Ann. Sci. Math. Québec **21** (1997), no. 2, 177–189.

GÉNÉRALISATIONS DE LA SUITE DE THUE-MORSE

JIA-YAN YAO

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous donnons des généralisations de la suite de Thue-Morse et nous étudions les propriétés de ces nouvelles suites.

ABSTRACT. In this article, we give some generalizations of the Thue-Morse sequence and we study the properties of these new sequences.

1. Introduction. La suite à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de Thue-Morse $t = (t(n))_{n\geq 0}$ est définie par la relation de récurrence suivante :

(1) $t(0) = 0$;
(2) $\forall n \in \mathbb{N}, t(2n) = t(n)$;
(3) $\forall n \in \mathbb{N}, t(2n+1) = 1 + t(n)$.

L'étude de t remonte jusqu'à l'époque de A. Thue (*cf.* [15]), qui cherchait à construire des suites infinies sans cube sur un ensemble à deux lettres. Elle a été redécouverte par M. Morse (*cf.* [13]) pour montrer l'existence de géodésiques récurrentes non périodiques sur certaines surfaces, puis par K. Mahler pour donner des exemples de suites à mesure spectrale singulière (*cf.* [12]).

La suite t est 2-automatique. Donnons une définition équivalente des suites automatiques (voir [3]). Soient $p \geq 2$ un entier et u une suite à valeurs dans un ensemble fini. Nous disons que u est p-automatique si son p-noyau $\mathcal{N}_p(u)$ défini par

$$\mathcal{N}_p(u) = \left\{ \Big(u(p^a n + b)\Big)_{n\geq 0} \mid a \geq 0,\ 0 \leq b < p^a \right\}$$

est un ensemble fini.

Comme corollaire immédiat, nous obtenons (voir par exemple [2]) :

Corollaire 1. *Soient $p \geq 2$ un entier et u une suite p-automatique. Alors pour tout entier $b \geq 0$, il existe deux entiers $k \geq 0$ et $d \geq 1$ tels que pour tout entier $a \geq k$ et tout entier $n \geq 0$, nous avons $u(p^{a+d}n + b) = u(p^a n + b)$.*

Démonstration. Soit b ($b \geq 0$) un entier. Alors il existe un entier c ($c \geq 0$) tel que $b < p^c$. Comme la suite u est p-automatique, le p-noyau $\mathcal{N}_p(u)$ est donc fini. En particulier, l'ensemble de toutes les sous-suites de la forme $(u(p^m n + b))_{n\geq 0}$ (m est un entier $\geq c$) est fini. Nous pouvons ainsi trouver deux entiers k et d ($k \geq c$ et $d \geq 1$) tels

---

Reçu le 12 août 1996 et, sous forme définitive, le 6 janvier 1997.

que pour tout entier n ($n \geq 0$), nous avons $u(p^{k+d}n + b) = u(p^k n + b)$. Soit a ($a \geq k$) un entier, nous avons alors pour tout entier n ($n \geq 0$),

$$u(p^{k+d}p^{a-k}n + b) = u(p^k p^{a-k}n + b).$$

Par suite, $u(p^{a+d}n + b) = u(p^a n + b)$ pour tout entier n ($n \geq 0$). $\square$

2. Somme des chiffres. La suite de Thue-Morse possède plusieurs généralisations. Nous en citons une ici.

Soit $p \geq 2$ un entier. Pour tout entier $n \geq 0$ dont le développement en base p est donné par $n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j p^j$, nous définissons $s_p(n) = \sum_{j=0}^{\infty} n_j$. Nous appelons s_p la suite de somme des chiffres p-adiques. Nous remarquons que s_2 (mod 2) est la suite de Thue-Morse. Ainsi s_p (mod p) généralise cette suite (voir [1]).

Dans le théorème suivant, nous donnons une nouvelle propriété de la suite s_p. Nous indiquons ensuite un lien entre notre résultat et celui de [11].

Dans ce qui suit, pour tout entier n ($n \geq 0$), notons $u(n)$ le n-ième nombre entier dont la somme des chiffres en base p est k. Nous remarquons que dans le cas où $k = 1$, nous avons $u(n) = p^n$.

Théorème 1. *Soient $p \geq 2$ et $k \geq 1$ deux entiers. Alors pour tout nombre réel x, la suite $(xu(n))_{\geq 0}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si x est un nombre p-normal.*

Nous remarquons qu'un nombre réel x est p-normal est équivalent par le critère de Weyl au fait de dire que la suite $(xp^n)_{\geq 0}$ est équirépartie modulo 1, c'est-à-dire le théorème 1 est vrai avec $k = 1$.

Démonstration. Dans la suite, nous utiliserons le critère de Weyl (*cf.* [8]) qui affirme qu'une suite réelle v est équirépartie modulo 1 si et seulement si pour tout entier $l > 0$, nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi l v(n)} = 0.$$

Soit x un nombre réel $\neq 0$ tel que $(xu(n))_{\geq 0}$ soit une suite équirépartie modulo 1. Soit $N \geq 1$ un entier. Nous définissons les deux ensembles,

$$E_1(N) = \left\{ n \;\middle|\; n = \sum_{j=1}^{k} p^{n_j} \text{ avec } 0 \leq n_1 < n_2 \cdots < n_k < N \right\};$$

$$E_2(N) = \left\{ n \;\middle|\; u(n) \leq p^N \right\}.$$

Ainsi $E_1(N)$ est l'ensemble des nombres $n < p^N$ qui s'écrivent avec exactement k chiffres 1 en base p et des chiffres 0 ailleurs. $E_2(N)$ est l'ensemble de tous les entiers strictement plus petits que $|E_2(N)|$ car $(u(n))_{n\geq 0}$ est une suite strictement croissante. Enfin, nous remarquons que nous avons aussi $E_1(N) \subseteq u(E_2(N))$ et

$$k!|E_1(N)| = k!\binom{N}{k} \sim N^k$$

quand N tend vers l'infini.

Fixons $l \neq 0$ un entier, nous avons alors

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(2i\pi lxp^n\right)\right)^k &= k! \sum_{0\le n_1<n_2\cdots<n_k<N} \exp\left(2i\pi lx\left(\sum_{j=1}^{k} p^{n_j}\right)\right) + R_N(x)\\ &= k! \sum_{n\in E_1(N)} \exp\left(2i\pi lnx\right) + R_N(x)\\ &= k! \sum_{n\in E_2(N)} \exp\left(2i\pi lxu(n)\right) + R_N(x) + R'_N(x)\end{aligned}$$

Comme dans l'égalité précédente, le membre de gauche contient exactement N^k termes de module 1, ainsi $R_N(x)$ contient $N^k - k!|E_1(N)|$ termes de module 1. On a donc

$$|R_N(x)| \le N^k - k!\binom{N}{k} = O(N^{k-1}) = o(N^k) \text{ quand } N \to +\infty$$

car $k!|E_1(N)| = k!\binom{N}{k} \sim N^k$.

Pour tout $n \in u(E_2(N))\backslash E_1(N)$, $\exp(2i\pi lnx)$ est un terme de $R_N(x)$, donc

$$|E_1(N)| \le |E_2(N)| \le |E_1(N)| + |R_N(x)|.$$

Par suite, $k!|E_2(N)| \sim N^k$. Or dans $R'_N(x)$, il y a seulement $k!(|E_2(N)| - |E_1(N)|)$ termes de module 1, nous obtenons alors

$$|R'_N(x)| \le k!\left(|E_2(N)| - |E_1(N)|\right) \le k!|R_N(x)| = o(N^k) \text{ quand } N \to \infty.$$

D'où il vient immédiatement

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\Big(2i\pi lxp^n\Big) = 0,$$

puisque la suite $(xu(n))_{n\ge 0}$ est équirépartie modulo 1 et $E_2(N)$ est l'ensemble de tous les entiers $< |E_2(N)|$. Le nombre x est donc un nombre p-normal en appliquant le critère de Weyl.

Réciproquement, soit x un nombre p-normal. Soit $N \ge 1$ un entier. Il existe alors un unique entier $M \ge 1$ dépendant de N tel que

$$\binom{M}{k} \le N < \binom{M+1}{k}.$$

Ainsi pour N assez grand, nous avons $\binom{M}{k} \sim N$.

Nous gardons les notations précédentes et nous obtenons, pour tout entier $l \neq 0$,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{M-1} \exp\Big(2i\pi lxp^n\Big)\right)^k &= k! \sum_{0\le n_1<n_2\cdots<n_k<M} \exp\Big(2i\pi lx(\sum_{j=1}^{k} p^{n_j})\Big) + R_M(x)\\ &= k! \sum_{n\in E_1(M)} \exp\Big(2i\pi lnx\Big) + R_M(x)\\ &= k! \sum_{n\in E_2(M)} \exp\Big(2i\pi lxu(n)\Big) + R_M(x) + R'_M(x).\end{aligned}$$

Or $|R_M(x)| = o(M^k)$ et $|R'_M(x)| = o(M^k)$ quand $M \to \infty$, nous obtenons ainsi

$$\lim_{M\to\infty} \frac{k!}{M^k} \sum_{n\in E_2(M)} \exp\Big(2i\pi lxu(n)\Big) = 0$$

car x est un nombre p-normal. Mais nous savons aussi $k!|E_2(M)| \sim M^k$. Ainsi

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{|E_2(M)|} \sum_{n\in E_2(M)} \exp\Big(2i\pi lxu(n)\Big) = 0$$

Comme $|E_2(M)| \sim |E_1(M)| = \binom{M}{k} \sim N$, nous en déduisons alors

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\Big(2i\pi lxu(n)\Big) = 0$$

car $E_2(M)$ est l'ensemble de tous les entiers strictement plus petits que $|E_2(M)|$ et nous avons $N - |E_2(M)| = o(N)$ quand $N \to \infty$. La suite $(xu(n))_{n\geq 0}$ est donc équirépartie modulo 1 en vertu du critère de Weyl. $\square$

Théorème 2. *Soient $p \geq 2$ et $k \geq 1$ deux entiers. Pour tout n ($n \geq 0$), notons $v(n)$ le n-ième nombre entier dont la somme des chiffres en base p est $\leq k$. Alors pour tout nombre réel x, la suite $(xv(n))_{\geq 0}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si x est un nombre p-normal.*

Nous gardons les notations du théorème 1. Soit $\alpha \neq 0$ un nombre réel. Pour tout élément $x \in \mathbb{T}$, nous définissons $T_\alpha(x) = x + \alpha$ (mod 1). Désignons par m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$. Le théorème 1 montre alors que le nombre réel α est p-normal si et seulement si la suite $u = (u(n))_{n\geq 0}$ est bonne pour le théorème ergodique par rapport au système dynamique $(\mathbb{T},\ T_\alpha,\ m)$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathbb{T}$ et pour toute fonction f complexe continue définie sur $\mathbb{T}$, nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T_\alpha^{u(n)}(x) = \int_{\mathbb{T}} f(y)dm(y).$$

Cela est à rapprocher d'un résultat de E. Lesigne *et al.* (*cf.* [11]) suivant :

Théorème 3. *Soit $\mathbb{U}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 et soit φ une suite p-multiplicative à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{U}$. Pour toute valeur λ prise par φ et tout entier n ($n \geq 0$), notons $u(n)$ le n-ième nombre entier pour lequel φ prend la valeur λ. Alors $(u(n))_{n\geq 0}$ est universellement bonne pour le théorème ergodique. Autrement dit : soient $(\Omega,\ \mathcal{J},\ \mu)$ un espace probabilisé et T une transformation mesurable, préservant la mesure μ, alors pour tout $f \in L^1(\mu)$, la suite*

$$\Big(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^{u(n)}\Big)_{N\geq 1}$$

converge dans $L^1(\mu)$ et presque partout (une suite φ est dite p-multiplicative si pour tous les entiers t, a et b tels que $t \geq 1$, $a \geq 0$ et $0 \leq b < p^t$, $\varphi(ap^t + b) = \varphi(ap^t)\varphi(b)$).

3. Décalage et suites fortement additives. Nous étudions maintenant une famille de suites qui généralisent à leur tour s_p.

Soit $p \geq 2$ un entier. Une suite φ est dite fortement p-additive si

$$\varphi(ap^k + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \text{ pour } k \geq 0,\ a \geq 0 \text{ et } 0 \leq b < p^k.$$

En particulier, $\varphi(0) = 0$. Par suite, pour tout entier $n \geq 0$, nous avons

$$\varphi(n) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(n_j),$$

où $0 \leq n_j < p$ est le j-ième chiffre du développement en base p de l'entier n.

Il est clair que la suite de somme des chiffres s_p est fortement p-additive. Nous remarquons également que si φ est une suite fortement p-additive à valeurs entières, la suite $(\varphi(n) \bmod p)_{n\geq 0}$ est p-automatique.

Soit $\mathbb{Z}_p$ le complété de $\mathbb{N}$ pour la métrique p-adique. Ceci a un sens même si p n'est pas premier. Comme dans le cas où p est premier, on peut injecter $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_p$ et identifier les entiers p-adiques dont les coefficients sont ultimement périodiques à des nombres rationnels réels.

Soit φ une suite fortement p-additive. Pout tout entier naturel $n \geq 0$ et tout entier p-adique $\omega \in \mathbb{Z}_p \setminus \{-1, -2, \ldots, -n\}$, nous vérifions sans peine que pour tout grand entier $j \geq 0$, nous avons $(\omega + n)_j = \omega_j$ où $(\omega + n)_j$ (resp. ω_j) est le j-ième chiffre de l'entier p-adique $\omega + n$ (resp. ω). Nous considérons alors la somme finie

$$\Delta_\varphi(\omega,\ n) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\varphi((\omega + n)_j) - \varphi(\omega_j)\Big).$$

Nous remarquons que pour tout entier fixé n ($n \geq 0$), l'application $\omega \longmapsto \Delta_\varphi(\omega, n)$ définie sur $\mathbb{Z}_p \setminus \{-1, -2, \ldots, -n\}$ est continue. En effet, si $\omega \in \mathbb{Z}_p \setminus \{-1, -2, \ldots, -n\}$, il existe alors un entier N ($N \geq 0$) dépendant de ω tel que pour tout entier $j \geq N$, nous avons $(\omega + n)_j = \omega_j$. Par suite, pour tout entier p-adique $\omega' \in \mathbb{Z}_p \setminus \{-1, -2, \ldots, -n\}$ tel que $\omega_j = \omega'_j$ avec $0 \leq j < N$, nous avons $\Delta_\varphi(\omega, n) = \Delta_\varphi(\omega', n)$. L'application en question est donc continue.

Soit $\omega \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_-$ un entier p-adique où $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, \ldots\}$. La suite $n \to \Delta_\varphi(\omega, n)$ (notée $\Delta_\varphi(\omega)$) s'appelle suite en décalage ω de φ. Cette suite joue un rôle important dans la théorie des systèmes dynamiques (*cf.* [6, 7, 10, 11]).

Soit φ une suite fortement p-additive à valeurs entières. Comme $(\varphi(n) \bmod p)_{n\geq 0}$ est p-automatqiue, alors pour tout polynôme P à coefficients rationnels de degré inférieur à 1 tel que $P(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, la suite $(\varphi(P(n)) \bmod p)_{n\geq 0}$ est p-automatique (*cf.* [2]). Ainsi pour tout $b \in \mathbb{N}$, la suite $(\Delta_\varphi(b, n) \bmod p)_{n\geq 0}$ est p-automatique. Nous nous demandons donc ce qui se passe quand b tend vers un entier p-adique $\omega \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_-$? Cela nous conduit à poser la question suivante : est-ce que pour tout $\omega \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_-$, la suite $(\Delta_\varphi(\omega, n) \bmod p)_{n\geq 0}$ est p-automatique si et seulement si nous avons $\omega \in \mathbb{Q}$? Les théorèmes 4 et 5 donnent une réponse partielle à cette question.

