1 appliqué au problème $(\mathcal{P}_2'')$ donne alors

$$\begin{aligned} \inf_{x \in B \cap D} f(x) \vee h(g(x)) &= \max_{z^* \in Z_+^* \setminus \{0\}} \inf_{(x,z) \in \tilde{B} \cap \tilde{D}} \{ \tilde{f}(x,z) : \langle \tilde{g}(x,z), z^* \rangle \le 0 \} \\ &= \max_{z^* \in Z_+^* \setminus \{0\}} \inf_{z \in Z} \left(h(z) \vee \inf_{x \in B \cap D} \{ f(x) : \langle g(x), z^* \rangle \le \langle z, z^* \rangle \} \right) . \qquad \square \end{aligned}$$

Observons que pour tout $z^* \in Z^*$ fixé on a :

$$\begin{aligned} &\{(x,z) \in X \times Z : \langle g(x), z^* \rangle \le \langle z, z^* \rangle\} \\ &\qquad = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \{(x,z) \in X \times Z : \langle g(x), z^* \rangle \le r \le \langle z, z^* \rangle\} \,. \end{aligned}$$

On peut alors réecrire la formule (2.10) comme suit :

Corollaire 2.3.5. *Sous les hypothèses* ($\mathbf{H}_1$), ($\mathbf{H}_2$) *et* ($\mathbf{H}_3$) *on a*

$$\inf_{x\in B\cap D} f(x)\vee h(g(x)) = \max_{z^*\in Z_+^*\setminus\{0\}} \inf_{r\in\mathbb{R}} \left(\inf_{\substack{\langle g(x),z^*\rangle\leq r\\ x\in B\cap D}} f(x) \quad\vee \inf_{\langle z,z^*\rangle\geq r} h(z)\right) .$$

3. Les problèmes quasi convexes composés dans les espaces vectoriels topologiques généraux.

3.1. Dualité pour les problèmes quasi convexes composés. On reprend dans cette section l'étude du problème $(\mathcal{R})$ dans les espaces vectoriels topologiques généraux. Plus précisément, étant donné deux espaces vectoriels topologiques X et Z, avec Z préordonné par un cône convexe Z_+, deux parties convexes non vides B et D de X, une fonction $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ quasi convexe sur D, une fonction $g : B \to Z$ convexe sur B relativement au préordre de Z (i.e. epi g convexe), et une fonction $h : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ quasi convexe semi-continue supérieurement sur Z et croissante sur $g(B) + Z_+$, on considère le problème de minimisation :

$$(\mathcal{R}) \qquad\qquad \text{minimiser} \quad f(x)\vee h(g(x)) \qquad \text{pour} \quad x\in B\cap D.$$

Il n'est donc plus supposé, comme c'était le cas au paragraphe 2.2, que f est directionnellement semi-continue supérieurement ni que l'épigraphe de g est sous-SC. Par contre, on suppose que la fonction quasi convexe h est semi-continue supérieurement sur Z et croissante sur $g(B) + Z_+$, ce qui renforce un peu l'hypothèse ($\mathbf{H}_3$) du paragraphe 2.2. On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.1.1. *Soit f, g et h comme ci-dessus. Alors*

$$(3.1) \qquad \begin{cases} \inf\limits_{x\in B\cap D} f(x)\vee h(g(x)) \\ = \max\limits_{z^*\in Z_+^*} \max\limits_{r\in\mathbb{R}} \left(\inf\limits_{\substack{\langle g(x),z^*\rangle< r\\ x\in B\cap D}} f(x) \ \wedge \inf\limits_{\langle z,z^*\rangle\geq r} h(z)\right) . \end{cases}$$

Preuve. On désigne toujours par α et β les valeurs respectives des deux membres de l'égalité ci-dessus, et, pour $z^*\in Z^*$ fixé, par $\gamma(r)$ et $\delta(r)$ les expressions suivantes :

$$\gamma(r) := \inf_{\langle z,z^*\rangle\geq r} h(z) \quad \text{et} \quad \delta(r) := \inf_{\substack{\langle g(x),z^*\rangle< r\\ x\in B\cap D}} f(x) .$$

