Ann. Sci. Math. Québec **21** (1997), no. 2, 147–166.

LA CATÉGORIE DE ZARISKI DES ANNEAUX RATIONNELS

LAURENCE NISON

RÉSUMÉ. La catégorie des anneaux rationnels est une nouvelle catégorie d'algèbres commutatives bien adaptée à l'étude des ensembles et variétés algébriques rationnels affines. C'est une catégorie de Zariski dont l'objet initial $\mathbb{Q}$ est simple et algébriquement clos. La catégorie des anneaux rationnels finiment engendrés est dualement équivalente à la catégorie des ensembles algébriques rationnels affines. Les anneaux rationnels (resp. intègres, corps) finiment engendrés sont exactement les anneaux isomorphes aux anneaux des fonctions rationnelles partout (resp. partout, partiellement) définies sur les ensembles (resp. variétés, variétés) algébriques rationnels affines.

ABSTRACT. The category of rational rings is a new category of commutative algebras well adapted to the study of affine rational algebraic sets and varieties. It is a Zariski category in which the initial object $\mathbb{Q}$ is simple and algebraically closed. The category of finitely generated rational rings is dually equivalent to the category of affine rational algebraic sets. Finitely generated rational rings (resp. integral rings, fields) are exactly the rings isomorphic to the rings of rational functions everywhere (resp. everywhere, partially) defined on affine rational algebraic sets (resp. varieties, varieties).

Introduction. Nous introduisons une nouvelle catégorie d'algèbres commutatives bien adaptée à l'étude des variétés algébriques rationnelles affines et des ensembles algébriques rationnels affines. Classiquement, on utilise la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres commutatives pour définir et étudier les variétés algébriques rationnelles. Ainsi la droite affine sur $\mathbb{Q}$ est définie comme étant le schéma affine spectre de l'anneau $\mathbb{Q}[X]$. Cette définition nous semble incorrecte car Spec$(\mathbb{Q}[X])$ contient de nombreux points fermés irrationnels et il existe des applications géométriquement constructibles de la droite affine sur $\mathbb{Q}$ dans elle-même qui ne correspondent à aucun endomorphisme du schéma Spec$(\mathbb{Q}[X])$. Nous pensons que la structure de $\mathbb{Q}$-algèbre ne permet pas de décrire correctement la droite rationnelle ni les variétés algébriques rationnelles. Nous allons remplacer l'algèbre $\mathbb{Q}[X]$ par une algèbre mieux adaptée notée $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ et, d'une façon plus générale, toutes les $\mathbb{Q}$-algèbres par des $\mathbb{Q}$-algèbres particulières appelées anneaux rationnels. Nous allons donc remplacer la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres commutatives par la catégorie des anneaux rationnels.

Reçu le 25 septembre 1995 et, sous forme définitive, le 5 mars 1997.

Un anneau rationnel est un anneau commutatif unitaire A dans lequel sont vérifiées toutes les implications entre identités algébriques valides dans $\mathbb{Q}$ et sont inversibles les éléments $P(x_1,\ldots,x_n)$ où $(x_1,\ldots,x_n)\in A^n$ et P est un polynôme de $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ ne s'annulant pas dans $\mathbb{Q}^n$. On définit les idéaux rationnels et les parties multiplicatives rationnelles pour obtenir les anneaux rationnels quotients, les spectres rationnels et les anneaux rationnels de fractions. On montre que la catégorie $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ des anneaux rationnels est une catégorie de Zariski [2] dont l'objet initial $\mathbb{Q}$ est un objet simple algébriquement clos. On montre en plus que c'est une catégorie de Zariski rationnelle réduite, ce qui permet d'appliquer aux anneaux rationnels la théorie des ultraschémas, des espaces algébriques et des variétés algébriques développée pour toute catégorie de Zariski rationnelle réduite [2]. Ainsi, on montre que la catégorie des anneaux rationnels finiment engendrés est dualement équivalente à la catégorie des ensembles algébriques rationnels affines. On en déduit que les anneaux rationnels finiment engendrés (resp. et intègres) sont exactement les anneaux isomorphes aux anneaux des fonctions rationnelles partout définies sur les ensembles (resp. variétés) algébriques rationnels affines, et que les corps rationnels finiment engendrés sont exactement les corps isomorphes aux corps des fonctions rationnelles partiellement définies sur les variétés algébriques rationnelles affines.

1. Anneaux rationnels. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note :

(1) $\mathcal{P}_0^n=\{(P,Q)\in\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]^2 : \forall\,(q_1,\ldots,q_n)\in\mathbb{Q}^n,(P(q_1,\ldots,q_n)=0\Rightarrow Q(q_1,\ldots,q_n)=0)\}$ et $\mathcal{P}_0=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_0^n$.

(2) $\mathcal{P}_1^n=\{P\in\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n] : \forall\,(q_1,\ldots,q_n)\in\mathbb{Q}^n, P(q_1,\ldots,q_n)\neq 0\}$ et $\mathcal{P}_1=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_1^n$.

1.1. Définition. Un anneau commutatif unitaire A est *rationnel* si pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

(R_0) $\forall\,(P,Q)\in\mathcal{P}_0^n,\forall\,(x_1,\ldots,x_n)\in A^n,\ (P(x_1,\ldots,x_n)=0\Rightarrow Q(x_1,\ldots,x_n)=0)$.

(R_1) $\forall\,P\in\mathcal{P}_1^n,\forall\,(x_1,\ldots,x_n)\in A^n,\ P(x_1,\ldots,x_n)$ est inversible dans A.

La *catégorie* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *des anneaux rationnels* est la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathbb{A}\mathrm{nc}$ des anneaux commutatifs unitaires dont les objets sont les anneaux rationnels.

1.2. Exemples.

1.2.1. Les corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(X_1,\ldots,X_n)$ sont des anneaux rationnels.

1.2.2. L'anneau $\mathbb{Q}\langle X_1,\ldots,X_n\rangle=\left\{\frac{P(X_1,\ldots,X_n)}{Q(X_1,\ldots,X_n)} : P\in\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n],\ Q\in\mathcal{P}_1^n\right\}$ est rationnel.

1.2.3. Pour toute partie X de $\mathbb{Q}^n$, l'ensemble $R(X)=\{u : X\to\mathbb{Q} : \exists\,(P,Q)\in\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]^2,\ \forall\,x\in X,\ Q(x)\neq 0$ et $u(x)=P(x)/Q(x)\}$ des fonctions rationnelles partout définies sur X est un anneau rationnel.