Théorème 4. *Soient $\omega \in \mathbb{Z}_p \backslash \mathbb{Z}_-$ et φ une suite fortement p-additive à valeurs entières. Si $\omega \in \mathbb{Q}$, alors la suite $(\Delta_\varphi(\omega, n) \bmod p)_{n\geq 0}$ est p-automatique.*

Démonstration. Comme ω est rationnel, alors $(\omega_j)_{j\geq 0}$ est une suite ultimement périodique. Il existe donc deux entiers $a \geq 0$ et $d \geq 1$ tels que $\forall k \geq a$, $\omega_k = \omega_{k+d}$. Pour tous les entiers k et b tels que $k \geq a$ et $0 \leq b < p^k$, posons

$$\omega_{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} \omega_j p^j \text{ et } \omega^{(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_{j+k} p^j.$$

La division euclidienne $\omega_{(k)} + b$ par p^k donne deux entiers $0 \leq e < 2$ et $0 \leq q < p^k$ tels que $\omega_{(k)} + b = ep^k + q$ car on a $p^k > \omega_{(k-1)}$. Choisir alors t $(a \leq t < a + d)$ un entier tel que $t \equiv k$ (mod d). Nous avons donc $\omega^{(k)} = \omega^{(t)}$. Ainsi pour tout entier $n \geq 0$,

$$\Delta_\varphi(\omega^{(k)},\ n) = \Delta_\varphi(\omega^{(t)},\ n).$$

Nous en déduisons immédiatement,

$$\begin{aligned}
\Delta_\varphi(\omega,\ p^k n + b) &= \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\varphi\Big((\omega + p^k n + b)_j\Big) - \varphi(\omega_j)\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\varphi\Big(\big((\omega^{(k)} + n + e)p^k + q\big)_j\Big) - \varphi(\omega_j)\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \Big(\varphi(q_j) - \varphi\big(\omega_j\big)\Big) + \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\varphi\Big((\omega^{(k)} + n + e)_j\Big) - \varphi\big(\omega_j^{(k)}\big)\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \Big(\varphi(q_j) - \varphi\big(\omega_j\big)\Big) + \Delta_\varphi(\omega^{(k)},\ n + e) \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \Big(\varphi(q_j) - \varphi\big(\omega_j\big)\Big) + \Delta_\varphi(\omega^{(t)},\ n + e).
\end{aligned}$$

Nous obtenons par suite l'inégalité suivante

$$\text{Card}\Big(\{(\Delta_\varphi(p^k n + b) \ \bmod p)_{n\geq 0} |\ k \geq a,\ 0 \leq b < p^k\}\Big) \leq 2pd.$$

Ainsi $\mathcal{N}_p((\Delta_\varphi(\omega, n) \bmod p)_{n\geq 0})$ est un ensemble fini. La suite $(\varphi(\omega, n) \bmod p)_{n\geq 0}$ est donc p-automatique. $\square$

Le résultat suivant donne une réciproque partielle du théorème précédent.

Théorème 5. *Soit φ une suite fortement p-additive à valeurs entières telle que l'application $\omega \mapsto \Delta_\varphi(\omega)$ (mod p) soit injective sur $\mathbb{Z}_p \backslash \mathbb{Z}_-$. Soit $\omega \in \mathbb{Z}_p \backslash \mathbb{Z}_-$ un entier p-adique tel que la suite $(\Delta_\varphi(\omega, n) \bmod p)_{n\geq 0}$ soit p-automatique. Alors $\omega \in \mathbb{Q}$.*

Démonstration. Comme la suite $(\Delta_\varphi(\omega, n) \bmod p)_{n\geq 0}$ est p-automatique, nous pouvons trouver, d'après le corollaire 1, deux entiers $a \geq 0$ et $d \geq 1$ tels que

$$\Delta_\varphi(\omega,\ p^k n) \equiv \Delta_\varphi(\omega,\ p^{k+d} n) (\bmod p) \text{ pour tout } k \geq a \text{ et } n \geq 0.$$

Nous en déduisons immédiatement la relation suivante :

$$\Delta_\varphi(\omega^{(k)}, n) \equiv \Delta_\varphi(\omega^{(k+d)}, n)(\bmod p) \text{ pour tout } k \geq a \text{ et } n \geq 0.$$

D'après l'hypothèse du théorème, nous avons alors $\omega^{(k)} = \omega^{(k+d)}$ pour tout entier $k \geq a$. Par suite $\omega_k = \omega_{k+d}$ pour tout entier $k \geq a$. Ainsi ω est rationnel. □

Corollaire 2. *Soient $\varphi = s_p$ la suite de somme des chiffres et $\omega \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_-$. Alors la suite $(\Delta_\varphi(\omega, n) \bmod p)_{n\geq 0}$ est p-automatique si et seulement si ω est rationnel.*

Démonstration. D'après le théorème 4 et le théorème 5, il suffit de montrer que l'application $\omega \to \Delta_\varphi(\omega)$ (mod p) est injective sur $\mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_-$ pour $\varphi = s_p$.

Raisonnons par l'absurde. Soient $\omega \neq \omega'$ deux entiers p-adiques distincts tels que

$$(1) \qquad \Delta_\varphi(\omega, n) \equiv \Delta_\varphi(\omega', n)(\text{mod } p \text{ pour tout entier } n \geq 0.$$

Comme $\omega \neq \omega'$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\omega_k \neq \omega'_k$. Sans perte de généralité, nous supposons que nous avons $\omega_k > \omega'_k$. Désignons par $l(k)$ (resp. $l'(k)$) le nombre des chiffres $\omega_j = p-1$ (resp. $\omega'_j = p-1$) suivant ω_k (resp. ω'_k) immédiatement dans le développement p-adique de ω (resp. ω').

Posons $n = (p - \omega_k)p^k$, nous avons alors,

$$\Delta_\varphi(\omega, n) = -\omega_k - (p-1)l(k) + 1 \text{ et } \Delta_\varphi(\omega', n) = p - \omega_k.$$

En tenant compte de la relation (1), nous obtenons ainsi $l(k) = p - 1$ (mod p).

Posons maintenant $n = (p - \omega'_k)p^k$, nous obtenons,

$$\Delta_\varphi(\omega, n) = -\omega'_k - (p-1)l(k) + 1 \text{ et } \Delta_\varphi(\omega', \ n) = -\omega'_k - (p-1)l'(k) + 1.$$

Par suite, $l(k) \equiv l'(k)$ (mod p). En particulier, $l(k) \geq p-1$ et $l'(k) \geq p-1$.

Posons finalement $n = p^{k+1} + (p - \omega_k)p^k$, nous avons dans ce cas,

$$\Delta_\varphi(\omega, n) = 2 - \omega_k - (p-1)l(k) \text{ et } \Delta_\varphi\ (\omega, \ n) = p + 1 - \omega_k - (p-1)l'(k).$$

D'où il vient $l'(k) - l(k) \equiv 1$ (mod p). C'est absurde. Ainsi $\omega = \omega'$. □

Remarque 1. Soit $p \geq 2$ un entier et φ une suite fortement p-additive à valeurs entières. Dans le cas où nous avons $\varphi(a) \equiv 0$ (mod p) pour tout entier $0 \leq a < p$, l'application $\omega \to \Delta_\varphi(\omega)$ (mod p) définie sur $\mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_-$ est constante. En excluant ce cas trivial, nous pensons que l'application précédente est toujours injective. Mais jusqu'à présent, nous n'avons pas encore trouvé de preuve.

4. Mesure spectrale. Soit $u = (u(n))_{n\geq 0}$ une suite bornée à valeurs complexes. Nous supposons que pour tout entier naturel $k \geq 0$, la limite suivante existe, appelée le k-ième coefficient de corrélation de la suite u,

$$\gamma_u(k) := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n+k)\overline{u(n)}.$$

D'après un théorème de Bochner, il existe une unique mesure positive ν définie sur le tore $\mathbb{T}$ telle que pour tout entier $k \geq 0$, nous avons

$$\gamma_u(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{2i\pi kx} d\nu(x).$$

Nous appelons ν la mesure spectrale de la suite u.

Soit φ une suite fortement p-additive à valeurs réelles. Fixons l'entier p-adique ω^0. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, définissons

$$U_\varphi^{\omega^0}(n) = e^{2i\pi\Delta_\varphi(\omega^0, n)}.$$

Nous allons étudier les propriétés spectrales de la suite $U_\varphi^{\omega^0}$.

Soit $p \geq 2$ un entier. Pour tout $\omega \in \mathbb{Z}_p$, posons $T(\omega) = \omega + 1$. Comme 1 engendre $\mathbb{N}$ qui est dense dans $\mathbb{Z}_p$, le flot $(\mathbb{Z}_p,\ T)$ est donc uniquement ergodique (*cf.* [16]). Notons alors μ_p la mesure normalisée de Haar sur $\mathbb{Z}_p$. Cette mesure est T-invariante, continue, positive, bornée et régulière (*cf.* [17]). Ainsi tout point $\omega \in \mathbb{Z}_p$ est générique pour μ_p, c'est-à-dire pour toute fonction continue f définie sur $\mathbb{Z}_p$, nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n\omega) = \mu_p(f) := \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d\mu_p(x).$$

La formule précédente est aussi vraie pour toute fonction définie sur $\mathbb{Z}_p$ continue à l'exception d'un ensemble de μ_p-mesure nulle (voir par exemple [9]).

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \mathbb{Z}_p$. Si $\omega \in \{-1, \ldots, -k\}$, posons $G_\varphi^k(\omega) = 1$. Sinon, posons alors $G_\varphi^k(\omega) = e^{2i\pi\Delta_\varphi(\omega,k)}$. La fonction G_φ^k est continue sur $\mathbb{Z}_p \setminus \{-1, \ldots, -k\}$ car la fonction $\omega \longmapsto \Delta_\varphi(\omega, k)$ l'est. Ainsi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G_\varphi^k(T^n\omega) = \mu_p(G_\varphi^k).$$

Nous remarquons que pour tout entier naturel n, nous avons

$$U_\varphi^{\omega^0}(n+k)\overline{U}_\varphi^{\omega^0}(n) = G_\varphi^k(n+\omega^0) = G_\varphi^k(T^n\omega^0).$$

Ainsi $\mu_p(G_\varphi^k)$ est le k-ième coefficient de corrélation de $U_\varphi^{\omega^0}$. Notons Λ_φ la mesure spectrale de $U_\varphi^{\omega^0}$. Nous remarquons que cette mesure est indépendante de ω^0. Elle est ou bien atomique ou bien continue singulière. Et elle est atomique si et seulement s'il existe un nombre réel a tel que $(p-1)a \in \mathbb{Z}$ et $\varphi = as_p$ (voir [4] et [5]).

5. Ensemble de Cantor «généralisé». Nous identifions dans la suite le tore $\mathbb{T}$ à l'intervalle $[0, 1[$. Pour tout $x \in \mathbb{T}$, nous considérons son développement p-adique

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j p^{-j},$$

avec $0 \leq x_j < p$ pour tout entier $j \geq 0$. Soit $0 \leq k < p$ un entier. Notons C_p^k l'ensemble des $x \in \mathbb{T}$ tels que pour tout $j \geq 0$, nous avons $x_j \neq k$. Nous appelons C_p^k l'ensemble de Cantor généralisé. L'ensemble triadique de Cantor correspond à $p = 3,\ k = 1$.

Théorème 6. *Soient $p \geq 2$ un entier et φ une suite fortement p-additive à valeurs réelles telle que la mesure spectrale Λ_φ soit continue. Alors pour tout entier $q \geq 2$ multiplicativement dépendant de p et tout entier k $(0 \leq k < q)$, nous avons*

$$\Lambda_\varphi(C_q^k) = 0.$$

Démonstration. Comme les deux entiers p et q sont multiplicativement dépendants, il existe alors trois entiers naturels r, s et t tels que $p = r^s$ et $q = r^t$. En particulier, nous avons $p^t = q^s$. Comme $C_q^k \subseteq C_{q^s}^k$ et φ est aussi fortement p^t-additive, il suffit donc de montrer $\Lambda_\varphi(C_p^k) = 0$ quitte à remplacer p par p^t.

La preuve du théorème 6 est basée sur le lemme suivant :

Lemme 1. *Pour tout entier b $(0 \leq b < p)$, il existe une fonction y_b continue sur $\mathbb{T}$ vérifiant $y_b > 0$ sauf pour un nombre fini de points, telle que pour tout $x \in \mathbb{T}$,*

$$\Lambda_\varphi(\frac{x+b}{p}) = y_b(x) d\Lambda_\varphi(x).$$

Démonstration. Désignons par $\widehat{\Lambda}_\varphi$ la transformée de Fourier de Λ_φ. Pour b et n deux entiers tels que $0 \leq b < p$ et $n \geq 0$, nous avons alors

$$\begin{aligned}
\hat{\Lambda}_\varphi(pn+b) &= \int_{\mathbb{T}} e^{2i\pi(pn+b)x} d\Lambda_\varphi(x) \\
&= \sum_{l=0}^{p-1} \int_l^{l+1} e^{2i\pi(n+\frac{b}{p})x} d\Lambda_\varphi(\frac{x}{p}) \\
&= \sum_{l=0}^{p-1} e^{\frac{2i\pi bl}{p}} \int_{\mathbb{T}} e^{2i\pi(n+\frac{b}{p})x} d\Lambda_\varphi(\frac{x+l}{p}).
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in \mathbb{T}$, posons

$$P(t) = \frac{1}{p}\Big|\sum_{j=0}^{p-1} e^{2i\pi(\varphi(j)+jt)}\Big|^2.$$

Pour la convergence faible des mesures (voir par exemple [14]), nous avons

$$\Lambda_\varphi = \lim_{N\to\infty} \prod_{n<N} P(p^n t).$$

Pour tout entier $N \geq 1$, posons

$$P_N(t) = \prod_{n=0}^{N-1} P(p^n t).$$

Désignons par $\widehat{P}_N$ la transformée de Fourier de P_N. Nous vérifions sans peine que pour tout $a \geq 0$ et $0 \leq b < p^N$, nous avons

$$\widehat{\Lambda}_\varphi(ap^N + b) = \widehat{\Lambda}_\varphi(a)\widehat{P}_N(b) + \widehat{\Lambda}_\varphi(a+1)\widehat{P}_N(b - p^N).$$

En posant $N = 1$ dans la relation précédente, nous obtenons pour tout $x \in \mathbb{T}$,

$$\sum_{l=0}^{p-1} e^{\frac{2i\pi b(x+l)}{p}} d\Lambda_\varphi(\frac{x+l}{p}) = \Big(\widehat{P}_1(b) + e^{2i\pi x}\widehat{P}_1(b-p)\Big) d\Lambda_\varphi(x).$$

Pour tout $x \in \mathbb{T}$ et tout entier $b(0 \leq b < p)$, posons

$$h_b(x) = e^{-2i\pi bx/p}\Big(\widehat{P}_1(b) + e^{2i\pi x}\widehat{P}_1(b-p)\Big).$$

Pour les entiers b et l ($0 \leq b, l < p$), posons $M_{bl} = e^{2i\pi bl/p}$. Nous avons alors

$$\text{(2)} \qquad \sum_{l=0}^{p-1} M_{bl} d\Lambda_\varphi(\frac{x+l}{p}) = h_b(x) d\Lambda_\varphi(x).$$

Mais $M = (M_{jl})_{0\leq j,\, l<p}$ est une matrice de Vandermonde, donc dét$(M) \neq 0$. Pour tout entier $0 \leq l < p$, nous changeons la l-ième colonne de M par le vecteur $h = (h_j)_{0\leq j<p}$. Notons M_l cette nouvelle matrice. Nous avons alors

$$d\Lambda_\varphi(\frac{x+l}{p}) = \frac{\text{dét}(M_l(x))}{\text{dét}(M(x))} d\Lambda_\varphi.$$

Posons $y_l(x) =$d'et$(M_l(x))/$dét$(M(x))$. Alors y_l est continue et n'a qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{T}$ car dét$(M_l(x))$ est un polynôme de variables $e^{2i\pi x/p}$ et $e^{-2i\pi x/p}$. Mais les deux mesures $d\Lambda_\varphi(x)$ et $d\Lambda_\varphi(\frac{x+l}{p})$ sont positives, ainsi y_l est positive. $\square$

Nous montrons maintenant le théorème 6.

Nous remarquons d'abord que nous avons

$$C_p^k = \bigcup_{0\leq j<p,\; j\neq k} \frac{1}{p}(j + C_p^k),$$

et si $0 \leq j < m < p$, nous avons

$$(\frac{j + C_p^k}{p}) \cap (\frac{m + C_p^k}{p}) = \emptyset.$$

Nous obtenons par suite,

$$\text{(3)} \qquad \Lambda_\varphi(C_p^k) = \sum_{0\leq j<p,\; j\neq k} \int_{\frac{1}{p}(j+C_p^k)} d\Lambda_\varphi(x) = \sum_{0\leq j<p,\; j\neq k} \int_{C_p^k} d\Lambda_\varphi(\frac{x+j}{p}).$$

Posons $b = 0$ dans la formule (2). Nous obtenons en notant $\widehat{P}_1(0) = 1$ et $\widehat{P}_1(p) = 0$,

$$\sum_{l=0}^{p-1} d\Lambda_\varphi(\frac{x+l}{p}) = d\Lambda_\varphi(x).$$

Nous avons ainsi, en tenant compte de la relation (3),

$$\int_{C_p^k} d\Lambda_\varphi(\frac{x+k}{p}) = 0.$$

Cela nous donne, d'après le lemme 1,

$$\int_{C_p^k} y_k(x) d\Lambda_\varphi(x) = 0.$$

Par suite $\Lambda_\varphi(C_p^k) = 0$ car nous avons $y_k > 0$ Λ_φ-p.p. sur $\mathbb{T}$. $\square$

Corollaire 3. *Soit θ un nombre réel tel que $\theta(p-1) \neq \mathbb{Z}$. Posons $\varphi = \theta s_p$. Alors pour tout entier q $(q \geq 2)$ et tout entier k $(0 \leq k < q)$, nous avons $\Lambda_\varphi(C_q^k) = 0$.*

Démonstration. Il nous reste à examiner le cas où les deux entiers p et q sont multiplicativement indépendants. Notons B_q l'ensemble des nombres q-normaux. En vertu d'un théorème de T. Kamae (*cf.* [7]), nous avons $\Lambda_\varphi(B_q) = 1$. Or $C_q^k \subseteq \mathbb{T} \setminus B_q$, ainsi $\Lambda_\varphi(C_q^k) = 0$. $\square$

Remerciements. Nous remercions cordialement Michel Mendès France pour ses précieux conseils et ses remarques pertinentes.

English extended abstract. Let $p \geq 2$ be an integer and $u = (u(n))_{n\geq 0}$ be a sequence over a finite set. We say that u is p-automatic if its p-kernel

$$\mathcal{N}_p(u) = \left\{ \Big(u(p^a n + b) \Big)_{n\geq 0} \mid a \geq 0,\ 0 \leq b < p^a \right\}$$

is a finite set.

Any positive integer n can be expanded in base p, $n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j p^j$, where the j-th digit satisfies $0 \leq n_j < p$. Define the sum s_p: $s_p(n) = \sum_{j=0}^{\infty} n_j$. The sequence s_2 (mod 2) is the well-known Thue-Morse sequence.

Theorem 1. *Let $p \geq 2$ and $k \geq 1$ be two integers. For every integer $n \geq 0$, let $u(n)$ be the n-th integer for which the sum of digits in base p is k. Then for all real number x, the sequence $(xu(n))_{n\geq 0}$ is equi-distributed modulo 1 if and only if x is a p-normal number.*

Let $p \geq 2$ be an integer. A sequence φ is called strongly p-additive if

$$\forall k \geq 0,\ a \geq 0 \text{ and } 0 \leq b < p^k,\ \varphi(ap^k + b) = \varphi(a) + \varphi(b).$$

In particular, we have $\varphi(0) = 0$. Then for every integer $n \geq 0$,

$$\varphi(n) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(n_j),$$

where $0 \leq n_j < p$ is the j-th digit in base p of n. It is clear that s_p is a strongly p-additive sequence.

For every natural integer $n \geq 0$ and every $\omega \in \mathbb{Z}_p \setminus \{-1, -2, \ldots, -n\}$, we verify easily that $(\omega + n)_j = \omega_j$ for every large j, where $(\omega + n)_j$ (resp. ω_j) is the j-th digit of the p-adic integer $\omega + n$ (resp. ω). Hence

$$\Delta_\varphi(\omega, n) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\varphi((\omega + n)_j) - \varphi(\omega_j) \Big),$$

is a finite sum.

Let $\omega \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_-$ where $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, \ldots\}$. The sequence $n \mapsto \Delta_\varphi(\omega, n)$ is called the ω-translated sequence of φ, denoted $\Delta_\varphi(\omega)$.

Theorem 4. *Let $\omega \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_-$ and φ be a strongly p-additive sequence with integer values. If $\omega \in \mathbb{Q}$, the sequence $(\Delta_\varphi(\omega, n) \bmod p)_{n \geq 0}$ is p-automatic.*

Conversely, we have the following result :

Theorem 5. *Let φ be a strongly p-additive sequence with integer values such that the mapping $\omega \mapsto \Delta_\varphi(\omega) \pmod p$ is one to one on $\mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_-$. Let $\omega \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_-$ be a p-adic integer such that the sequence $(\Delta_\varphi(\omega, n) \bmod p)_{n \geq 0}$ is p-automatic. Then $\omega \in \mathbb{Q}$.*

Corollary. *Let $\varphi = s_p$ be the sequence of sum of digits and let $\omega \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_-$. Then the sequence $(\Delta_\varphi(\omega, n) \bmod p)_{n \geq 0}$ is p-automatic if and only if $\omega \in \mathbb{Q}$.*

Let $u = (u(n))_{n \geq 0}$ be a bounded sequence. We suppose that for every integer $k \geq 0$, the following limit exists, called the k-th correlation coefficient of u,

$$\gamma_u(k) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u(n + k)\overline{u(n)}.$$

By a theorem of Bochner, there exists a unique positive measure ν on the torus $\mathbb{T}$ (the spectral measure) such that for every integer $k \geq 0$, we have

$$\gamma_u(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{2i\pi kx} d\nu(x).$$

Let $p \geq 2$ be an integer and φ be a real strongly p-additive sequence. Fix $\omega \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}_-$. For every integer $n \geq 0$, we define $U_\varphi^\omega(n) = e^{2i\pi \Delta_\varphi(\omega, n)}$. We show that the spectral measure Λ_φ of U_φ^ω is independent of ω.

We identify $\mathbb{T}$ to the interval $[0, 1[$. For all $x \in \mathbb{T}$, consider its p-adic expansion

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j p^{-j},$$

with $0 \leq x_j < p$ for all natural integer $j \geq 0$. Let k be an integer such that $0 \leq k < p$. Denote C_p^k the set of all x in $\mathbb{T}$ such that for every integer $j \geq 0$, we have $x_j \neq k$. We call C_p^k the generalized Cantor set. The triadic Cantor set corresponds to $p = 3$, $k = 1$.

Theorem 6. *Let $p \geq 2$ be an integer and φ be a real strongly p-additive sequence such that the spectral measure Λ_φ is continuous. Then for every integer q ($q \geq 2$), multiplicatively dependent of p and every integer k ($0 \leq k < q$), we have*

$$\Lambda_\varphi(C_q^k) = 0.$$

We also show the following result,

Corollary. *Let θ be a real number such that $\theta(p-1) \notin \mathbb{Z}$. Choose $\varphi = \theta s_p$. Then for every integer q $(q \geq 2)$ and every integer k $(0 \leq k < q)$, we have $\Lambda_\varphi(C_q^k) = 0$.*

BIBLIOGRAPHIE

1. J.- P. Allouche, *Automates finis en théorie des nombres*, Exposition. Math. **5** (1987), 239–266.
2. J.- P. Allouche et O. Salon, *Sous-suites polynomiales de certaines suites automatiques*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 111–121.
3. A. Cobham, *Uniform tag sequences*, Math. Systems Theory **6** (1972), 164–192.
4. J. Coquet et M. Mendès France, *Suites à spectre vide et suites pseudo-aléatoires*, Acta. Arith. **32** (1977), 99–106.
5. J. Coquet, T. Kamae et M. Mendès France, *Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **105** (1977), 369–384.
6. J. Coquet et P. Liardet, *A metric study involving independent sequences*, J. Analyse Math. **49** (1987), 15–53.
7. T. Kamae, *Cyclic extensions of odometer transformations and spectral disjointness*, Israel J. Math. **59** (1987), 41–63.
8. L. Kuipers et H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley, New York, 1974.
9. P. Liardet, *Répartition et ergodicité*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 19e année 1977/78. Théorie des nombres, Fasc. 1, Exp. No. 10, 12 pp., Secrétariat Math., Paris, 1978.
10. ______, *Propriétés harmoniques de la numération suivant Jean Coquet*, Colloque de Théorie Analytique des Nombres “Jean Coquet” (Marseille, 1985), 1–35; Publications Mathématiques d’Orsay, 88-02, Université de Paris-Sud, Orsay, 1988.
11. E. Lesigne, C. Mauduit et B. Mossé, *Le théorème ergodique le long d’une suite q-multiplicative*, Compositio Math. **93** (1994), 49–79.
12. K. Mahler, *On the translation properties of a simple class of arithmetical functions*, J. Math. and Phys. **6** (1927), 158–163.
13. M. Morse, *Recurrent geodesics on a surface of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **22** (1921), 84–100.
14. M. Queffélec, *Substitution dynamical systems—spectral analysis*, Lecture Notes in Math., vol. 1294, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
15. A. Thue, *Über unendliche Zeichenreihen*, Norske vid. Selsk. Skr. I. Mat. Nat. Kl., Christiana **7** (1906), 1–22.
16. P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.
17. A. Weil, *L’intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1953.

J.-Y. YAO
C/O MICHEL MENDÈS FRANCE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ BORDEAUX I
351, COURS DE LA LIBÉRATION
33405 TALENCE CEDEX
FRANCE
E-MAIL: yao@math.u-bordeaux.fr