On a alors

$$\gamma(r)\wedge\delta(r)\leq\alpha \quad \text{pour tout} \quad r\in\mathbb{R} .$$

En effet, pour $x\in B\cap D$, on a les implications :

$$\langle g(x),z^*\rangle\geq r \implies \gamma(r)\wedge\delta(r)\leq\gamma(r)\leq h(g(x))\leq f(x)\vee h(g(x))$$

et

$$\langle g(x),z^*\rangle< r \implies \gamma(r)\wedge\delta(r)\leq\delta(r)\leq f(x)\leq f(x)\vee h(g(x)) .$$

Ceci étant vrai pour tout $z^* \in Z^*$, $r \in \mathbb{R}$ et $x \in B \cap D$, il en résulte que

$$\beta \leq \alpha \ .$$

Montrons maintenant que $\alpha \leq \beta$. Considérons pour cela les ensembles

$$E := \{h < \alpha\} \quad \text{et} \quad F := g(\{f < \alpha\} \cap B) + Z_+ \ .$$

Si $E = \emptyset$ alors $h \geq \alpha$. En prenant $z^* = 0$ et $r = 0$ dans la définition de β on obtient (avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$) $\beta \geq \alpha$.

Si $F = \emptyset$ alors $\{f < \alpha\} \cap B = \emptyset$ soit $\inf_{B \cap D} f \geq \alpha$, de sorte qu'en prenant $z^* = 0$ et $r = 1$ dans la définition de β on obtient $\beta \geq \alpha$.

Supposons maintenant que E et F sont non vides. Puisque h est quasi convexe et semi-continue supérieurement, E est un convexe ouvert ; puisque g est convexe F est convexe. Par ailleurs, par définition de α et vu que h est croissante sur $g(B) + Z_+$, E et F sont disjoints. On peut donc les séparer. Il existe alors une forme linéaire continue non nulle z^* de Z et un réel r tels que :

$$E := \{h < \alpha\} \subset \{\langle \cdot, z^* \rangle < r\} \tag{3.2}$$

et

$$F := g(\{f < \alpha\} \cap B) + Z_+ \subset \{\langle \cdot, z^* \rangle \geq r\} \ . \tag{3.3}$$

L'inclusion (3.2) équivaut à :

$$\{\langle \cdot, z^* \rangle \geq r\} \subset \{h \geq \alpha\}$$

ou encore à

$$\gamma(r) := \inf_{\langle z, z^* \rangle \geq r} h(z) \geq \alpha \ .$$

L'inclusion (3.3) entraîne les deux inclusions :

$$Z_+ \subset \{\langle \cdot, z^* \rangle \geq r\} \tag{3.4}$$

et

$$g(\{f < \alpha\} \cap B) \subset \{\langle \cdot, z^* \rangle \geq r\} \ . \tag{3.5}$$

De (3.4) il résulte que $z^* \in Z_+ \setminus \{0\}$ et (3.5) équivaut à

$$\delta(r) := \inf_{\substack{\langle g(x), z^* \rangle < r \\ x \in B \cap D}} f(x) \geq \alpha \ .$$

On a donc

$$\beta \geq \gamma(r) \wedge \delta(r) \geq \alpha \ .$$

Ainsi, l'inégalité $\beta \geq \alpha$ est vérifiée dans tous les cas, ce qui termine la preuve. $\square$

3.2. Applications. Observons tout d'abord qu'en prenant $B = X = Z$, $Z_+ = \{0\}$ (d'où $Z_+^* = Z^* = X^*$) et pour g la fonction identité sur $D = X$ dans le théorème 3.1, on retrouve la formule obtenue dans [22, théorème 3.1]. Plus précisément :