1.2.4. Les anneaux $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}[\varepsilon]=\mathbb{Q}[X]/(X^2)$ ne sont pas rationnels.

1.3. Notation. Pour tout polynôme $P\in\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$, on pose

$$HP(T_1,\ldots,T_n,X_1,\ldots,X_n)=\prod_{i=1}^{n}T_i^{\deg_{X_i}(P)}P\left(\frac{X_1}{T_1},\ldots,\frac{X_n}{T_n}\right)$$

et

$$P_h(X_0, X_1, \ldots, X_n) = X_0^{\deg(P)} P\left(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}\right).$$

1.4. Lemme. *Soit* $(n, m) \in \mathbb{N}^2$.

a) $1 + X_1^2 + \cdots + X_n^2 \in \mathcal{P}_1$.

b) $((X_1^2 + \cdots + X_n^2)X_{n+1}, X_1 X_{n+1}) \in \mathcal{P}_0$.

c) $(P, Q) \in \mathcal{P}_0^n \Rightarrow$

$$(X_{n+1} P_h(X_0, X_1, \ldots, X_n), X_{n+1} X_0 Q_h(X_0, X_1, \ldots, X_n)) \in \mathcal{P}_0.$$

d) $P \in \mathcal{P}_1^n \Rightarrow$

$$(HP(X_{n+1}, \ldots, X_{2n}, X_1, \ldots, X_n) X_{2n+1}, X_{n+1} \ldots X_{2n+1} P(X_1, \ldots, X_n)) \in \mathcal{P}_0.$$

e) $\forall\, P \in \mathcal{P}_1^n,\ \forall\, Q \in \mathcal{P}_1^m,\ P_h(Q(X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}), X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{P}_1$.

f) *Pour tout anneau rationnel A, tous éléments* $a_1, \ldots, a_n$ *inversibles de A, on a :*

$$\forall\, P \in \mathcal{P}_1^n,\ \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in A^n, HP(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_n) \text{ est inversible dans } A.$$

Preuve. Soit $(q_0, q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{2n}, q_{2n+1}) \in \mathbb{Q}^{2n+2}$.

a) et b) découlent du fait que $\mathbb{Q}$ est un corps réel.

c) Supposons $q_{n+1} P_h(q_0, q_1, \ldots, q_n) = 0$.

Si $q_0 \neq 0 \neq q_{n+1}$, alors $q_{n+1} q_0^{\deg(P)} P\left(\frac{q_1}{q_0}, \ldots, \frac{q_n}{q_0}\right) = 0$, donc $P\left(\frac{q_1}{q_0}, \ldots, \frac{q_n}{q_0}\right) = 0$. Puisque $(P, Q) \in \mathcal{P}_0^n$, on a $Q\left(\frac{q_1}{q_0}, \ldots, \frac{q_n}{q_0}\right) = 0$, donc $Q_h(q_0, q_1, \ldots, q_n) = q_0^{\deg(Q)} Q\left(\frac{q_1}{q_0}, \ldots, \frac{q_n}{q_0}\right) = 0$.

d) Supposons $HP(q_{n+1}, \ldots, q_{2n}, q_1, \ldots, q_n) q_{2n+1} = 0$. Si pour tout $i \in [n+1, 2n]$ on a $q_i \neq 0$, alors

$$\prod_{i=1}^{n} q_{n+i}^{\deg_{X_i}(P)} P\left(\frac{q_1}{q_{n+1}}, \ldots, \frac{q_n}{q_{2n}}\right) q_{2n+1} = HP(q_{n+1}, \ldots, q_{2n}, q_1, \ldots, q_n) q_{2n+1} = 0.$$

Comme $P \in \mathcal{P}_1$, on a $q_{2n+1} = 0$.

e) Soit $(q_{n+1}, \ldots, q_{n+m}) \in \mathbb{Q}^m$. On a

$$P_h(Q(q_{n+1}, \ldots, q_{n+m}), q_1, \ldots, q_n) =$$

$$Q(q_{n+1}, \ldots, q_{n+m})^{\deg(P)} \times P\left(\frac{q_1}{Q(q_{n+1}, \ldots, q_{n+m})}, \ldots, \frac{q_n}{Q(q_{n+1}, \ldots, q_{n+m})}\right) \neq 0.$$

f) On a $HP(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\deg_{X_i}(P)} P\left(\frac{x_1}{a_1}, \ldots, \frac{x_n}{a_n}\right)$ inversible dans A. $\square$

1.5. Proposition. *Le corps $\mathbb{Q}$ est objet initial et $\{0\}$ est objet final strict de* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$*.*

Preuve. Soit A un anneau rationnel et $f : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ le morphisme d'anneaux défini par $f(p) = p1$. Puisque A vérifie (R_1), il existe un unique morphisme $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}[(\mathbb{Z}^*)^{-1}] \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Par suite, $\mathbb{Q}$ est objet initial de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Puisqu'il existe un unique morphisme $A \longrightarrow \{0\}$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$, l'anneau rationnel $\{0\}$ est objet final de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. En outre, $\{0\}$ est strict car pour tout morphisme $g : \{0\} \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$, on a $0 = g(0) = g(1) = 1$, donc $A = \{0\}$. $\square$

1.6. Proposition. *Soit A un anneau rationnel.*

1) *Un sous-anneau B de A est rationnel si et seulement si :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, P \in \mathcal{P}_1^n,\ \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in B^n,\ P(x_1, \ldots, x_n)^{-1} \in B.$$

2) *Le sous-anneau rationnel engendré par une partie X de A est $[X]_{ra} =$*

$$\left\{ \frac{P(x_1, \ldots, x_n)}{Q(x_1, \ldots, x_n)} : n \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n], Q \in \mathcal{P}_1^n, (x_1, \ldots, x_n) \in X^n \right\}.$$

Preuve. 1) Immédiate.

2) Montrons que le sous-anneau $[X]_{ra}$ de A est rationnel.

