Ann. Sci. Math. Québec **21** (1997), no. 2, 167–176.

HYPERBINOMIALES MULTIPLES

PIERRE THÉORÊT

RÉSUMÉ. On appelle hyperbinomiale une certaine classe d'équations aux différences partielles linéaires à coefficients polynomiaux avec valeurs initiales données. La solution d'une telle récurrence est unique, par contre il se peut qu'une double suite satisfasse plusieurs récurrences hyperbinomiales. Dans cet article on cherche à les déterminer.

ABSTRACT. We call hyperbinomial a class of linear partial difference equation with polynomial coefficients, initial values being given. A solution of a hyperbinomial recurrence is always unique but it is possible for a given sequence to be multiply defined by such equations. In this article we characterize such sequences.

Introduction. La récurrence aux valeurs initiales

$$\begin{aligned} &H(n,k) = a_{n,k}H(n-1,k) + b_{n,k}H(n-1,k-1), \quad (n>0),\\ &H(0,k) = \delta_{0,k}, \end{aligned}$$

de même que l'unique solution dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sont appelées *hyperbinomiales*. On note $\mathrm{HB}(a_{n,k}; b_{n,k})$ pour la récurrence et on écrit $H = \mathrm{HB}(a_{n,k}; b_{n,k})$ pour dire que H en est la solution. La récurrence est dite polynomiale si les coefficients $a_{n,k}$ et $b_{n,k}$ sont des polynômes en n et k et son *degré* est le nombre $d = \max(\deg a_{n,k}, \deg b_{n,k})$. Une récurrence hyperbinomiale telle que $d \le 1$ est dite *spéciale* de même que sa solution.

On appelle *multiple* une hyperbinomiale qui satisfait au moins deux récurrences hyperbinomiales à coefficients polynomiaux. Dans cet article, on cherche les hyperbinomiales à la fois multiples et spéciales.

L'étude des hyperbinomiales est motivée par le fait que plusieurs doubles suites classiques satisfont une récurrence de ce type: $\mathrm{HB}(1;1)$ pour les coefficients binomiaux, $\mathrm{HB}(n-1;1)$ et $\mathrm{HB}(k;1)$ pour les nombres de Stirling de première et de deuxième espèce, $\mathrm{HB}(k; n-k+1)$ pour les nombres eulériens, $\mathrm{HB}(q^k;1)$ pour les polynômes gaussiens. On retrouvera davantage d'exemples dans [4] et [5]. Dans [2] (problème 6.89) l'étude des hyperbinomiales spéciales est proposée comme problème de recherche. Dans [5] elles sont étudiées du point de vue de leurs fonctions génératrices et plusieurs formules de sommation faisant intervenir des hyperbinomiales non nécessairement spéciales se retrouvent dans [4].

Reçu le 19 août 1996 et, sous forme définitive, le 21 mars 1997.

©Association mathématique du Québec

1. Conséquences de la multiplicité. Dans la proposition suivante, on montre que, lorsqu'une hyperbinomiale est multiple, alors elle satisfait une infinité de récurrences hyperbinomiales. Ces récurrences sont toutes données en (4) et le terme général est exprimé sous forme close par (2).

Théorème 1. *Soit H une hyperbinomiale multiple telle que $H(n,k) \neq 0$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Alors*

a) *Il existe une unique fraction rationnelle $R_H(n,k)$ telle que*

$$kH(n-1,k) = (n-k)R_H(n,k)H(n-1,k-1); \tag{1}$$

b) *Le terme général de H est donné par*

$$H(n,k) = H(n,0)\binom{n}{k}M_H(n,k), \tag{2}$$

où

$$M_H(n,k) = \prod_{j=1}^{k} R_H(n+1,j). \tag{3}$$

c) *Si $R_H(n,k) = q_{n,k}/p_{n,k}$ avec $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$ des polynômes relativement premiers et si $H = \mathrm{HB}(a_{n,k}; b_{n,k})$, alors toutes les récurrences hyperbinomiales satisfaites par H sont données par*

$$\mathrm{HB}(a_{n,k} + kp_{n,k}x_{n,k}; b_{n,k} + (k-n)q_{n,k}x_{n,k}) \tag{4}$$

lorsque $x_{n,k}$ parcourt $\mathbb{R}[n,k]$.