Corollaire 3.2.1. *Soit f et h deux fonctions quasi convexes de l'espace vectoriel topologique X dans $\overline{\mathbb{R}}$, avec h semi-continue supérieurement. On a alors*

$$\inf_{x\in X}\Big(f(x)\vee h(x)\Big) = \max_{x^*\in X^*}\ \max_{r\in\mathbb{R}}\ \Big(\inf_{\langle x,x^*\rangle<r} f(x)\ \wedge \inf_{\langle x,x^*\rangle\geq r} h(x)\Big).$$

Le corollaire 3.2.1 contient le théorème de séparation de deux sous-ensembles convexes non vides disjoints E et F de X lorsque F est ouvert. Il suffit en effet de prendre $f(x) = -\infty$ si $x \in E$, $f(x) = +\infty$ si $x \in X \setminus E$, $h(x) = -\infty$ si $x \in F$, $h(x) = +\infty$ si $x \in X \setminus F$. On a alors l'existence de $x^* \in X^*$ et de $r \in \mathbb{R}$ tels que

$$\inf_{\langle x,x^*\rangle<r} f(x) \wedge \inf_{\langle x,x^*\rangle\geq r} h(x) = +\infty$$

ce qui veut dire que

$$E \subset \{\langle .,x^*\rangle \geq r\} \qquad \text{et} \qquad F \subset \{\langle .,x^*\rangle < r\}.$$

Il suffit alors de noter que x^* ne peut être nulle.

Considérons maintenant le cas où f est identiquement égale à $-\infty$ sur $D = X$. On est alors en présence d'un problème de minimisation d'une fonction quasi convexe composée. Pour énoncer la formule correspondante, introduisons le cône $Z_-^* := -Z_+^*$ des formes linéaires négatives continues sur Z ainsi que la fonction d'appui

$$\delta^*_{g(B)}(z^*) := \sup_{x\in B}\langle g(x), z^*\rangle$$

de $g(B)$. On a alors :

Corollaire 3.2.2. *Soit X et Z deux espaces vectoriels topologiques, avec Z préordonné par un cône convexe Z_+, B une partie convexe non vide de X, $g : B \to Z$ une fonction convexe sur B relativement au préordre de Z, et $h : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction quasi convexe semi-continue supérieurement sur Z et croissante sur $g(B) + Z_+$. Dans ces conditions, on a la formule :*

$$\inf_{x\in B} h(g(x)) = \max_{z^*\in Z_-^*}\ \inf_{z\in Z}\{h(z) :\ \ \langle z, z^*\rangle \leq \delta^*_{g(B)}(z^*)\}. \tag{3.6}$$

Preuve. Puisque f vaut $-\infty$ sur $D = X$ on peut éliminer, dans le second membre de la formule (3.1), les z^*, r tels que l'ensemble $\{x \in B : \langle g(x), z^*\rangle < r\}$ est non vide. Il reste donc les formes linéaires $z^* \in Z_+^*$ et les réels r tels que :

$$g(B) \subset \{\langle g(x), z^*\rangle \geq r\}$$

soit encore

$$\delta^*_{g(B)}(-z^*) \leq -r.$$

Compte tenu du fait que pour tout $z^* \in Z^*$ la fonction $r \mapsto \inf\limits_{\langle z,z^*\rangle \geq r} h(z)$ est croissante on obtient alors de (3.1) que

$$\inf_{x\in B} h(g(x)) = \max_{z\in Z_+^*} \inf_{z\in Z}\{h(z) : \langle z,z^*\rangle \geq -\delta^*_{g(B)}(-z^*)\}$$

ou encore

$$\inf_{x\in B} h(g(x)) = \max_{z\in Z_-^*} \inf_{z\in Z}\{h(z) : \langle z,z^*\rangle \leq \delta^*_{g(B)}(z^*)\}. \qquad \square$$