Soit $P \in \mathcal{P}_1^n$ et $a_1, \ldots, a_n \in [X]_{ra}$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in [1, n]$, il existe $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X^m$, $P_i \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_m]$, $Q \in \mathcal{P}_1^m$ tels que $a_i = P_i(x)/Q(x)$. On a

$$P(a_1, \ldots, a_n) = P\left(\frac{P_1(x)}{Q(x)}, \ldots, \frac{P_n(x)}{Q(x)}\right) = \frac{P_h(Q(x), P_1(x), \ldots, P_n(x))}{Q(x)^{\deg(P)}}.$$

Puisque $P, Q \in \mathcal{P}_1$, on a $P_h(Q, P_1, \ldots, P_n) \in \mathcal{P}_1$ (lemme 1.4 (e)), donc

$$(P(a_1, \ldots, a_n))^{-1} = \frac{Q(x)^{\deg(P)}}{P_h(Q(x), P_1(x), \ldots, P_n(x))} \in [X]_{ra}.$$

D'après 1), il suit que $[X]_{ra}$ est rationnel. En outre, $[X]_{ra}$ contient X. Si B est un sous-anneau rationnel de A contenant X, alors pour tout $x = \dfrac{P(x_1, \ldots, x_n)}{Q(x_1, \ldots, x_n)} \in [X]_{ra}$, on a $P(x_1, \ldots, x_n) \in B$ et $Q(x_1, \ldots, x_n)^{-1} \in B$, donc $x \in B$ et $[X]_{ra} \subset B$. $\square$

2. Idéaux rationnels. Soit A un anneau.

2.1. Définition. Un idéal I de A est *rationnel* si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, (P, Q) \in \mathcal{P}_0^n,\ \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in A^n,$$
$$(P(x_1, \ldots, x_n) \in I \Rightarrow Q(x_1, \ldots, x_n) \in I).$$

2.2. Proposition. *Pour tout idéal I de A, on a :*

(1) *I est rationnel $\Leftrightarrow$ A/I vérifie (R_0).*
(2) *Si A est un anneau rationnel, alors l'anneau A/I est rationnel si et seulement si I est rationnel.*

Preuve. 1) On a les équivalences :

$$A/I \text{ vérifie } (R_0) \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\,(P,Q) \in \mathcal{P}_0^n, \forall (x_1,\ldots,x_n) \in A^n, \quad (\overline{P(x_1,\ldots,x_n)} = \overline{0} \Longrightarrow \overline{Q(x_1,\ldots,x_n)} = \overline{0})$$

$$\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\,(P,Q) \in \mathcal{P}_0^n, \forall\,(x_1,\ldots,x_n) \in A^n, \quad (P(x_1,\ldots,x_n) \in I \Longrightarrow Q(x_1,\ldots,x_n) \in I)$$

$$\Leftrightarrow I \text{ est rationnel.}$$

2) Supposons que A soit un anneau rationnel et I un idéal rationnel de A. Alors A/I vérifie l'axiome (R_0) et, pour tout $P \in \mathcal{P}_1^n$ et $(x_1,\ldots,x_n) \in A^n$, l'élément $P(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n) = \overline{P(x_1,\ldots,x_n)}$ est inversible dans A/I. Donc A/I est un anneau rationnel. □

2.3. Proposition. *1) L'image réciproque d'un idéal rationnel par un morphisme d'anneaux $f : A \to B$ est un idéal rationnel. En particulier si B est un anneau rationnel,* $\ker(f)$ *est un idéal rationnel de A.*

2) L'intersection d'une famille d'idéaux rationnels de A est un idéal rationnel.

Preuve. 1) Soit I un idéal rationnel de B. Considérons $(P,Q) \in \mathcal{P}_0^n$ et $(x_1,\ldots,x_n) \in A^n$ tels que $P(x_1,\ldots,x_n) \in f^{-1}(I)$. Alors $P(f(x_1),\ldots,f(x_n)) = f(P(x_1,\ldots,x_n)) \in I$, donc $Q(f(x_1),\ldots,f(x_n)) \in I$. Par suite $Q(x_1,\ldots,x_n) \in f^{-1}(I)$. En particulier si B est un anneau rationnel, l'idéal nul de B et $\ker(f)$ sont rationnels.

2) Immédiate. □

2.4. Définition. Pour tout idéal I de A, l'*enveloppe rationnelle* de I est l'idéal noté ${}^{rat}I$, intersection des idéaux rationnels de A contenant I.

2.5. Proposition. *Tout idéal rationnel finiment engendré de A est de la forme ${}^{rat}(x)$.*

Preuve. Un tel idéal I est de la forme $I = {}^{rat}(x_1,\ldots,x_n)$. Posons $x = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Comme I contient x, on a ${}^{rat}(x) \subset I$. En outre, on a $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset {}^{rat}(x)$ (lemme 1.4 (b)). Par suite $I \subset {}^{rat}(x)$ et $I = {}^{rat}(x)$. □

2.6. Notation. Un idéal de A de la forme ${}^{rat}(x)$ est dit *rationnellement principal*.

2.7. Proposition. *Pour tout couple de morphismes $(g,h) : A \rightrightarrows B$ de* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$, *le coégalisateur de (g,h) est le morphisme canonique $q_I : B \to B/{}^{rat}I$ où I est l'idéal de B engendré par $\{g(x) - h(x) : x \in A\}$.*

Preuve. D'après la proposition 2.2(2), q_I est un morphisme de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ coégalisant (g,h). Le noyau d'un morphisme $f : B \to C$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ qui coégalise (g,h) est un idéal rationnel de B contenant I (proposition 2.3), donc contenant ${}^{rat}I$, et par suite il existe un unique morphisme $\overline{f} : B/{}^{rat}I \to C$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ tel que $\overline{f} q_I = f$. □

Soit A un anneau rationnel et I un idéal rationnel de A.

2.8. Proposition. *Le couple noyau d'un morphisme $f : A \to B$ de* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *est le sous-anneau rationnel $R = \{(x, y) \in A^2 : f(x) = f(y)\}$ muni des projections.*

Preuve. Le couple $(r_1, r_2) : R \rightrightarrows A$ des projections est le produit fibré de (f, f) dans $\mathbb{A}\mathrm{nc}$, donc dans $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ car c'est une sous-catégorie pleine réflexive de $\mathbb{A}\mathrm{nc}$ (théorème 3.5 plus bas). $\square$

2.9. Proposition. *La relation $\sim$ sur A définie par : $\forall\,(x, y) \in A^2, x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I$ est une congruence sur A.*

Preuve. C'est le couple noyau du morphisme $q_I : A \to A/I$ car $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I \Leftrightarrow q_I(x - y) = 0 \Leftrightarrow q_I(x) = q_I(y)$ (proposition 2.8). $\square$

2.10. Définition. La *congruence modulo I sur A*, notée $\mathrm{mod}(I)$, est la congruence définie par : $\forall\,(x, y) \in A^2,\ x \sim y \Leftrightarrow x - y \in I$.