Réciproquement, si une double suite H a son terme général donné par (2), alors elle est une hyperbinomiale multiple si, et seulement si H satisfait une récurrence hyperbinomiale, c'est-à-dire si l'équation

$$na_{n,0}p_{n,k}\frac{M(n,k)}{M(n-1,k-1)} = (n-k)a_{n,k}q_{n,k} + kb_{n,k}p_{n,k}, \quad (0 < k < n), \tag{5}$$

admet une solution avec $a_{n,k}$ et $b_{n,k}$ des polynômes tels que $a_{n,0}H(n-1,0) = H(n,0)$.

Preuve. a) Supposons que $H = \mathrm{HB}(r_{n,k}; s_{n,k}) = \mathrm{HB}(t_{n,k}; u_{n,k})$. En soustrayant l'une de l'autre les équations de récurrences on obtient

$$(r_{n,k} - t_{n,k})H(n-1,k) = (u_{n,k} - s_{n,k})H(n-1,k-1),$$

d'où l'existence de la fraction rationnelle $R_H(n,k)$. Si on suppose que $R'_H(n,k)$ est une autre fraction rationnelle satisfaisant (1), alors, puisque $H(n,k)$ est non nul pour $0 \leq k \leq n$, on a nécessairement $R_H(n,k) = R'_H(n,k)$.

b) De (1) on peut écrire

$$H(n,k) = \frac{n+1-k}{k}R_H(n+1,k)H(n,k-1),$$

ce qui a pour solution la formule (2).

c) De l'équation (1), on a, pour tout n et k,

$$0 = kp_{n,k}H(n-1,k) + (k-n)q_{n,k}H(n-1,k-1). \tag{6}$$

Ainsi, en multipliant (6) par $x_{n,k}$ et en additionnant à l'équation de récurrence correspondant à $\mathrm{HB}(a_{n,k}; b_{n,k})$ on montre que toutes les récurrences (4) sont satisfaites par H. Démontrons maintenant que toutes les récurrences hyperbinomiales satisfaites par H sont nécessairement de cette forme. En effet, si $H = \mathrm{HB}(c_{n,k}; d_{n,k})$, alors puisque

$$H(n,0) = \prod_{j=1}^{n} a_{j,0} = \prod_{j=1}^{n} c_{j,0},$$

$$H(n,n) = \prod_{j=1}^{n} b_{j,j} = \prod_{j=1}^{n} d_{j,j},$$

pour tout $n > 0$, on a $a_{n,0} = c_{n,0}$ et $b_{n,n} = d_{n,n}$ d'où

$$a_{n,k} - c_{n,k} = kp'_{n,k},$$

$$d_{n,k} - b_{n,k} = (n-k)q'_{n,k},$$

avec $p'_{n,k}$ et $q'_{n,k}$ des polynômes tels que $q'_{n,k}/p'_{n,k} = q_{n,k}/p_{n,k} = R_H(n,k)$. Or, puisque la fraction rationnelle $R_H(n,k)$ est unique et que $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$ sont des polynômes relativement premiers, alors il existe un polynôme $x_{n,k}$ tel que $q'_{n,k} = x_{n,k}q_{n,k}$, et $p'_{n,k} = x_{n,k}p_{n,k}$.

Lorsqu'une double suite a le terme général donné par (2), alors elle satisfait (6) et il suffit alors qu'elle satisfasse une récurrence hyperbinomiale pour être multiple. On obtient (5) en remplaçant (2) dans l'équation de récurrence $\mathrm{HB}(a_{n,k}; b_{n,k})$. $\square$

2. Quelques opérations. Dans cette section, on introduit des opérations qui permettent de réduire le nombre de cas à analyser pour résoudre l'équation (5).