Remarques 3.2.1. Dans le second membre de la formule (3.6) on peut se limiter aux $z^* \in Z_-^*$ qui sont dans le cône barrière

$$b(g(B)) := \{z^* \in Z^* : \sup_{x\in B}\langle g(x), z^*\rangle < +\infty\}$$

de $g(B)$. En effet si $\delta^*_{g(B)}(z^*) = +\infty$ alors pour tout autre $y^* \in Z^*$

$$\inf_{z\in Z}\{h(z) \;:\; \langle z,z^*\rangle \leq \delta^*_{g(B)}(z^*)\} = \inf_{z\in Z}\{h(z) \;:\; \langle z,y^*\rangle \leq \delta^*_{g(B)}(y^*)\}.$$

Dans le cas où g est une application linéaire continue A de $X = B$ dans Z, $A^t : Z \to X$ la transposée de A, et $Z_+ = \{0\}$, le cône barrière de $g(B) = A(X)$ n'est autre que le noyau de A^t et on obtient :

Corollaire 3.2.3. *Soit Z un espace vectoriel topologique, $h : Z \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction quasi convexe semi-continue supérieurement, et $A : X \to Z$ une application linéaire continue. Alors*

$$\inf_{x\in X}(h \circ A)(x) = \max_{z^*\in Ker A^t} \inf_{\langle z,z^*\rangle \leq 0} h(z).$$

On suppose maintenant que le cône convexe Z_+ est d'intérieur non vide et on considère le cas particulier où la fonction h du théorème 3.1.1 est égale à la fonction vallée de l'ouvert convexe $-\text{int } Z_+$, à savoir,

$$h(z) = \vartheta_{-\text{int } Z_+}(z) := \begin{cases} -\infty & \text{si } z \in -\text{int } Z_+ \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction $\vartheta_{-\text{int } Z_+}$ est alors quasi convexe semi-continue supérieurement, et, puisque

$$Z_+ + \text{int } Z_+ \subset \text{int } Z_+,$$

$\vartheta_{-\text{int } Z_+}$ est croissante sur Z. On tire alors du théorème 3.1.1 le résultat suivant

Corollaire 3.2.4. *Soit X et Z deux espaces vectoriels topologiques, avec Z préordonné par un cône convexe Z_+ d'intérieur non vide, B et D deux parties convexes non vides de X, $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction quasi convexe sur D et $g : B \to Z$ une fonction convexe sur B relativement au préordre de Z.*

Dans ces conditions on a la formule suivante :

$$\inf_{\substack{x\in B\cap D \\ g(x)\in -\text{int } Z_+}} f(x) = \max_{z^*\in Z_+^*\setminus\{0\}} \inf_{x\in B\cap D}\{f(x) : \langle g(x), z^*\rangle < 0\}.$$

Preuve. Puisque $h := \vartheta_{-\text{int } Z_+}$ vaut $-\infty$ sur $-\text{int } Z_+$ on peut se limiter, dans le second membre de la formule (3.1), aux formes linéaires continues z^* et aux réels r pour lesquels

$$-\text{int } Z_+ \subset \{\langle ., z^* \rangle < r\}. \tag{3.7}$$

Observons que pour $z^* \neq 0$, (3.7) équivaut à

$$-Z_+ \subset \{\langle ., z^* \rangle \leq r\}$$

ou encore à

$$z^* \in Z_+^* \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad r \geq 0.$$

D'autre part, lorsque $z^* = 0$, (3.7) équivaut à $r > 0$. La formule (3.1) devient alors

$$\inf_{\substack{x \in B \cap D \\ g(x) \in -\text{int } Z_+}} f(x) = \left(\max_{z^* \in Z_+^* \setminus \{0\}} \max_{r \geq 0} \inf_{\substack{\langle g(x), z^* \rangle < r \\ x \in B \cap D}} f(x) \right) \vee \inf_{B \cap D} f\ . \tag{3.8}$$

La décroissance de la fonction

$$r \mapsto \inf_{\substack{\langle g(x), z^* \rangle < r \\ x \in B \cap D}} f(x)$$

et le fait que le second membre de (3.8) est plus petit que le premier nous permettent alors de conclure. $\square$

Pour finir, nous allons établir une version du théorème 2.2.1 dans les espaces vectoriels topologiques.