2.11. Proposition. *Toute congruence sur A est de façon unique la congruence modulo un idéal rationnel I de A, et le quotient de A par la congruence modulo I est le morphisme canonique $q_I : A \to A/I$.*

Preuve. Toute congruence R sur A est le couple noyau d'un morphisme $f : A \to B$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Si $I = \ker(f)$, on a $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x - y \in I \Leftrightarrow x \sim y(\mathrm{mod}(I))$. Par suite $R = \mathrm{mod}(I)$ et le quotient est $q_I : A \to A/I$ (proposition 2.7). $\square$

2.12. Proposition. *Pour tout morphisme $f : A \to B$ de* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *et tout $a \in A$, on a ${}^{rat}(f({}^{rat}(a))) = {}^{rat}(f(a))$.*

Preuve. Puisque $(a) \subset {}^{rat}(a)$, on a $f((a)) \subset f({}^{rat}(a))$ et ${}^{rat}(f((a))) \subset {}^{rat}(f({}^{rat}(a)))$. Comme $f(a) \subset {}^{rat}(f(a))$, on a $(a) \subset f^{-1}({}^{rat}(f(a)))$. Alors ${}^{rat}(a) \subset f^{-1}({}^{rat}(f(a)))$ (proposition 2.3). Par suite, $f({}^{rat}(a)) \subset {}^{rat}(f(a))$ et donc ${}^{rat}(f({}^{rat}(a))) \subset {}^{rat}(f(a))$. Il suit l'égalité ${}^{rat}(f({}^{rat}(a))) = {}^{rat}(f(a))$. $\square$

2.13. Proposition. *Dans la catégorie* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$*, les épimorphismes réguliers sont exactement les morphismes surjectifs.*

Preuve. Soit $f : A \to B$ un épimorphisme régulier de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Puisque f est un coégalisateur, f est isomorphe à un morphisme $q_I : A \to A/I$ où I est un idéal rationnel de A (proposition 2.7). Comme q_I est surjectif, f est un morphisme surjectif. Réciproquement si $f : A \to B$ est un morphisme surjectif de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$, l'anneau rationnel $A/\ker(f)$ est isomorphe à B et $f \simeq q_{\ker(f)}$ est un épimorphisme régulier. $\square$

3. Parties multiplicatives rationnelles. Soit A un anneau.

3.1. Définition. Une partie multiplicative S de A est *rationnelle* si :

$$\forall\, s \in S,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, P \in \mathcal{P}_1^n, \forall\,(x_1, \ldots, x_n) \in A^n,\ P_h(s, x_1, \ldots, x_n) \in S.$$

3.2. Proposition. *1) Si S est une partie multiplicative de A et si A vérifie l'axiome (R_0), $A[S^{-1}]$ vérifie (R_0).*

2) Si S est une partie multiplicative rationnelle, $A[S^{-1}]$ vérifie (R_1).

3) Si A est un anneau rationnel et S une partie multiplicative rationnelle de A, $A[S^{-1}]$ est un anneau rationnel.

4) L'intersection d'une famille de parties multiplicatives rationnelles de A est une partie multiplicative rationnelle.

Preuve. 1) Soit $(P,Q) \in \mathcal{P}_0^n$ et $\left(\frac{x_1}{s}, \ldots, \frac{x_n}{s}\right) \in A[S^{-1}]^n$ tels que $P\left(\frac{x_1}{s}, \ldots, \frac{x_n}{s}\right) = \frac{0}{1}$. Alors $P_h\left(\frac{s}{1}, \frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_n}{1}\right) = \frac{0}{1}$, donc il existe $t \in S$ tel que $tP_h(s, x_1, \ldots, x_n) = 0$. D'après le lemme 1.4 (c), on a $tsQ_h(s, x_1, \ldots, x_n) = 0$, donc $ts^{\deg(Q)+1}Q\left(\frac{x_1}{s}, \ldots, \frac{x_n}{s}\right) = 0$ et $Q\left(\frac{x_1}{s}, \ldots, \frac{x_n}{s}\right) = \frac{0}{1}$.

2) Si $P \in \mathcal{P}_1^n$ et $(\frac{x_1}{s}, \ldots, \frac{x_n}{s}) \in A[S^{-1}]^n$, l'élément $\frac{P_h(s,x_1,\ldots,x_n)}{1}$ est inversible dans $A[S^{-1}]$, donc l'élément $P\left(\frac{x_1}{s}, \ldots, \frac{x_n}{s}\right) = \dfrac{1}{s^{\deg(P)}} P_h(s, x_1, \ldots, x_n)$ est inversible dans $A[S^{-1}]$.

3) Découle de 1) et 2).

4) Immédiate. $\square$

3.3. Définition. Pour toute partie multiplicative S de A, *l'enveloppe rationnelle* de S, notée S^{rat}, est la partie multiplicative intersection des parties multiplicatives rationnelles saturées de A contenant S.

3.4. Proposition.

$$S^{rat} = \{t \in A : \exists\, P \in \mathcal{P}_1^n, \exists\, (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in A^{n+1},\ \exists\, (t_1, \ldots, t_n) \in S^n,$$
$$x_0 t = HP(t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n)\}$$

Preuve. Notons E le second membre de l'égalité.