On note $F \otimes H$, le produit de Hadamard, pour la double suite G telle que $G(n,k) = F(n,k)H(n,k)$ et on écrit $F = \mathrm{HG}(f_{n,k}; g_{n,k})$ pour la double suite F telle que

$$\begin{aligned} F(0,0) &= 1, \\ F(n,k) &= f_{n,k}F(n-1,k), \quad (n-k>0), \\ F(n,k) &= g_{n,k}F(n-1,k-1), \quad (k>0), \\ f_{n,k}g_{n-1,k} &= f_{n-1,k-1}g_{n,k}, \end{aligned}$$

avec $f_{n,k}$ et $g_{n,k}$ des polynômes en n et k, on dit alors que F est une double suite hypergéométrique. Par exemple,

$$F = \mathrm{HG}(f_{n-k}; g_k), \quad \text{si } F(n,k) = \prod_{j=1}^{n-k} f_j \prod_{i=1}^{k} g_i, \tag{7}$$

$$F = \mathrm{HG}(f_n; f_n), \quad \text{si } F(n,k) = \prod_{j=1}^{n} f_j. \tag{8}$$

En utilisant les définitions, on vérifie facilement la proposition suivante.

Proposition 2. *Soit H une hyperbinomiale multiple avec $R_H(n,k) = q_{n,k}/p_{n,k}$ et soit* $\mathrm{HB}(a_{n,k}; b_{n,k})$ *une récurrence particulière satisfaite par H. Si $G = F \otimes H$ avec $F = \mathrm{HG}(f_{n,k}; g_{n,k})$, alors G est une hyperbinomiale multiple avec*

$$G = \mathrm{HB}(f_{n,k}a_{n,k}; g_{n,k}b_{n,k}), \tag{9}$$

$$R_G(n,k) = \frac{q_{n,k}g_{n,k}}{p_{n,k}f_{n,k}}. \tag{10}$$

Si on note ρH pour la double suite de terme général $\rho H(n,k) = H(n-k,k)$, alors ρH est aussi une hyperbinomiale multiple avec

$$\rho H = \mathrm{HB}(b_{n,n-k}; a_{n,n-k}), \tag{11}$$

$$R_{\rho H}(n,k) = \frac{p_{n,n-k}}{q_{n,n-k}}. \tag{12}$$

On appelle ρ l'opérateur de réflexion.

3. Déduction des cas. La partie (4) du théorème 1 indique qu'une hyperbinomiale multiple satisfait une infinité de récurrences. La proposition qui suit détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'une hyperbinomiale satisfasse une infinité de récurrences spéciales.

Proposition 3. *Soit H une hyperbinomiale spéciale et multiple, avec $R_H(n,k) = q_{n,k}/p_{n,k}$, où $q_{n,k}$ et $p_{n,k}$ sont des polynômes relativement premiers, et soit $\mu = \max(\deg p_{n,k}, \deg q_{n,k})$.*

a) *Si $\mu \geq 1$, alors H satisfait une unique récurrence spéciale, aucune récurrence de tout les degrés d tels que $2 \leq d \leq \mu$, et une infinité de tous les degrés $d \geq \mu + 1$. Si $\mu = 0$, alors $R_H = \alpha$ est une constante et H satisfait une infinité de récurrences spéciales.*

b) *Soit $H = \mathrm{HB}(a_{nk}; b_{nk})$, H satisfait une infinité de récurrences spéciales si, et seulement si*

$$\frac{(k-n)a_{nk} + na_{n0}}{kb_{nk}} = \frac{1}{\alpha}, \text{ une constante,} \tag{13}$$

$$\deg a_{n0} \leq 1. \tag{14}$$

Lorsque (13) et (14) sont satisfaites, alors toutes les récurrences spéciales satisfaites par H sont données par

$$H = \mathrm{HB}(a_n + kx; \alpha a_n + (k-n)\alpha x) \tag{15}$$

lorsque x parcourt l'ensemble des nombres réels.

Preuve. a) Il suffit de remarquer que lorsque $\mathrm{HB}(a_{nk}; b_{nk})$ est spéciale alors le degré de (4) est $1 + \mu + \deg x_{nk}$.

b) Dans le cas où $R_H(n,k) = \alpha$ est une constante, on peut supposer sans perte de généralité que $q_{n,k} = \alpha$ et $p_{n,k} = 1$ et alors l'équation (5) se traduit par (13). Puisque

$(a_{n0}, \alpha a_{n0})$ en est une solution particulière, alors H satisfait toutes les récurrences (15) qui sont spéciales si, et seulement si (14) est vérifiée. □

Par exemple, en prenant $a_n = 1$ et $\alpha = 1$ dans (15), on obtient toutes les récurrences spéciales satisfaites par la double suite de coefficients binomiaux.

Remarquons que l'équation (13) est aussi une condition nécessaire et suffisante pour qu'une hyperbinomiale H soit multiple avec $R_H(n,k) = \alpha$.

Proposition 4.

a) *Soit H une hyperbinomiale spéciale et multiple satisfaisant une unique récurrence spéciale et au moins une récurrence de degré 2 et soit $R_H(n,k) = q_{n,k}/p_{n,k}$, avec $q_{n,k}$ et $p_{n,k}$ des polynômes relativement premiers. Alors, p_{nk} et q_{nk} sont des polynômes de degré 1 ou 0 et il existe deux entiers $\delta_p = \delta_p(H)$ et $\delta_q = \delta_q(H)$ tels que*

$$p_{nk} = \delta_p r_1 n + r_1 k + r_0, \tag{16}$$

$$q_{nk} = \delta_q s_1 n + s_1 k + s_0, \tag{17}$$

$$-2 \leq \delta_p \leq 0, \tag{18}$$

$$-1 \leq \delta_q \leq 1. \tag{19}$$

b) *Avec les hypothèses précédentes sur H et les résultats de la proposition 2, on a, par réflexion, $\delta_p(\rho H) = -1 - \delta_q(H)$ et $\delta_q(\rho H) = -1 - \delta_p(H)$.*

Preuve. a) Par la proposition 3a), il est nécessaire que $\mu \leq 1$ pour que H satisfasse une récurrence de degré 2. Pour que l'équation (5) admette des solutions polynomiales, il est nécessaire que $M(n,k)/M(n-1,k-1)$ soit une fraction rationnelle dont le degré ne dépende pas de k, si on pose $q_{n,k} = s_2 n + s_1 k + s_0$, $p_{n,k} = r_2 n + r_1 k + r_0$ et

$$Q(n,k) = \frac{\prod_{j=1}^{k} q_{n+1,j}}{\prod_{j=1}^{k-1} q_{n,j}}, \qquad P(n,k) = \frac{\prod_{j=1}^{k} p_{n+1,j}}{\prod_{j=1}^{k-1} p_{n,j}}, \tag{20}$$

alors $\dfrac{M(n,k)}{M(n-1,k-1)} = \dfrac{Q(n,k)}{P(n,k)}$, et l'équation (5) devient

$$\frac{Q(n,k)}{P(n,k)} = \frac{(n-k)a_{n,k}q_{n,k} + kb_{n,k}p_{n,k}}{na_{n,0}p_{n,k}}. \tag{21}$$

Pour simplifier $Q(n,k)$, on doit avoir $q_{n+1,\alpha} = q_{n,\beta}$ pour une paire d'indices (α, β), ce qui revient après simplification, à $s_2 = (\beta - \alpha)s_1$. Si on note $\delta_q = \beta - \alpha$, alors

$Q(n,k)$ se réduit à

$$Q(n,k)=\begin{cases}\dfrac{\displaystyle\prod_{j=0}^{\delta_q} q_{n+1,k-j}}{\displaystyle\prod_{j=1}^{\delta_q} q_{n,j}}, & \text{si } \delta_q \geq 0,\\[2ex] \dfrac{\displaystyle\prod_{j=1}^{-\delta_q} q_{n+1,j}}{\displaystyle\prod_{j=1}^{-\delta_q-1} q_{n,k-j}}, & \text{si } \delta_q < 0,\end{cases} \tag{22}$$

et on obtient un résultat analogue pour $P(n,k)$. On déduit les inégalités (18) et (19) en remarquant que le membre droit de (21) est le quotient de deux polynômes de degrés au plus égal à 3.

b) Il suffit de considérer l'équation (12). $\square$

Dans ce qui suit, la recherche des solutions spéciales de (21), avec p_{nk} et q_{nk} non tous deux constants est faite en regroupant les cas selon les valeurs de δ_p et δ_q. Pour chaque cas, on donnera d'abord une condition nécessaire et suffisante pour qu'une hyperbinomiale soit multiple avec les valeurs de $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$ données, on en déduira ensuite les solutions spéciales. On analyse d'abord le cas où l'un de $p_{n,k}$ ou $q_{n,k}$ est constant.

3.1. Cas où p_{nk} ou $q_{nk} = 1$. On considère d'abord les cas où $p_{nk} = 1$. Si $\delta_q = 0$, alors $q_{n,k} = s_1 k + s_0$, avec s_1 non nul, et $Q(n,k) = q_{n,k}$. Dans ce cas, l'équation (21) devient

$$b_{n,k} = q_{n,k}\left\{a_{n,k} + n\frac{a_{n,0} - a_{n,k}}{k}\right\} \tag{23}$$

et on obtient des solutions spéciales à la condition que $a_{n,k} = a_0$ une constante:

$$\begin{aligned}(a_{n,k}, b_{n,k}) &= (a_0, a_0\{s_1 k + s_0\}),\\ (p_{n,k}, q_{n,k}) &= (1, s_1 k + s_0).\end{aligned} \tag{24}$$

Si $\delta_q = -1$, alors $q_{n,k} = -s_1 n + s_1 k + s_0$ avec $s_1 \neq 0$. Dans ce cas l'équation (21) n'est pas commode mais les résultats de la section 2 simplifient les déductions. Soit $G = \mathrm{HB}(a_{n,k}; b_{n,k})$ une hyperbinomiale multiple telle que $R_G(n,k) = q_{n,k}$ et posons $H = G \otimes \mathrm{HG}(q_{n,k}; 1)$. En utilisant la proposition 2, on peut déduire que $H = \mathrm{HB}(a_{n,k}q_{n,k}; b_{n,k})$, $R_H(n,k) = 1$, et l'équation (23) donne alors

$$b_{n,k} = a_{n,k}q_{n,k} + n\frac{a_{n,0}q_{n,0} - a_{n,k}q_{n,k}}{k}. \tag{25}$$

Pour avoir des solutions spéciales on doit prendre $a_{n,k} = a_0$ une constante

$$
\begin{aligned}
(a_{n,k}, b_{n,k}) &= (a_0, a_0\{-2s_1 n + s_1 k + s_0\}), \\
(p_{n,k}, q_{n,k}) &= (1, -s_1 n + s_1 k + s_0).
\end{aligned} \tag{26}
$$

Si $\delta_q = 1$, alors $q_{n,k} = s_1 n + s_1 k + s_0$ avec $s_1 \neq 0$. Dans ce cas, l'équation (21) indique que $q_{n,k}$ divise $b_{n,k}$ et $q_{n,1}$ divise $a_{n,0}$ et on obtient les solutions spéciales

$$
\begin{aligned}
(a_{n,k}, b_{n,k}) &= (\gamma, 2\gamma s_1\{n + k - 1\}), \\
(p_{n,k}, q_{n,k}) &= (1, s_1\{n + k - 1\}),
\end{aligned} \tag{27}
$$

et en particulier avec $s_1 = 1$ et $\gamma = 1$, si $H = \mathrm{HB}(a_{n,k}, b_{n,k})$, alors $\sum_{k=0}^{n} H(n,k)t^k$ est le n^{e} polynôme de Bessel [3].

Par réflexion, on obtient les cas où $q_{nk} = 1$

$$
\begin{aligned}
(a_{n,k}, b_{n,k}) &= (a_0\{-s_1 n + s_1 k + s_0\}, a_0), \\
(p_{n,k}, q_{n,k}) &= (-s_1 n + s_1 k + s_0, 1),
\end{aligned} \tag{28}
$$

et en particulier avec $s_1 = 1$, $s_0 = -1$ et $a_0 = -1$ on retrouve $C(n, k, -1)$ les nombres-C [1]; on obtient aussi

$$
\begin{aligned}
(a_{n,k}, b_{n,k}) &= (a_0\{-s_1 n - s_1 k + s_0\}, a_0), \\
(p_{n,k}, q_{n,k}) &= (-s_1 k + s_0, 1),
\end{aligned} \tag{29}
$$

et en particulier avec $s_1 = 1$, $s_0 = \alpha$ et $a_0 = 1$, si $H = \mathrm{HB}(a_{n,k}, b_{n,k})$, alors $\sum_{k=0}^{n} H(n,k)t^k$ est le n^{e} polynôme de Laguerre d'ordre α [3]; finalement de (27) on obtient

$$
\begin{aligned}
(a_{n,k}, b_{n,k}) &= (2\gamma s_1\{2n - k - 1\}, \gamma), \\
(p_{n,k}, q_{n,k}) &= (s_1\{2n - k - 1\}, 1).
\end{aligned} \tag{30}
$$

3.2. Cas où $(\delta_p, \delta_q) = (0, 0)$ **ou** $(-1, -1)$**.** Si $(\delta_p, \delta_q) = (0, 0)$, alors $p_{n,k} = r_1 k + r_0$ et $q_{n,k} = s_1 k + s_0$ avec $r_1 s_1 \neq 0$. Soit $H = \mathrm{HB}(a_{n,k}; b_{n,k})$ une hyperbinomiale multiple telle que $R_H(n,k) = q_{n,k}/p_{n,k}$. Si on pose $G = H \otimes \mathrm{HG}(1; p_{n,k})$, alors la proposition 2 montre que G est une hyperbinomiale multiple telle que $R_G(n,k) = q_{n,k}$ et $G = \mathrm{HB}(a_{n,k}; p_{n,k} b_{n,k})$. Dans ce cas, l'équation (23) indique que l'on doit avoir

$$
p_{n,k} b_{n,k} = q_{n,k} \left\{ a_{n,k} + n \frac{a_{n,0} - a_{n,k}}{k} \right\}. \tag{31}
$$

Puisque l'on peut supposer que $p_{n,k}$ et $q_{n,k}$ sont relativement premiers, alors $q_{n,k}$ divise $b_{n,k}$ et on obtient ainsi les solutions spéciales

$$
\begin{aligned}
(a_{n,k}, b_{n,k}) &= (\gamma\{r_1 n + r_1 k + r_0\}, \gamma\{s_1 k + s_0\}), \\
(p_{n,k}, q_{n,k}) &= (r_1 k + r_0, s_1 k + s_0).
\end{aligned} \tag{32}
$$

Par réflexion de (32) on obtient le cas où $(\delta_p, \delta_q) = (-1, -1)$:

$$
\begin{aligned}
(a_{n,k}, b_{n,k}) &= (\gamma\{s_1 n - s_1 k + s_0\}, \gamma\{2r_1 n - r_1 k + r_0\}), \\
(p_{n,k}, q_{n,k}) &= (s_1 n - s_1 k + s_0, r_1 n - r_1 k + r_0).
\end{aligned} \tag{33}
$$

3.3. Cas où $(\delta_p, \delta_q) = (0, -1)$**.** On procède comme en 3.1. Soit $G = \mathrm{HB}(a_{n,k}; b_{n,k})$ une hyperbinomiale multiple telle que $R_G(n,k) = q_{n,k}/p_{n,k}$ et posons

$$H = G \otimes \mathrm{HG}(q_{n,k}; p_{n,k}).$$

La proposition 2 indique que $H = \mathrm{HB}(a_{n,k}q_{n,k}; b_{n,k}p_{n,k})$ avec $R_H(n,k) = 1$, et l'équation (23) devient

$$b_{n,k}p_{n,k} = a_{n,k}q_{n,k} + n\frac{a_{n,0}q_{n,0} - a_{n,k}q_{n,k}}{k}, \tag{34}$$

pour laquelle on trouve les solutions spéciales

$$\begin{aligned}(a_{n,k}, b_{n,k}) &= (a\{n + 2k + c\}, b\{3n - 2k - c\}),\\ (p_{n,k}, q_{n,k}) &= (2a\{k - n + c\}, b\{k - n - c\}),\end{aligned} \tag{35}$$

et en particulier, avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = -1$, on retrouve les nombres $B(n, k-1)$ de [1].

3.4. Cas où $(\delta_p, \delta_q) = (-1, 0)$**.** Dans ce cas, $p_{n,k} = r_1(k - n) + r_0$ et $q_{n,k} = s_1k + s_0$. Si on prend $B = \mathrm{HB}(1, 1)$, et $H = B \otimes \mathrm{HG}(p_{n,k}; q_{n,k})$, alors H est multiple avec $H = \mathrm{HB}(p_{n,k}; q_{n,k})$ et $R_H(n,k) = q_{n,k}/p_{n,k}$. En utilisant (21) on pourrait aussi montrer que ce sont là les seules solutions, soit

$$\begin{aligned}(a_{n,k}, b_{n,k}) &= (\gamma\{r_1(k - n) + r_0\}, \gamma\{s_1k + s_0\}),\\ (p_{n,k}, q_{n,k}) &= (r_1(k - n) + r_0, s_1k + s_0).\end{aligned} \tag{36}$$

3.5. Cas où $(\delta_p, \delta_q) = (0, 1)$ **ou** $(-2, -1)$**.** Lorsque $(\delta_p, \delta_q) = (0, 1)$ on obtient comme précédemment les solutions spéciales

$$\begin{aligned}(a_{n,k}, b_{n,k}) &= (\gamma\{r_1(n + 2k) + r_0\}, 2\gamma s_1\{n + k - 1\}),\\ (p_{n,k}, q_{n,k}) &= (r_1k + r_0, s_1\{n + k - 1\}),\end{aligned} \tag{37}$$

et par réflexion pour $(\delta_p, \delta_q) = (-2, -1)$ on a

$$\begin{aligned}(a_{n,k}, b_{n,k}) &= (2\gamma s_1\{2n - k - 1\}, \gamma\{r_1(3n - 2k) + r_0\}),\\ (p_{n,k}, q_{n,k}) &= (s_1\{2n - k - 1\}, r_1(n - k) + r_0).\end{aligned} \tag{38}$$

On peut vérifier qu'il n'y a pas de solutions spéciales lorsque $(\delta_p, \delta_q) = (-1, 1)$ ou $(-2, 1)$.

4. Conclusion. Dans la section 2 on a supposé que les hyperbinomiales multiples cherchées étaient telles que $H(n,k) \neq 0$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Dans la section 3 il faut donc s'assurer que les polynômes considérés ne prennent pas de valeurs nulles bien que plusieurs des résultats ici pourraient être prolongés pour ceux-ci.

Remarquons que l'on ne considère ici que les hyperbinomiales spéciales et multiples satisfaisant aussi des récurrences de degré 2. On devrait arriver à démontrer que cela est toujours le cas en vérifiant qu'autrement l'équation (21) ne pourrait admettre de solutions spéciales.

Dans un article ultérieur, on envisage de prolonger les résultats pour les hyperbinomiales multiples dont le degré de la fraction rationnelle $R_H(n,k)$ est supérieur à 1 et aussi, en utilisant les résultats de [4] et [5], ajouter certaines familles d'hyperbinomiales pour lesquelles on peut disposer de fonctions génératrices et de formules de sommation intéressantes.

English extended abstract. We say that the difference equation with initial values

$$\begin{aligned} &H(n,k) = a_{n,k}H(n-1,k) + b_{n,k}H(n-1,k-1), \quad (n>0),\\ &H(0,k) = \delta_{0,k}, \end{aligned}$$

and the unique solution in $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ are hyperbinomials. A double sequence is *multiple* if it satisfies two hyperbinomial recurrences with polynomial coefficients. If the coefficients $a_{n,k}$ and $b_{n,k}$ are constant or first degree polynomials, then the hyperbinomial is said to be *special*. In this article, we search for double sequences that are special and multiple.

In Theorem 1, we show that for each multiple hyperbinomial H, there exists unique rational function $R_H(n,k) = q_{n,k}/p_{n,k}$ with $p_{n,k}$ and $q_{n,k}$ relatively prime polynomials such that

$$kH(n-1,k) = (n-k)R_H(n,k)H(n-1,k-1),$$

that the solution is then

$$H(n,k) = H(n,0)\binom{n}{k}M_H(n,k),$$

where

$$M_H(n,k) = \prod_{j=1}^{k} R_H(n+1,j),$$

and that all the hyperbinomial difference equations with polynomial coefficients satisfied by H are given by

$$\mathrm{HB}(a_{n,k} + kp_{n,k}x_{n,k}; b_{n,k} + (k-n)q_{n,k}x_{n,k})$$

for $x_{n,k}$ any polynomial and $H = \mathrm{HB}(a_{n,k}; b_{n,k})$.

If $p_{n,k}$ and $q_{n,k}$ are given, then to find a multiple special hyperbinomial sequence H with $R_H(n,k) = q_{n,k}/p_{n,k}$, we have to solve

$$na_{n,0}p_{n,k}\frac{M(n,k)}{M(n-1,k-1)} = (n-k)a_{n,k}q_{n,k} + kb_{n,k}p_{n,k}, \quad (0<k<n),$$

for $a_{n,k}$ and $b_{n,k}$ first degree unknown polynomials. For this to be possible, as shown by Proposition 4, we have to take $p_{n,k}$ and $q_{n,k}$ constant or first degree relatively prime polynomials

$$\begin{aligned} p_{n,k} &= r_2 n + r_1 k + r_0,\\ q_{n,k} &= s_2 n + s_1 k + s_0, \end{aligned}$$

with $s_2 = \delta_q s_1$, $r_2 = \delta_p r_1$, where δ_q and δ_p are integers such that $-2 \leq \delta_p \leq 0$ and $-1 \leq \delta_q \leq 1$.

In the third section, with the help of some transformations given by Proposition 2, we calculate the special solutions $(a_{n,k}; b_{n,k})$ for all the possible pairs $(p_{n,k}; q_{n,k})$. These solutions are explicitely given by Proposition 3 and equations (24), (26), (27), (29), (30), (32), (33), (35), (36), (37), (38). As particular cases, we find binomial coefficients, Bessel and Laguerre polynomials and some special double sequences used in [1].

BIBLIOGRAPHIE

1. L. Carlitz, *Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers*, Utilitas Math. **15** (1979), 51–88.
2. R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
3. S. Roman, *The Umbral Calculus*, Academic Press, New York, 1984.
4. P. Théorêt, *Relations matricielles pour hyperbinomiales*, Ann. Sci. Math. Québec **19** (1995), 197–212.
5. P. Théorêt, *Fonctions génératrices pour une classe d'équations aux différences partielles*, Ann. Sci. Math. Québec **19** (1995), 91–105.

P. Théorêt
Université des Sciences et Techniques de Masuku
B. P. 911, Franceville
Gabon