Théorème 3.2.1. *Soit X, Z deux espaces vectoriels topologiques, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction quasi convexe semi-continue supérieurement et $\Gamma : Z \rightrightarrows X$ une multiapplication convexe semi-continue inférieurement. On a alors, pour tout $z \in Z$*

$$\inf_{x \in \Gamma(z)} f(x) = \max_{z^* \in Z^* \setminus \{0\}} \inf_{(x,y) \in X \times Z} \{f(x) : \langle y, z^* \rangle \leq \langle z, z^* \rangle \ \ et \ \ x \in \Gamma(z)\}\ .$$

Preuve. Soit α et β les valeurs respectives des deux membres de la formule ci-dessus. Notons que $\alpha \geq \beta$. Par définition de α, z n'appartient pas à $\Gamma^{-1}(\{f < \alpha\})$. Si $\Gamma^{-1}(\{f < \alpha\}) = \emptyset$, le max du second membre est atteint pour tout $z^* \in Z^*$ et vaut α. Puisque Γ est semi-continue inférieurement et vu que f est quasi convexe semi-continue supérieurement, $\Gamma^{-1}(\{f < \alpha\})$ est un ouvert convexe que l'on peut supposer non vide. On peut alors le séparer de $\{z\}$. Il existe donc $z^* \in Z^* \setminus \{0\}$ tel que

$$\Gamma^{-1}(\{f < \alpha\}) \subset \{\langle \cdot, z^* \rangle > \langle z, z^* \rangle\}$$

ce qui s'écrit

$$\inf_{(x,y) \in X \times Z} \{f(x) : \langle y, z^* \rangle \leq \langle z, z^* \rangle \ \text{ et } \ x \in \Gamma(y)\} \geq \alpha. \qquad \square$$

En prenant pour f la fonction vallée d'un convexe ouvert on obtient

Corollaire 3.2.5. *Soit $\Gamma : Z \rightrightarrows X$ une relation convexe semi-continue inférieurement, D un ouvert convexe de X et $z \in Z$ tel que $\Gamma(z) \cap D = \emptyset$. Il existe alors une forme linéaire continue non nulle z^* de Z telle que*

$$\Gamma(y) \cap D = \emptyset$$

pour tout y dans Z tel que $\langle y, z^* \rangle \leq \langle z, z^* \rangle$.

English extended abstract. Let X, Z be two Fréchet spaces, $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ a quasi-convex function over a convex subset D of X, and $\Gamma : Z \rightrightarrows X$ a convex multifunction. We obtain the existence of a nonzero continuous linear form z^* on Z such that

$$\inf\{f(x) \;:\; x \in D \cap \Gamma(0)\} = \inf_{\substack{x \in D \\ z \in Z}} \{f(x) \;:\; \langle z, z^* \rangle \leq 0 \text{ et } x \in \Gamma(z)\}.$$

The assumptions are the following:

a) f is directionally upper semicontinuous, the graph of Γ is lower CS-closed (i.e. the projection on $Z \times X$ of a CS-closed subset of $Z \times X \times F$ with F Fréchet),
b) the cone generated by the domain of Γ is a closed linear space.

The same formula is obtained in general topological spaces by assuming that f is upper semicontinuous and Γ is lower semicontinuous.

In the case when inequality constraints occur we recapture the results of Luenberger [10], Crouzeix [4], and those of Penot-Volle [13].

Finally, given a convex cone $Z_+ \subset Z$, a convex application $g : B \to Z$ over a convex subset B of X, and a quasi-convex function $h : Z \to \overline{\mathbb{R}}$, nondecreasing with respect to the preorder associated with Z_+, we obtain, under appropriate assumptions, the existence of a continuous linear positive form z^* on Z such that

$$\inf_{x \in B \cap D} \{f(x) \vee h(g(x))\} = \max_{r \in \mathbb{R}} \left(\inf_{\substack{x \in B \cap D \\ \langle g(x), z^* \rangle < r}} f(x) \;\wedge\; \inf_{\langle z, z^* \rangle \geq r} h(z) \right).$$