Soit $t \in E$, $P \in \mathcal{P}_1^n$, $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in A^{n+1}$, $(t_1, \ldots, t_n) \in S^n$ tels que $x_0 t = HP(t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n)$. Soit $r \in E$, $Q \in \mathcal{P}_1^m$, $(y_0, y_1, \ldots, y_m) \in A^{m+1}$, $(r_1, \ldots, r_m) \in S^m$ tels que $y_0 r = HQ(r_1, \ldots, r_m, y_1, \ldots, y_m)$. Le polynôme

$$R(X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}) = P(X_1, \ldots, X_n)Q(X_{n+1}, \ldots, X_{n+m}) \in \mathcal{P}_1^{n+m}$$

est tel que
$$\begin{aligned} x_0 y_0 t r &= (x_0 t)(y_0 r) \\ &= HP(t_1, \ldots, t_n, x_1, \ldots, x_n) HQ(r_1, \ldots, r_m, y_1, \ldots, y_m) \\ &= HR(t_1, \ldots, t_n, r_1, \ldots, r_m, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m), \end{aligned}$$

donc $tr \in E$. Par suite E est une partie multiplicative de A. Elle est saturée et contient S car pour tout $s \in S$, on a $s^2 = HR(s, 0)$ avec $R = 1 + X^2 \in \mathcal{P}_1$ (lemme 1.4 (a)). Montrons que E est rationnelle. Soit $Q \in \mathcal{P}_1^m$ et $(y_1, \ldots, y_m) \in A^m$. D'après le lemme 1.4 (e), le polynôme $R(X_1, \ldots, X_{m+n}) = Q_h(P(X_{m+1}, \ldots, X_{m+n}), X_1, \ldots, X_m) \in \mathcal{P}_1$ est tel que

$$HR(T_1, \ldots, T_{m+n}, X_1, \ldots, X_{m+n}) = \prod_{i=1}^{m+n} T_i^{\deg_{X_i}(R)} \times R\left(\frac{X_1}{T_1}, \ldots, \frac{X_{m+n}}{T_{m+n}}\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{m+n} T_i^{\deg_{X_i}(R)} \times Q_h\left(P\left(\frac{X_{m+1}}{T_{m+1}}, \ldots, \frac{X_{m+n}}{T_{m+n}}\right), \frac{X_1}{T_1}, \ldots, \frac{X_m}{T_m}\right) = \prod_{i=1}^{m+n} T_i^{\deg_{X_i}(R)}$$
$$\times Q_h\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} T_{m+i}^{\deg_{X_i}(P)}} HP\left(T_{m+1}, \ldots, T_{m+n}, X_{m+1}, \ldots, X_{m+n}\right), \frac{X_1}{T_1}, \ldots, \frac{X_m}{T_m}\right).$$

En posant $s = t_1^{\deg_{X_1}(P)} \dots t_n^{\deg_{X_n}(P)}$, on a :

$$
\begin{aligned}
&HR(s, \dots, s, t_1, \dots, t_n, x_0y_1, \dots, x_0y_m, x_1, \dots, x_n) \\
&= s^{\sum_{i=1}^m \deg_{X_i}(R)}\, t_1^{\deg_{X_{m+1}}(R)} \dots t_n^{\deg_{X_{m+n}}(R)} \\
&\qquad\qquad \times Q_h\left(\frac{1}{s}HP(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n), \frac{x_0y_1}{s}, \dots, \frac{x_0y_m}{s}\right) \\
&= s^{\sum_{i=1}^m \deg_{X_i}(R)-\deg(Q)}\, t_1^{\deg_{X_{m+1}}(R)} \dots t_n^{\deg_{X_{m+n}}(R)} \\
&\qquad\qquad \times Q_h\big(HP(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n), x_0y_1, \dots, x_0y_m\big) \\
&= s^q u Q_h(x_0t, x_0y_1, \dots, x_0y_m) = s^q u x_0^{\deg(Q)} Q_h(t, y_1, \dots, y_m)
\end{aligned}
$$

où $q \in \mathbb{N}$ et $u \in A$. Par suite $Q_h(t, y_1, \dots, y_m) \in E$ et par conséquent E est rationnelle. Considérons une partie multiplicative rationnelle saturée T de A contenant S. L'égalité

$$
\begin{aligned}
&(t_1 \dots t_n)^{\deg(P)} HP(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) \\
&\qquad = \prod_{i=1}^n t_i^{\deg_{X_i}(P)} P_h(t_1 \dots t_n, x_1t_2 \dots t_n, \dots, t_1 \dots t_{n-1}x_n)
\end{aligned}
$$

implique $(t_1 \dots t_n)^{\deg(P)} HP(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) \in T, HP(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) \in T$, et $t \in T$. Donc $E \subset T$ et $S^{rat} = E$. $\square$

Notation. Si $a \in A$, l'enveloppe rationnelle de la partie multiplicative $\{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ est notée S_a.

3.5. Théorème. $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *est une sous-catégorie pleine réflexive de* $\mathbb{A}nc$ *fermée pour les colimites filtrantes.*

Preuve. 1) Soit A un anneau et S_A la partie multiplicative rationnelle $\{P(x_1, \dots, x_n) : n \in \mathbb{N}, P \in \mathcal{P}_1^n,\ (x_1, \dots, x_n) \in A^n\}$ de A (lemme 1.4 (e)). L'anneau $F(A) = A[S_A^{-1}]/^{rat}(0)$ est rationnel (propositions 2.2 et 3.2). Considérons un anneau rationnel B et un morphisme d'anneaux $f : A \to B$. Comme B satisfait l'axiome (R_1) tout élément $s = P(x_1, \dots, x_n)$ de S_A est tel que $f(s) = P(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est inversible dans B, donc il existe un unique morphisme d'anneaux $g : A[S_A^{-1}] \to B$ tel que $gi_A = f$ où $i_A : A \to A[S_A^{-1}]$ est le morphisme canonique. En outre, ker(g) étant un idéal rationnel de $A[S_A^{-1}]$ contenant $^{rat}(0)$ (proposition 2.3), il existe un unique morphisme $h : F(A) \to B$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ tel que $hq = g$ où $q : A[S_A^{-1}] \to F(A)$ est la projection canonique. Alors $hqi_A = gi_A = f$. Ainsi $\eta_A = qi_A : A \to F(A)$ est l'anneau rationnel universel associé à A.

2) Soit $(\alpha_i : A_i \to A)_{i\in\mathbb{I}}$ la colimite filtrante dans $\mathbb{A}nc$ d'un diagramme filtrant $(A_i)_{i\in\mathbb{I}}$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$. D'après [5, Ch. 9, §1], il existe $i \in I$ et $(a_1, \dots, a_n) \in A_i^n$ vérifiant $\alpha_i(a_1) = x_1, \dots, \alpha_i(a_n) = x_n$. Soit $(P, Q) \in \mathcal{P}_0^n$ tel que $P(x_1, \dots, x_n) = 0$. On a $\alpha_i(P(a_1, \dots, a_n)) = P(\alpha_i(a_1), \dots, \alpha_i(a_n)) =$

$P(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Donc il existe $u : i \to j$ dans $\mathbb{I}$ tel que $A_u(P(a_1, \ldots, a_n)) = 0$. Alors $P(A_u(a_1), \ldots, A_u(a_n)) = 0$, donc $Q(A_u(a_1), \ldots, A_u(a_n)) = 0$, et par suite $Q(x_1, \ldots, x_n) = Q(\alpha_i(a_1), \ldots, \alpha_i(a_n)) = Q(\alpha_j A_u(a_1), \ldots, \alpha_j A_u(a_n)) = \alpha_j Q(A_u(a_1), \ldots, A_u(a_n)) = 0$. Donc A vérifie l'axiome (R_0). D'autre part si $P \in \mathcal{P}_1^n$ alors $P(x_1, \ldots, x_n)$ est inversible dans A car $P(a_1, \ldots, a_n)$ l'est dans A_i. Ainsi A est un anneau rationnel et $\varinjlim_{i \in \mathbb{I}} A_i = A$ dans $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. $\square$

3.6. Exemples.

3.6.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'anneau rationnel universel associé à $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ est $\mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n][S^{-1}]$ où $S = \mathcal{P}_1^n$.

3.6.2. Pour tout anneau rationnel A et tout $a \in A$, l'anneau rationnel universel associé à $A[a^{-1}]$ est $A[S_a^{-1}]$.

3.7. Théorème. $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *est une catégorie cocomplète.*

Preuve. C'est une sous-catégorie pleine réflexive d'une catégorie cocomplète [7, théorème 16.6.1]. $\square$

4. Codisjoncteurs dans $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Nous utilisons la notion de codisjoncteurs développée dans [2].

4.1. Proposition. *Les anneaux rationnels finiment engendrés, c'est-à-dire engendrés par une partie finie, sont les anneaux rationnels isomorphes aux quotients d'un anneau $\mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ par un idéal rationnel, et sont les objets de type fini ou finiment engendrés de* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *suivant [3].*

Preuve. Soit A un anneau rationnel finiment engendré par $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et soit $f : \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \to A$ le morphisme de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ défini par $f(X_i) = x_i$. Comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-anneau rationnel de A contenant $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathrm{Im}(f) = A$ et f est surjectif. Par suite l'anneau rationnel $\mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle / \ker(f)$ est isomorphe à A. Réciproquement si B est un anneau rationnel isomorphe à un anneau rationnel quotient $\mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle / I$, il est finiment engendré. Soit A un objet de type fini de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ [3]. Puisque A est colimite filtrante monomorphique de ses sous-anneaux rationnels finiment engendrés $(\alpha_i : A_i \to A)_{i \in \mathbb{I}}$, le morphisme 1_A se factorise à travers α_i pour un certain $i \in I$ sous la forme $1_A = \alpha_i f_i$ où $f_i : A \to A_i$ [3]. Puisque α_i est un monomorphisme, f_i est un isomorphisme et $A \simeq A_i$. Donc A est un anneau rationnel finiment engendré. Réciproquement soit A un anneau rationnel finiment engendré par $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et $(\alpha_i : Bi \to B)_{i \in \mathbb{I}}$ une colimite filtrante monomorphique d'anneaux rationnels. Comme le foncteur $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at} \to \mathbb{A}nc$ préserve les colimites filtrantes (théorème 3.5), pour tout morphisme $f : A \to B$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$, il existe i dans $\mathbb{I}$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in B_i^n$ tels que $\alpha_i(y_1) = f(x_1), \ldots, \alpha_i(y_n) = f(x_n)$. Il existe alors un unique morphisme $f_i : A \to B_i$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ tel que $f_i(x_1) = y_1, \ldots, f_i(x_n) = y_n$. Par suite A est un objet de type fini de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. $\square$

4.2. Corollaire. *Un anneau rationnel finiment engendré est nœthérien.*

4.3. Exemple. Si X est un ensemble algébrique de $\mathbb{Q}^n$, $R(X)$ est un anneau rationnel finiment engendré par la famille des projections $(p_i : X \to \mathbb{Q})_{i \in [i,n]}$.

4.4. Proposition. *Soit A un anneau rationnel finiment engendré et $x \in A$. Si pour tout morphisme $f : A \to \mathbb{Q}$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ on a $f(x) = 0$, alors $x = 0$.*

Preuve. Soit $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble générateur de A, $f : \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \to A$ le morphisme de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ défini par $f(X_i) = x_i$, $I = \ker(f)$ et $\overline{f} : \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle/I \to A$ l'isomorphisme tel que $\overline{f}q = f$ où q est la projection canonique. Puisque l'anneau $\mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ est nœthérien, il existe $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $I = {}^{rat}(P)$ (proposition 2.5). D'après la proposition 1.6, $x = \frac{Q(x_1,\ldots,x_n)}{R(x_1,\ldots,x_n)}$ avec $Q \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ et $R \in \mathcal{P}_1^n$. Montrons que le couple $(P, Q) \in \mathcal{P}_0^n$. Soit $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ tel que $P(q_1, \ldots, q_n) = 0$. Le morphisme $g : \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \to \mathbb{Q}$ défini par $g(X_i) = q_i$ est tel que $g(P(X_1, \ldots, X_n)) = P(g(X_1), \ldots, g(X_n)) = P(q_1, \ldots, q_n) = 0$. Donc il existe un morphisme $h : \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle/I \to \mathbb{Q}$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ tel que $hq = g$. Puisque, par hypothèse, le morphisme $h\overline{f}^{-1} : A \to \mathbb{Q}$ est tel que $h\overline{f}^{-1}(x) = 0$, on a $\frac{Q(q_1,\ldots,q_n)}{R(q_1,\ldots,q_n)} = g\left(\frac{Q(X_1,\ldots,X_n)}{R(X_1,\ldots,X_n)}\right) = h\overline{f}^{-1}f\left(\frac{Q(X_1,\ldots,X_n)}{R(X_1,\ldots,X_n)}\right) = h\overline{f}^{-1}\left(\frac{Q(x_1,\ldots,x_n)}{R(x_1,\ldots,x_n)}\right) = h\overline{f}^{-1}(x) = 0$. Donc $Q(q_1, \ldots, q_n) = 0$, et $(P, Q) \in \mathcal{P}_0^n$. Comme A satisfait l'axiome (R_0), la relation $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ implique $Q(x_1, \ldots, x_n) = 0$, et donc $x = 0$. $\square$

Soit A un anneau rationnel.

4.5. Proposition. *Pour tout idéal I de A, ${}^{rat}I = A \Leftrightarrow I = A$.*

Preuve. Supposons d'abord que A soit un anneau rationnel finiment engendré par $\{x_1, \ldots, x_n\}$ et supposons ${}^{rat}I = A$. Notons $f : \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \to A$ le morphisme défini par $f(X_i) = x_i$ et $\overline{f} : \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle/\ker(f) \to A$ l'isomorphisme tel que $\overline{f}q = f$ où q est la projection canonique. D'après le corollaire 4.2, les idéaux rationnels ${}^{rat}I$ et $\ker(f)$ de A et $\mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ respectivement, sont finiment engendrés donc rationnellement principaux (proposition 2.5). Par conséquent, il existe $x \in I$ et $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que ${}^{rat}I = {}^{rat}(x)$ et $\ker(f) = {}^{rat}(P)$. D'après la proposition 1.6, $x = \frac{Q(x_1,\ldots,x_n)}{R(x_1,\ldots,x_n)}$ avec $Q \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ et $R \in \mathcal{P}_1^n$. Montrons que le polynôme $P^2 + Q^2 \in \mathcal{P}_1^n$. Soit $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ tel que $P^2(q_1, \ldots, q_n) = 0$. On a $P(q_1, \ldots, q_n) = 0$ et puisque le morphisme $g : \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots X_n\rangle \to \mathbb{Q}$ défini par $g(X_i) = q_i$ est tel que $g\left(P(X_1, \ldots, X_n)\right) = P\left(g\left(X_1\right), \ldots, g\left(X_n\right)\right) = P(q_1, \ldots, q_n) = 0$, il existe $h : \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots X_n\rangle/\ker(f) \to \mathbb{Q}$ tel que $hq = g$. Posons $y = Q(x_1, \ldots, x_n)$. Le morphisme $h\overline{f}^{-1} : A \to \mathbb{Q}$ est tel que $h\overline{f}^{-1}(y) = h\overline{f}^{-1}\left(Q(x_1, \ldots, x_n)\right) = h\overline{f}^{-1}f(Q(X_1, \ldots, X_n)) = hq(Q(X_1, \ldots, X_n)) = g(Q(X_1, \ldots, X_n)) = Q(q_1, \ldots, q_n)$. Si on avait $h\overline{f}^{-1}(y) = 0$, alors ${}^{rat}(y) \subset \ker(h\overline{f}^{-1})$ et il existerait un morphisme $A/{}^{rat}(y) = \{0\} \to \mathbb{Q}$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$, ce qui est impossible. Par conséquent, $Q(q_1, \ldots, q_n) = h\overline{f}^{-1}(y) \neq 0$ et donc $P^2 + Q^2 \in \mathcal{P}_1^n$. Alors l'élément $P^2(x_1, \ldots, x_n) + Q^2(x_1, \ldots, x_n)$ est inversible dans A. Or $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$, donc $y = Q(x_1, \ldots, x_n)$ et x sont inversibles. Comme $x \in I$, on déduit $A = I$.

Supposons maintenant que A soit un anneau rationnel quelconque et ${}^{rat}I = A$. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-anneaux rationnels finiment engendrés de A ordonné par inclusion. Comme $A = \varinjlim_{B \in \mathcal{A}} B$ est une colimite filtrante, on a $I = \varinjlim_{B \in \mathcal{A}}(I \cap B)$, donc ${}^{rat}I = \varinjlim_{B \in \mathcal{A}} {}^{rat}(I \cap B)$. Puisque $1 \in {}^{rat}I$, il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $1 \in {}^{rat}(I \cap B)$. Alors $B = {}^{rat}(I \cap B)$ et, d'après ce qui précède, $B = I \cap B$. Donc

$I = \varinjlim_{B\in\mathcal{A}}(I\cap B) = \varinjlim_{B\in\mathcal{A}} B = A$. $\square$

4.6. Corollaire. *Tout idéal maximal de A est rationnel.*

Preuve. Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de A. Alors $\mathcal{M} \neq A$, donc ${}^{rat}\mathcal{M} \neq A$ et de l'inclusion $\mathcal{M} \subseteq {}^{rat}\mathcal{M}$, on déduit $\mathcal{M} = {}^{rat}\mathcal{M}$, donc $\mathcal{M}$ est rationnel. $\square$

4.7. Proposition. *Pour tout anneau rationnel B finiment engendré par $\{x_1,\ldots,x_n\}$ et tout couple de morphismes $(g,h) : B \rightrightarrows A$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *(g,h) est codisjoint.*
(2) *L'élément $\sum_{i=1}^n (g(x_i)-h(x_i))^2$ est inversible dans A.*

Preuve. Posons $a_i = g(x_i) - h(x_i)$ pour tout $i \in [1,n]$ et $I = (a_1,\ldots,a_n)$. D'après la proposition 2.5, on a ${}^{rat}I = {}^{rat}(a)$ où $a = \sum_{i=1}^n a_i^2$, et d'après la proposition 2.7 le coégalisateur de (g,h) est le morphisme $q_I : A \to A/{}^{rat}I$. On a les équivalences suivantes : (g,h) est codisjoint $\Leftrightarrow A/{}^{rat}I = \{0\} \Leftrightarrow A = {}^{rat}I = {}^{rat}(a) \Leftrightarrow A = (a)$ (proposition 4.5) $\Leftrightarrow a$ inversible dans A. $\square$

4.8. Proposition. *Dans $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$, les objets de type fini sont platement codisjonctables.*

Preuve. Soit B un objet de type fini de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ i.e. un anneau rationnel finiment engendré par $\{x_1,\ldots,x_n\}$ (proposition 4.1) et soit $(g,h) : B \rightrightarrows A$ un couple de morphismes de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Posons $a = \sum_{i=1}^n (g(x_i)-h(x_i))^2$. L'anneau $A[S_a^{-1}]$ est rationnel (proposition 3.2) et comme l'élément $\frac{a}{1}$ est inversible dans $A[S_a^{-1}]$, le morphisme canonique $d_a : A \to A[S_a^{-1}]$ codisjoint (g,h) (proposition 4.7). Soit $f : A \to C$ un morphisme de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ qui codisjoint (g,h). Alors $f(a)$ est inversible dans C (proposition 4.7). Soit $t \in S_a$, $P \in \mathcal{P}_1^n$, $(x_0,x_1,\ldots,x_n) \in A^{n+1}$ et $(m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_0t = HP(a^{m_1},\ldots,a^{m_n},x_1,\ldots,x_n)$ (proposition 3.4). Alors $f(x_0)f(t) = f(x_0t) = HP(f(a)^{m_1},\ldots,f(a)^{m_n},f(x_1),\ldots,f(x_n))$ est inversible dans C (lemme 1.4 (f)). Par suite, $f(t)$ est inversible et il existe un unique morphisme $\overline{f} : A[S_a^{-1}] \to C$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ tel que $\overline{f}d_a = f$. Ce qui prouve que $d_a : A \to A[S_a^{-1}]$ est le codisjoncteur de (g,h) et que l'objet B est codisjonctable dans $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Montrons que d_a est un morphisme plat de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Soit $u : A \to D$ un morphisme injectif de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Le repoussé de u le long de d_a est le morphisme induit par u noté $\overline{u} : A[S_a^{-1}] \to D[S_d^{-1}]$ où $d = u(a)$. Soit $\frac{x}{s} \in A[S_a^{-1}]$ tel que $\overline{u}(\frac{x}{s}) = \frac{u(x)}{u(s)} = \frac{0}{1}$ dans $D[S_d^{-1}]$. Alors il existe $t \in S_d$ tel que $tu(x) = 0$. D'après la proposition 3.4, il existe $P \in \mathcal{P}_1^n, (x_0,x_1,\ldots,x_n) \in D^{n+1}$ et $(m_1,\ldots,m_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_0t = HP(d^{m_1},\ldots,d^{m_n},x_1,\ldots,x_n)$. Comme D vérifie l'axiome (R_0), l'égalité $HP(d^{m_1},\ldots,d^{m_n},x_1,\ldots,x_n)u(x) = x_0tu(x) = 0$ implique $d^{m_1+\cdots+m_n}P(x_1,\ldots,x_n)u(x) = 0$ (lemme 1.4 (d)), donc $u(a^{m_1+\cdots+m_n}x) = 0$. Puisque u est injectif, on a $a^{m_1+\cdots+m_n}x = 0$, donc $\frac{x}{s} = \frac{0}{1}$ dans $A[S_a^{-1}]$ et $\overline{u}$ est injective. $\square$

4.9. Proposition. *Si $a \in A$, le codisjoncteur de la congruence* $\mathrm{mod}({}^{rat}(a))$ *sur A est le morphisme canonique $d_a : A \to A[S_a^{-1}]$.*

Preuve. Notons $\langle a,0\rangle : \mathbb{Q}\langle X\rangle \to \mathrm{mod}({}^{rat}(a))$ le morphisme de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ défini par $\langle a,0\rangle(P(X)/Q(X)) = (P(a)/Q(a), P(0)/Q(0))$, et (r_1,r_2) la congruence $\mathrm{mod}({}^{rat}(a)) \rightrightarrows A$. Puisque d_a est le codisjoncteur de $(\langle a\rangle,\langle 0\rangle) = (r_1\langle a,0\rangle, r_2\langle a,0\rangle) : \mathbb{Q}\langle X\rangle \rightrightarrows A$ (preuve de la proposition 4.8), d_a codisjoint (r_1,r_2). En outre, pour tout morphisme

$f : A \to B$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ qui codisjoint (r_1, r_2), le coégalisateur $B \to B/^{rat}(f(^{rat}(a)))$ de (fr_1, fr_2) (proposition 2.7) a pour but l'objet $\{0\}$. Par suite $^{rat}(f(a)) = {}^{rat}(f(^{rat}(a))) = B$ (proposition 2.12) donc $(f(a)) = B$ (proposition 4.5) et $f(a)$ est inversible. En utilisant le lemme 1.4 (f) dans l'anneau rationnel B, on déduit qu'il existe un unique morphisme $\overline{f} : A[S_a^{-1}] \to B$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ tel que $\overline{f} d_a = f$. □

4.10. Proposition. *Pour tout* $(a, b) \in A^2$, $^{rat}(a) \subset {}^{rat}(b) \Leftrightarrow S_b \subset S_a$.

Preuve. Supposons $^{rat}(a) \subset {}^{rat}(b)$. Puisque le morphisme canonique $d_a : A \to A[S_a^{-1}]$ codisjoint $\mathrm{mod}(^{rat}(a))$ (proposition 4.9), il codisjoint $\mathrm{mod}(^{rat}(b))$. Par suite, il existe un morphisme $f : A[S_b^{-1}] \to A[S_a^{-1}]$ tel que $fd_b = d_a$ où $d_b : A \to A[S_b^{-1}]$ est le morphisme canonique. Alors $d_a(b) = fd_b(b)$ est inversible dans $A[S_a^{-1}]$, $b \in S_a$, donc $S_b \subset S_a$. Réciproquement, supposons $S_b \subset S_a$. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous-anneaux rationnels finiment engendrés de A contenant $\{a, b\}$, ordonné par inclusion, et soit $B \in \mathcal{A}$. Notons S_a^B et S_b^B les parties multiplicatives rationnelles de B associées respectivement à a et b, et $\mathrm{mod}_B(^{rat}(a)), \mathrm{mod}_B(^{rat}(b))$ les congruences sur B associées respectivement aux idéaux $^{rat}(a)_B$ et $^{rat}(b)_B$ de B. Soit $x \notin {}^{rat}(b)_B$. Notons $\overline{x}$ (resp. $\overline{\overline{x}}$) la classe de x modulo l'idéal $^{rat}(a)_B$ (resp. $^{rat}(b)_B$) de B. D'après la proposition 4.4, il existe un morphisme $f : B/^{rat}(b)_B \to \mathbb{Q}$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ tel que $f(\overline{\overline{x}}) \neq 0$. Notons $q_a : B \to B/^{rat}(a)_B$ et $q_b : B \to B/^{rat}(b)_B$ les morphismes canoniques et posons $g = fq_b : B \to \mathbb{Q}$. