Ann. Sci. Math. Québec **21** (1997), no. 2, 191–201.

MARTINGALES RENVERSÉES ET LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES MULTIVOQUE POUR LA TOPOLOGIE DE WIJSMAN

HASSAN ZIAT

RÉSUMÉ. On établit un résultat du type Lévy pour des martingales régulières renversées multivoques à valeurs convexes fermées. La notion de convergence prise est celle de Wijsman. Ensuite, nous montrons qu'étant donné une suite (X_n) d'ensembles aléatoires indépendants identiquement distribués où X_1 est intégrable à valeurs localement faiblement compactes ne contenant pas de droites, il existe une suite décroissante de sous-tribus $(\mathcal{G}_n)$ telle que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E(X_1 \mid \mathcal{G}_n)$.

ABSTRACT. We prove a Lévy-convergence-type result for multivalued reversed regular martingale with convex closed values in the Wijsman topology. Next, we show that given a sequence (X_n) of independent random sets having the same distribution, where X_1 is integrable with convex weakly locally compact values which contain no line, there is a decreasing sequence of sub-σ-fields $(\mathcal{G}_n)$ such that $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = E(X_1 \mid \mathcal{G}_n)$.

1. Introduction. Dans la littérature, la loi forte des grands nombres dans le cas réel, connue sous le nom du théorème de Kolmogorov, a été montrée de différentes façons (*cf.* Valadier [22]). Dans Stout [21] par exemple, elle est conséquence du théorème de Komlos. Elle peut aussi être montrée à partir du théorème ergodique de Birkhoff, ou encore à partir des théorèmes de convergence des martingales renversées (*cf.* Doob [9]). Pendant ces dernières années, on s'est beaucoup intéressé au cas multivoque. Dans ce cadre, et dans le cas de dimension finie, citons entre autres les travaux d'Artstein et Vitale [2] dans le cas borné et ceux d'Artstein et Hart [1] dans le cas non borné. Le cas de dimension infinie a été traité en particulier par Hess [11, 13] et Hiai [14, 15], où les ensembles aléatoires ne sont pas nécessairement bornés.

Ce travail traite du lien entre la loi forte des grands nombres et la convergence des martingales renversées, ceci pour des multifonctions intégrables à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{F}_c(E)$ des parties convexes fermées d'un espace de Banach séparable E. Il s'agit donc d'abord d'obtenir un résultat de convergence pour des martingales régulières renversées de la forme $(E(X \mid \mathcal{B}_n))_{n\geq 1}$ où X est une multifonction du type précédent et $(\mathcal{B}_n)$ une suite décroissante de sous-tribus d'un espace probabilisé donné $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour cela $\mathcal{F}_c(E)$ est muni de la topologie (convergence) de Wijsman. Cet objectif est réalisé au paragraphe 3. Ensuite, comme dans le cas de variables aléatoires univoques

Reçu le 10 juin 1996 et, sous forme définitive, le 4 juin 1997.

(réelles ou vectorielles), nous montrons qu'étant donnée une suite (X_n) d'ensembles aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathcal{F}_c(E)$, où X_1 est intégrable à valeurs localement faiblement compactes ne contenant pas de droites, les sommes de Cesaro $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ peuvent s'écrire sous la forme $E(X_1 \mid \mathcal{G}_n)$ où $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$. On remarquera que ces résultats permettent de retrouver une version multivoque de la loi forte des grands nombres pour la convergence de Wijsman, déjà établie par Hess [13] avec une autre méthode.

2. Notations et résultats préliminaires. On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et un espace de Banach séparable E, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$. E' désigne le dual de E. $\mathcal{F}(E)$ (resp. $\mathcal{F}_c(E)$) est l'ensemble des fermés (resp. des convexes fermés) non vides de E. On notera aussi $\mathcal{L}_c(E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}_c(E)$ dont les éléments sont localement faiblement compacts ne contenant pas de droites. Pour tout $A \subset E$, $\overline{A}$ (resp. $\overline{\mathrm{co}}A$) désigne l'adhérence de A (resp. l'enveloppe convexe fermée de A). La fonction distance $\mathrm{d}(\cdot, A)$, la fonction d'appui $\delta^*(\cdot, A)$ sont respectivement définies par :

$$\mathrm{d}(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}, \quad x \in E;$$
$$\delta^*(x', A) = \sup\{\langle x', x\rangle : x \in A\}, \quad x' \in E'.$$

Pour une suite finie $F_1, \ldots, F_n$ de $\mathcal{F}_c(E)$, on pose

$$F_1 \dot{+} F_2 = \overline{F_1 + F_2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 \dot{+} \cdots \dot{+} F_n$$

Une multifonction X à valeurs dans $\mathcal{F}(E)$ est mesurable si pour tout ouvert U de E, le sous ensemble de Ω, $X^{-}U = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \cap U \neq \emptyset\}$ est dans $\mathcal{A}$. On note par $\mathcal{E}$, la tribu d'Effros, engendrée sur $\mathcal{F}(E)$ par les parties de la forme $\{F \in \mathcal{F}(E) : F \cap U \neq \emptyset\}$, où U parcourt l'ensemble des ouverts de E. $\mathcal{A}_X$ désigne la tribu engendrée par X sur Ω. Dans la suite, une multifonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathcal{F}(E), \mathcal{E})$ sera souvent appelée ensemble aléatoire.

Soit X une multifonction de Ω à valeurs dans $\mathcal{F}(E)$. Une fonction f de Ω dans E est appelée sélection de X si pour tout $\omega \in \Omega$, $f(\omega) \in X(\omega)$. Une représentation de Castaing de X est une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sélections mesurables de X telle que

$$X(\omega) = \overline{\{f_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}} \quad \text{pour } \omega \in \Omega.$$

Une multifonction X à valeurs dans $\mathcal{F}(E)$ est mesurable si et seulement si X possède une représentation de Castaing ou si et seulement si $\mathrm{d}(x, X(\cdot))$ est mesurable pour tout x dans E, (*cf.* [7, Theorem III.9]).

$L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne l'espace de Banach (des classes d'équivalence) des fonctions Bochner intégrables f de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(E, \mathcal{B}(E))$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_\Omega \|f(\omega)\|\, dP$. Une fonction mesurable f de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ est dite quasi-intégrable si f^- (partie négative de f) appartient à $L^1_{\mathbb{R}}$.

Pour une multifonction X, $S^1_X(\mathcal{A})$ désigne l'ensemble $\{f \in L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, P) : f(\omega) \in X(\omega) \text{ p.p.}\}$, $\mathcal{A}$ peut éventuellement être remplacée par une sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$. Notons que $S^1_X(\mathcal{A})$ est fermé dans L^1_E si X est à valeurs fermées et il est non vide si et seulement si $\mathrm{d}(0, X(\cdot)) \in L^1_{\mathbb{R}^+}$; on dit dans ce cas que X est intégrable. L'intégrale multivoque de X est l'ensemble

$$\left\{\int_\Omega f\,dP : f \in S^1_X(\mathcal{A})\right\} =: \int_\Omega X\,dP.$$

Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et X une multifonction intégrable à valeurs dans $\mathcal{F}(E)$. L'espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{B}$ est l'unique (à une égalité p.p.) multifonction $\mathcal{B}$ mesurable de Ω dans $\mathcal{F}(E)$, notée $E(X \mid \mathcal{B})$ telle que

$$S^1_{E(X|\mathcal{B})}(\mathcal{B}) = \overline{\{E(f \mid \mathcal{B}) : f \in S^1_X(\mathcal{A})\}}^{\|\cdot\|_1} \quad \text{(\textit{cf.} [16, Theorem 5.1]).}$$

Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathcal{F}(E), \mathcal{E})$ un ensemble aléatoire, la loi de probabilité de X est la mesure image de P par X définie par $\mu_X(A) = P(X^{-1}(A))$, pour tout $A \in \mathcal{E}$. Deux ensembles aléatoires X et Y sont dits indépendants si pour tous A, $B \in \mathcal{E}$:

$$P\big(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)\big) = P\big(X^{-1}(A)\big)P\big(Y^{-1}(B)\big).$$

Autrement dit les deux sous-tribus $\mathcal{A}_X$ et $\mathcal{A}_Y$ de $\mathcal{A}$ sont indépendantes dans le sens où pour tout $A \in \mathcal{A}_X$ et pour tout $B \in \mathcal{A}_Y$, on a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons quelques résultats standards.

Proposition 2.1 [7, Proposition III.35, p. 83]**.** *Soit Σ_1 une multifonction de Ω à valeurs dans $\mathcal{L}_c(E)$, et Σ_2 de Ω dans $\mathcal{F}_c(E)$ telles que pour tout $x' \in E'$ on ait $\delta^*(x', \Sigma_2(\omega)) \leq \delta^*(x', \Sigma_1(\omega))$ p.p. Alors $\Sigma_2(\omega)) \subset \Sigma_1(\omega))$ p.p.*

Proposition 2.2 [14, 16]**.** *Soient X et Y deux ensembles aléatoires à valeurs dans $\mathcal{F}(E)$, et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$, alors on a :*

i) $E(X \dotplus Y \mid \mathcal{B}) = E(X \mid \mathcal{B}) \dotplus E(Y \mid \mathcal{B})$ *p.p.;*

ii) *si r est une fonction réelle $\mathcal{B}$ mesurable telle que rX soit intégrable, alors*

$$E(rX \mid \mathcal{B}) = rE(X \mid \mathcal{B}) \ \textit{ p.p.;}$$

iii) $\delta^*(x', E(X \mid \mathcal{B})) = E(\delta^*(x', X) \mid \mathcal{B}))$ *p.p. pour tout $x' \in E'$;*

iv) $E(\overline{\mathrm{co}}X \mid \mathcal{B}) = \overline{\mathrm{co}}E(X \mid \mathcal{B})$ *p.p.*

Lemme 2.3 [11, proposition 7, p. 7.23]**.** *Soient X et Y deux ensembles aléatoires à valeurs dans $\mathcal{F}(E)$, de même loi. Si X est intégrable, Y l'est aussi.*

Une extension facile de [18, corollaire V.3.12, p. 118] au cas vectoriel est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 2.4. *Soit $f \in L^1_E(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{B}_n)_n$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$ où $\mathcal{B}_\infty = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{B}_n$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} E(f \mid \mathcal{B}_n) = E(f \mid \mathcal{B}_\infty) \ \textit{ p.p.}$$

Preuve. Soit $f \in L^1_E(\mathcal{A})$. Il existe une suite de fonctions $\mathcal{A}$ étagées, notée (f_m) telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\|f_m(\omega)\| \leq 2\|f(\omega)\|$ et $\lim_{m\to\infty} f_m = f$ p.p.

Par l'inégalité triangulaire et celle de Jensen, on a

$$\begin{aligned}\|E(f \mid \mathcal{B}_n)(\omega) - E(f \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)\| \le E(\|f - f_m\| \mid \mathcal{B}_n)(\omega) \\ + \|E(f_m \mid \mathcal{B}_n)(\omega) - E(f_m \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)\| \\ + E(\|f - f_m\| \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega) \quad \text{p.p.}\end{aligned}$$

En fixant m, on applique [18, corollaire V.3.12, p. 118], alors on a

$$\limsup_n \|E(f \mid \mathcal{B}_n)(\omega) - E(f \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)\| \le 2E(\|f - f_m\| \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega) \quad \text{p.p.}$$

En faisant tendre m vers ∞, le second membre de l'inégalité tend vers 0 d'après le théorème de convergence dominée pour les espérances conditionnelles. $\square$

Lemme 2.5 [24, corollaire 3.4, p. 21]**.** *Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et X un ensemble aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathcal{F}(E)$. Alors $E(X \mid \mathcal{B})$ admet une représentation de Castaing de la forme $(E(f_m \mid \mathcal{B}))_{m\ge 1}$ où $f_m \in S_X^1$ pour tout $m \ge 1$.*

3. Convergence des martingales régulières renversées. Pour une suite décroissante $(\mathcal{B}_n)_{n\ge1}$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$, la sous-tribu $\bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{B}_n$ sera notée $\mathcal{B}_\infty$. On se propose dans ce paragraphe, d'étudier la convergence de la suite $(E(X \mid \mathcal{B}_n))_{n\ge1}$ au sens de la topologie de Wijsman, autrement dit au sens de la topologie de la convergence simple des fonctions distances sur E, X étant un ensemble aléatoire à valeurs convexes fermées.

Lemme 3.1. *Soit X un ensemble aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathcal{F}_c(E)$ et $(\mathcal{B}_n)_{n\ge1}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Alors il existe un négligeable N de Ω tel que pour tout $x \in E$ et tout $\omega \in \Omega \setminus N$, on ait*

$$\limsup_n \mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_n)(\omega)) \le \mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)).$$

Preuve. D'après le lemme 2.5, il existe une suite (f_m) de S_X^1 telle que :

$$E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega) = \overline{\{E(f_m \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega) : m \ge 1\}}.$$

D'après le lemme 2.4, pour tout $m \ge 1$, il existe un negligeable $N(f_m)$ de Ω tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus N(f_m), \quad \lim_{n\to\infty} E(f_m \mid \mathcal{B}_n)(\omega) = E(f_m \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega).$$

Posons $N = \bigcup_{m\ge1} N(f_m)$. Soit $x \in E$ et $\omega \in \Omega \setminus N$. Il résulte de ce qui précède que pour tout entier $p \ge 1$, il existe un entier dépendant de p : $\varphi(p) \ge 1$ tel que

$$\|x - E(f_{\varphi(p)} \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)\| \le \mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)) + \frac{1}{p}.$$

Or

$$\begin{aligned}\limsup_n \mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_n)(\omega)) &\le \lim_{n\to\infty} \|x - E(f_{\varphi(p)} \mid \mathcal{B}_n)(\omega)\| \\ &= \|x - E(f_{\varphi(p)} \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)\|.\end{aligned}$$

Comme p est arbitrairement choisi, on obtient le résultat souhaité. $\square$

Lemme 3.2. *Soit X un ensemble aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathcal{F}_c(E)$ et $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$. On suppose qu'il existe une suite dénombrable (x'_k) dense dans la boule unité $B_{E'}$ de E' telle que, pour tout $x \in E$,*

$$\mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\cdot)) = \sup_{k\geq 1}\left[\langle x'_k, x\rangle - \delta^*(x'_k, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\cdot))\right] \text{ p.p.}$$

Alors il existe un négligeable N de Ω tel que pour tout $x \in E$ et tout $\omega \in \Omega \setminus N$,

$$\liminf_n \mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_n)(\omega)) \geq \mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)).$$

Preuve. Soit N_1 un negligeable de Ω tel que pour tout $\omega \in \Omega \setminus N_1$ et pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)) = \sup_{k\geq 1}\left[\langle x'_k, x\rangle - \delta^*(x'_k, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega))\right].$$

En vertu de [18, corollaire V.3.12], pour tout $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \delta^*(x'_k, E(X \mid \mathcal{B}_n)(\omega)) &= \lim_{n\to\infty} E(\delta^*(x'_k, X) \mid \mathcal{B}_n)(\omega)\\ &= E(\delta^*(x'_k, X) \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)\\ &= \delta^*(x'_k, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)) \quad \text{p.p.}\end{aligned}$$

Soit N_2 un negligeable de Ω tel que pour tout $\omega \in \Omega \setminus N_2$ et pour tout $k \geq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \delta^*(x'_k, E(X \mid \mathcal{B}_n)(\omega)) = \delta^*(x'_k, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)).$$

Comme $E(X \mid \mathcal{B}_n)$ est à valeurs convexes fermées, pour tout $\omega \in \Omega \setminus (N_1 \cup N_2)$ et tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\liminf_n \mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_n)(\omega)) &= \liminf_n \sup_{x'\in B_{E'}}\left[\langle x', x\rangle - \delta^*(x', E(X \mid \mathcal{B}_n)(\omega))\right]\\ &\geq \sup_{x'\in B_{E'}} \liminf_n \left[\langle x', x\rangle - \delta^*(x', E(X \mid \mathcal{B}_n)(\omega))\right]\\ &\geq \sup_{k\geq 1} \liminf_n \left[\langle x'_k, x\rangle - \delta^*(x'_k, E(X \mid \mathcal{B}_n)(\omega))\right]\\ &= \sup_{k\geq 1}\left[\langle x'_k, x\rangle - \delta^*(x'_k, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega))\right]\\ &= \mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)). \quad \square\end{aligned}$$

En combinant les lemmes 3.1 et 3.2, nous sommes en mesure d'énoncer un résultat du type Lévy pour les martingales régulières renversées.

Théorème 3.3. *Soit X un ensemble aléatoire intégrable à valeurs dans $\mathcal{F}_c(E)$ et $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$. On suppose qu'il existe une suite dénombrable (x'_k) dense dans la boule unité $B_{E'}$ de E' telle que, pour tout $x \in E$,*

$$\mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\cdot)) = \sup_{k\geq 1}\left[\langle x'_k, x\rangle - \delta^*(x'_k, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\cdot))\right] \text{ p.p.}$$

Alors il existe un négligeable N de Ω tel que pour tout $x \in E$ et tout $\omega \in \Omega \setminus N$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_n)(\omega)) = \mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)).$$

Remarque. Si par exemple $E(X \mid \mathcal{B}_\infty)$ est constant dans $\mathcal{F}_c(E)$, la condition du théorème 3.3 est satisfaite. En effet, on aurait pour tout $x \in E$,

$$\mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)) = \sup_{x' \in B_{E'}} \left[\langle x', x\rangle - \delta^*(x', E(X \mid \mathcal{B}_\infty))\right].$$

Et comme E est séparable, le supremum peut être pris sur une partie dénombrable dense dans $B_{E'}$ (*cf.* [5, proposition 3, p. IX.60]).

4. Martingales renversées et ensembles aléatoires i.i.d. Voici tout d'abord un lemme utile dans la suite.

Lemme 4.1. *Soit $(X_n)_n$ une suite d'ensembles aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathcal{F}_c(E)$. On suppose que X_1 est intégrable. Alors pour tout $x' \in E'$, tout $n \geq 1$ et tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ on a*

$$\delta^*(x', E(X_1 \mid \mathcal{A}_{S_n})) = \delta^*(x', E(X_j \mid \mathcal{A}_{S_n})) \text{ p.p.}$$

Preuve. Pour tout $x' \in E'$, les $\delta^*(x', X_i(\cdot))$ sont quasi-intégrables, car les X_i sont intégrables. D'autre part, comme les X_i sont i.i.d., pour tout $j = 1, \ldots, n$, les couples (X_1, S_n) et (X_j, S_n) ont même loi. Il s'ensuit que pour tout $x' \in E'$ et tout $j = 1, \ldots, n$, les couples $(\delta^*(x', X_1(\cdot)), S_n(\cdot))$ et $(\delta^*(x', X_j(\cdot)), S_n(\cdot))$ ont même loi, car l'application $\varphi_{x'}$ définie sur $\mathcal{F}(E) \times \mathcal{F}(E)$ et à valeurs dans $]-\infty, +\infty] \times \mathcal{F}(E)$, par $\varphi_{x'}(F_1, F_2) = (\delta^*(x', F_1), F_2)$ est $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ mesurable. Alors, d'après le théorème classique de transfert pour des fonctions quasi-intégrables, on a

$$\forall\, x' \in E',\ \forall\, j = 1, \ldots, n, \quad E(\delta^*(x', X_1) \mid \mathcal{A}_{S_n}) = E(\delta^*(x', X_j) \mid \mathcal{A}_{S_n}) \text{ p.p.}$$

La proposition 2.2 permet de conclure. □

Le lemme 4.1 peut aussi être trouvé à partir d'un résultat montré séparément par M. Valadier et C. Hess [10, théorème 3.2, p. 77].

Le résultat qui suit nous apprend que $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)_n$ forme une martingale régulière renversée multivoque.

Théorème 4.2. *Soit $(X_n)_n$ une suite d'ensembles aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathcal{F}_c(E)$. On suppose que :*

i) *X_1 est intégrable ;*
ii) *il existe $L \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $X_1(\omega) \subset L$ p.p.*

Alors il existe une suite décroissante de sous-tribus $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{A}$, telle que

$$\frac{1}{n} S_n = E(X_1 \mid \mathcal{G}_n) \quad \text{p.p.}$$

Preuve. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x' \in E'$, $\delta^*(x', S_n)$ est comme S_n, $\mathcal{A}_{S_n}$-mesurable. En vertu de la proposition 2.2 et du lemme 4.1, on a

$$\begin{aligned}\delta^*(x', S_n) &= E(\delta^*(x', S_n) \mid \mathcal{A}_{S_n}) \\ &= \delta^*(x', E(S_n \mid \mathcal{A}_{S_n})) \\ &= \delta^*(x', E(X_1 \mid \mathcal{A}_{S_n})) + \cdots + \delta^*(x', E(X_n \mid \mathcal{A}_{S_n})) \\ &= n\delta^*(x', E(X_1 \mid \mathcal{A}_{S_n})) \quad \text{p.p.}\end{aligned}$$

La fonction d'appui étant positivement homogène, il s'ensuit que

$$\delta^*(x', \frac{1}{n} S_n) = \delta^*(x', E(X_1 \mid \mathcal{A}_{S_n})) \quad \text{p.p.}$$

Soit $\mathcal{G}_n$ la sous-tribu $\sigma\big(\mathcal{A}_{S_n}, \mathcal{A}_{X_m} : m \in \{n+1, n+2, \dots\}\big)$. La suite $(\mathcal{G}_n)_n$ est évidemment décroissante. Comme les ensembles aléatoires X_1 et S_n sont indépendants de X_m pour $m \geq n+1$, les tribus $\mathcal{A}_{X_1}$ et $\mathcal{A}_{S_n}$ sont toutes deux indépendantes de la tribu $\sigma\left(\mathcal{A}_{X_m} : m \in \{n+1, n+2, \dots\}\right)$. Par suite

$$E(\delta^*(x', X_1) \mid \mathcal{G}_n) = E(\delta^*(x', X_1) \mid \mathcal{A}_{S_n}) \quad \text{p.p.}$$

D'où

$$\begin{aligned}\delta^*(x', E(X_1 \mid \mathcal{G}_n)) &= \delta^*(x', E(X_1 \mid \mathcal{A}_{S_n})) \\ &= \delta^*(x', \frac{1}{n} S_n) \quad \text{p.p.}\end{aligned}$$

Comme $X_1(\omega) \subset L$ p.p., les $E(X_1 \mid \mathcal{G}_n)$ sont à valeurs dans $\mathcal{L}_c(E)$. On conclut en utilisant la proposition 2.1. □

En appliquant une propriété due à Hess [12, lemme 3.4] agissant sur l'intérieur du domaine de la fonction d'appui, nous avons la proposition suivante qui peut avoir son intérêt propre.

Proposition 4.3. *Soit $(X_n)_n$ une suite d'ensembles aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathcal{F}_c(E)$. On suppose que :*

i) *X_1 est intégrable ;*
ii) *il existe $L \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $X_1(\omega) \subset L$ p.p. ;*
iii) $\operatorname{int}\operatorname{dom}\delta^*(\cdot, X_1(\omega)) \subset \operatorname{int}\operatorname{dom}\delta^*(\cdot, L)$ *p.p.*

Alors $E(X_1 \mid \mathcal{G}_\infty) = \overline{\int_\Omega X_1\, dP}$ p.p.

Preuve. L'hypothèse ii) entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, $E(X_1 \mid \mathcal{G}_n) \subset L$ p.p. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$,

$$\operatorname{int}\operatorname{dom}\delta^*(\cdot, L) \subset \operatorname{int}\operatorname{dom}\delta^*(\cdot, E(X_1 \mid \mathcal{G}_n)(\cdot)) \quad \text{p.p.}$$

Or

$$\operatorname{int}\operatorname{dom}\delta^*(\cdot, E(X_1 \mid \mathcal{G}_n)(\cdot)) \subset \operatorname{int}\operatorname{dom}\delta^*(\cdot, X_1(\cdot)) \quad \text{p.p.}$$

Il résulte donc de l'hypothèse iii) que,

$$\begin{aligned}\operatorname{int}\operatorname{dom}\delta^*(\cdot, L) &= \operatorname{int}\operatorname{dom}\delta^*(\cdot, X_1(\cdot)) \\ &= \operatorname{int}\operatorname{dom}\delta^*(\cdot, E(X_1 \mid \mathcal{G}_n)(\cdot)) \quad \text{p.p. pour tout } n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}\end{aligned}$$

Soit $x' \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\delta^*(\cdot, L)$. En vertu du théorème 4.2, pour tout $m \geq 1$, on a,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta^*(x', X_i(\omega)) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m-1}\delta^*(x', X_i(\omega)) + \frac{1}{n}\sum_{i=m}^{n}\delta^*(x', X_i(\omega)) \\ &= \frac{m-1}{n}\delta^*(x', E(X_1 \mid \mathcal{G}_{m-1}(\omega)) + \frac{1}{n}\sum_{i=m}^{n}\delta^*(x', X_i(\omega)) \quad \text{p.p.}\end{aligned}$$

Or $\lim_{n\to\infty}\frac{m-1}{n}\delta^*(x', E(X_1 \mid \mathcal{G}_{m-1}(\omega)) = 0$ p.p., car $x' \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\delta^*(\cdot, L)$ et $\delta^*(x', E(X_1 \mid \mathcal{G}_{m-1}(\omega))$ ne dépend pas de n. D'où

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=m}^{n}\delta^*(x', X_i(\omega)) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta^*(x', X_i(\omega)) \\ &= \lim_{n\to\infty}\delta^*(x', E(X_1 \mid \mathcal{G}_n)(\omega)) \\ &= \lim_{n\to\infty}E(\delta^*(x', X_1) \mid \mathcal{G}_n)(\omega) \\ &= E(\delta^*(x', X_1) \mid \mathcal{G}_\infty)(\omega) \quad \text{p.p.}\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $E(\delta^*(x', X_1) \mid \mathcal{G}_\infty)$ est $\sigma\left(\mathcal{A}_{X_j} : j \in \{m, m+1, \dots\}\right)$-mesurable. Donc, mesurable par rapport à la tribu $\bigcap_{m\geq 1}\sigma\left(\mathcal{A}_{X_j} : j \in \{m, m+1, \dots\}\right)$, qui est égale à $\{\emptyset, \Omega\}$ à des ensembles négligeables près, en vertu de la loi $[0, 1]$ (voir Neveu [17]). D'où

$$E(\delta^*(x', X_1) \mid \mathcal{G}_\infty) = \int_\Omega \delta^*(x', X_1(\omega))\, dP \quad \text{p.p.}$$

Alors

$$\delta^*(x', E(X_1 \mid \mathcal{G}_\infty)) = \delta^*\left(x', \int_\Omega X_1\, dP\right) \quad \text{p.p.}$$

Le lemme de Hess [12, lemme 3.4] permet de conclure. □

Remarque. 1) En combinant le théorème 3.3, le théorème 4.2 et la proposition 4.3, on peut retrouver la loi forte des grands nombres pour la topologie de Wijsman qui a déjà été montrée par Hess [13] dans un cadre plus général mais par une autre méthode. Toutefois, nos résultats généralisent ceux obtenus par Ziat [24, théorème 3.7, p. 23] ou Ezzaki [10, théorèmes 4.1 et 4.2 du chapitre III].

2) Sonntag et Zalinescu [20] et Beer [3] ont introduit la «Slice topology» (notée τ_S) sur l'ensemble des convexes fermés non vides de E. Beer [3, Theorem 3.1] (voir aussi [4]) a donné une caractérisation de τ_S comme étant la topologie initiale déterminée par la famille des fonctions distances $\{\mathrm{d}_p(x, \cdot) : x \in E, p \in \Pi\}$, où Π est la famille des normes équivalentes à $\|\cdot\|$ et $\mathrm{d}_p(x, A) = \inf\{p(x - y) : y \in A\}$. Lorsque E' est séparable, τ_S est déterminée, comme l'a remarqué Hess dans [13], par la famille $\{\mathrm{d}_p(x, \cdot) : x \in E, p \in \Pi_1\}$, où Π_1 est une partie dénombrable de Π (voir [3, Lemma 3.3.]).

3) Lorsque E' est séparable, on retrouve la loi forte des grands nombres pour la «Slice topology».

4) Nos résultats peuvent se formuler dans le cas où les ensembles aléatoires sont des épigraphes d'intégrandes puisqu'il s'agit d'ensembles aléatoires à valeurs non bornées.

Remerciements. Je tiens à remercier vivement le professeur Charles CASTAING pour toutes ses remarques et suggestions très utiles. Je remercie aussi un arbitre pour des remarques très pertinentes sur la rédaction de ce papier.

English extended abstract. Let $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ be a probability space, $(E, \|\cdot\|)$ a separable Banach space with the dual space E', $\mathcal{F}(E)$ (resp. $\mathcal{F}_c(E)$) the set of all closed (resp. closed and convex) nonempty subsets of E. $\mathcal{L}_c(E)$ is the set of nonempty closed convex weakly locally compact subsets of E which contain no line. For each $A \subset E$, $\overline{A}$ denotes the norm-closure of A. The distance function $\mathrm{d}(\cdot, A)$ and the support function $\delta^*(\cdot, A)$ are defined by:

$$\mathrm{d}(x, A) = \inf\{\|x-y\| : y \in A\}, \quad x \in E$$
$$\delta^*(x', A) = \sup\{\langle x', x\rangle : x \in A\}, \quad x' \in E'.$$

The Wijsman topology on $\mathcal{F}(E)$ is the weak (or initial) topology determined by the family of functionals $\{A \mapsto \mathrm{d}(x, A) : x \in E\}$. If $F_i \in \mathcal{F}_c(E)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, we put

$$F_1 \dot{+} F_2 = \overline{F_1 + F_2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 \dot{+} \cdots \dot{+} F_n .$$

A closed valued multifunction X, i.e. a map from Ω into $\mathcal{F}(E)$, is said to be measurable if for each open subset U of E, the set $X^-U = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \cap U \neq \emptyset\}$ belongs to $\mathcal{A}$. X is said to be integrable if the function $\omega \mapsto \mathrm{d}(0, X(\omega)$ is integrable. Further the Effros σ-field $\mathcal{E}$ on $\mathcal{F}(E)$ is generated by the subsets $U^- = \{F \in \mathcal{F}(E) : F \cap U \neq \emptyset\}$, where U ranges over the open subsets of E. Let $L^1_E(\Omega, \mathcal{A}, P)$ denote the Banach space of (classes of) Bochner integrable function from $(\Omega, \mathcal{A})$ into $(E, \mathcal{B}(E))$. For any multifunction X, $S^1_X(\mathcal{A})$ denote the set $\{f \in L^1_E : f(\omega) \in X(\omega) \text{ a.e.}\}$; $\mathcal{A}$ may be replaced by any sub σ-field $\mathcal{B}$. The multivalued integral of X is defined by

$$\int_\Omega X\, dP := \left\{\int_\Omega f\, dP : f \in S^1_X(\mathcal{A})\right\}.$$

Given a sub σ-field $\mathcal{B}$ of $\mathcal{A}$ and an integrable $\mathcal{A}$-measurable multifunction X, Hia and Umegaki [16] showed the existence of the (multivalued) conditional expectation of X relative to $\mathcal{B}$ denoted by $E(X \mid \mathcal{B})$ such that

$$S^1_{E(X|\mathcal{B})}(\mathcal{B}) = \overline{\{E(f \mid \mathcal{B}) : f \in S^1_X(\mathcal{A})\}}^{\|\cdot\|_1}.$$

A measurable multifunction is also called a random set. It is possible, in a natural way, to define the distribution μ_X of the measurable multifunction X on the measurable space $(\mathcal{F}(E), \mathcal{E})$ by $\mu_X(A) = P(X^{-1}(A))$ for all $A \in \mathcal{E}$. Two random sets X and Y are said to have the same distribution if $\mu_X = \mu_Y$. Two random sets are said to be independent, if for all $A, B \in \mathcal{E}$: $P\big(X^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)\big) = P\big(X^{-1}(A)\big)P\big(Y^{-1}(B)\big)$.

Theorem 3.3. *Let X be an integrable random set with values in $\mathcal{F}_c(E)$, $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$ a decreasing sequence of sub σ-fields of $\mathcal{A}$ with $\mathcal{B}_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{B}_n$ and (x'_k) a countable dense sequence of $B_{E'}$ the unit ball of E', such that, for all $x \in E$,*

$$\mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\cdot)) = \sup_{k\geq 1} \left[\langle x'_k, x\rangle - \delta^*(x'_k, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\cdot))\right] \ \textit{a.e.}$$

Then there is a negligible N of Ω such that

$$\forall\, x \in E,\ \forall\, \omega \in \Omega \setminus N, \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_n)(\omega)) = \mathrm{d}(x, E(X \mid \mathcal{B}_\infty)(\omega)).$$

Theorem 4.2. *Let $(X_n)_n$ be a sequence of independent random sets with values in $\mathcal{F}_c(E)$, having the same distribution. Assume that the following conditions are satisfied:*

i) *X_1 is integrable,*
ii) *there exist $L \in \mathcal{L}_c(E)$ such that $X_1(\omega) \subset L$ a.e.*

Then one can find a decreasing sequence of sub σ-fields $(\mathcal{G}_n)_{n\geq 1}$ of $\mathcal{A}$ such that

$$\frac{1}{n} S_n = E(X_1 \mid \mathcal{G}_n) \quad \textit{a.e.}$$

Proposition 4.3. *Let $(X_n)_n$ be a sequence of independent random sets with values in $\mathcal{F}_c(E)$, having the same distribution. Assume that the following conditions are satisfied:*

i) *X_1 is integrable,*
ii) *there exist $L \in \mathcal{L}_c(E)$ such that $X_1(\omega) \subset L$ a.e.*
iii) $\operatorname{int}\operatorname{dom}\delta^*(\cdot, X_1(\omega)) \subset \operatorname{int}\operatorname{dom}\delta^*(\cdot, L)$ *a.e.*

Then

$$E(X_1 \mid \mathcal{G}_\infty) = \overline{\int_\Omega X_1\, dP} \quad \textit{a.e.}$$

where $\mathcal{G}_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{G}_n$, and $(\mathcal{G}_n)$ is defined as in Theorem 4.2.

Combining Theorem 3.3, Theorem 4.2 and Proposition 4.3 we obtain the multivalued strong law of large numbers first obtained by Hess [11, 13] and Hiai [14, 15]. However our approach is different and is based on convergence of reversed martingales. Our results generalize classical strong law of large numbers for independent random variables having the same distribution developed in [22] and the multivalued strong law of large numbers obtained by Ziat [24, Theorem 3.7, p. 23] and Ezzaki [10, Theorems 4.1 and 4.2 of chapter III].

BIBLIOGRAPHIE

1. Z. Artstein et S. Hart, *Law of large numbers for random sets and allocation processes*, Math. Oper. Res. **6** (1981), 485–492.
2. Z. Artstein et R. Vitale, *A strong law of large numbers for random compact sets*, Ann. Probability **3** (1975), 879–882.
3. G. Beer, *Wijsman convergence of convex sets under renorming*, Nonlinear Anal. **22** (1994), 207–216.
4. G. Beer, *Topologies on closed and closed convex sets*, Kluwer, Dordrecht, 1993.

5. N. Bourbaki, *Topologie générale, chapitres 5 à 10*, Hermann, Paris, 1974.
6. C. Castaing, F. Ezzaki et C. Hess, *Convergence of conditional expectations for unbounded closed convex random sets*, Studia Math. **124** (1997), 133–148.
7. C. Castaing et M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lectures Notes in Math., vol. 580, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
8. J. Couvreux, *Étude de problèmes de convergence et d'approximation de fonctionnelles intégrales et d'espérances conditionnelles multivoques*, Thèse de doctorat, CEREMADE, Université Paris Dauphine, 1995.
9. J. L. Doob, *Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1965.
10. F. Ezzaki, *Convergence des espérances conditionnelles d'ensembles aléatoires et LFGN*, Thèse d'état marocaine, Rabat ,Université Mohamed V, juin 1996.
11. C. Hess, *Loi de probabilité et indépendance des ensembles aléatoires à valeurs fermées d'un espace de Banach*, Sém. Anal. Convexe **13** (1983), Exp. No. 7, 40 pp.
12. C. Hess, *Lemme de Fatou et théorème de la convergence dominée pour des ensembles aléatoires non bornés et des intégrandes*, Sém. Anal. Convexe **16** (1986), Exp. No. 8, 56 pp.
13. C. Hess, *On the distribution of random sets and the multivalued strong law of large numbers in the Wijsman topology*, Cahier de mathématiques n^{o} 9250, CEREMADE, Université Paris Dauphine, 11 décembre 1992.
14. F. Hiai, *Strong laws of large numbers for multivalued random variables*, Multifunctions and integrands (Catania, 1983), Lectures Notes in Math., vol 1091, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1984, pp. 160–172.
15. F. Hiai, *Convergence of conditional expectations and strong laws of large numbers for multivalued random variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), 613–627.
16. F. Hiai et H. Umegaki, *Integrals, conditional expectation and martingales of multivalued functions*, J. Multivariate Anal. **7** (1977), 149–182.
17. J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson, Paris, 1964.
18. J. Neveu, *Martingales à temps discret*, Masson, Paris, 1972.
19. L. Piccinini, Thèse de doctorat, Montpellier, Université de Montpellier II, janvier 1996.
20. Y. Sonntag et C. Zalinescu, *Set convergences: An attempt of classification*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), 199–226.
21. W. F. Stout, *Almost sure convergence*, Academic Press, New York-London, 1974.
22. M. Valadier, *La loi forte des grands nombres comme conséquence d'autres théorèmes*, Sém. Anal. Convexe **21** (1991), Exp. No. 15.
23. R. A. Wijsman, *Convergence of sequences of convex sets, cones and functions II*, Trans. Amer. Math. Soc. **123** (1966), 289–332.
24. H. Ziat, *Convergence des suites adaptées multivoques, Application à la loi forte des grands nombres multivoque*, Thèse de doctorat, Montpellier, Université de Montpellier II, 1993.

H. Ziat
Université sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences et Techniques Saïss
Département de Mathématiques
Route d'Immouzzer
B. P. 2202
Fes, Maroc.