In the case when g is the identity mapping on Z, we recapture a formula given in [22]. When f is identically $-\infty$, a duality framework for quasi-convex composite minimization problems is derived from the previous considerations.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Amara et M. Ciligot-Travain, *Lower CS-closed sets and functions*, Prépublication, Université d'Avignon, 1997.
2. M. Avriel, W. E. Diewert, S. Shaible et I. Zang, *Generalized concavity*, Plenum Press, New York, 1988.
3. C. Combari, M. Laghdir et L. Thibault, *Sous-différentiels de fonctions convexes composées*, Ann. Sci. Math. Quebec **18** (1994), 119–148.
4. J.-P. Crouzeix, *Contributions à l'étude des fonctions quasi convexes*, Thèse d'état, Université de Clermont-Ferrand II, 1977.
5. J.-P. Crouzeix, *A duality framework in quasi-convex programming*, Generalized concavity in optimization and economics (S. Schaible and W.T. Ziemba, eds.), Academic Press, New York, 1981, pp. 207–225.

6. H. J. Greenberg and W. P. Pierskalla, *Surrogate mathematical programming*, Operations Res. **18** (1970), 924–939.
7. H. J. Greenberg and W. P. Pierskalla, *Quasi-conjugate functions and surrogate duality*, Cahiers Centre Études Recherche Opér. **15** (1973), 437–448.
8. R. B. Holmes, *Geometric functional analysis and its applications*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.
9. G. J. O. Jameson, *Convex series*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **72** (1972), 37–47.
10. D. G. Luenberger, *Quasi-convex programming*, SIAM J. Appl. Math. **16** (1968), 1090–1095.
11. J. E. Martinez-Legaz, *Quasi-convex duality theory by generalized conjugation methods*, Optimization **19** (1988), 603–652.
12. J. E. Martinez-Legaz, *Conjugación associada a un grafo*, Proceedings of the Ninth Spanish-Portuguese Conference on Mathematics, 2 (Salamanca, 1982), Acta Salmanticensia. Ciencas, 46, Univ. Salamanca, Salamanca, 1982, pp. 837–839.
13. J.-P. Penot and M. Volle, *Surrogate programming and multipliers in quasi-convex programming*, Prépublication, Université d'Avignon, 1997.
14. J.-P. Penot et M. Volle, *On quasi-convex duality*, Math. Oper. Res. **15** (1990), 597–625.
15. S. M. Robinson, *Regularity and stability for convex multivalued functions*, Math. Oper. Res. **1** (1976), 130–143.
16. A. M. Rubinov et B. M. Glover, *On generalized quasi-convex conjugation*, Recent developments in optimization theory and nonlinear analysis (Jerusalem, 1995), Contemp. Math., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 199–216.
17. I. Singer, *Surrogate conjugate functionals and surrogate convexity*, Applicable Anal. **16** (1983), 291–327.
18. M. Théra, *Convex lower-semicontinuous vector-valued mappings and applications to convex analysis*, Third Symposium on Operations Research (Univ. Mannheim, Mannheim, 1978), Section I, Operations Res. Verfahen, 31, Hain, Königstein/Ts., 1979, pp. 631–636.
19. C. Ursescu, *Multifunctions with convex closed graph*, Czechoslovak Math. J. **25(100)** (1975), 438–441.
20. M. Valadier, *Sous-différentiabilité des fonctions convexes à valeurs dans un espace vectoriel ordonné*, Math. Scand. **30** (1972), 65–74.
21. M. Volle, *Conjugaison par tranches*, Ann. Mat. Pura Appl. **(4)139** (1985), 279–312.
22. M. Volle, *Quasi-convex duality for the max of two function*, Lecture Notes in Econom. and Math. Systems, vol. 452, Springer, Berlin, 1997, pp. 365–379.

C. Amara et M. Volle
Département de mathématiques
33, rue Louis Pasteur
84000 Avignon
France.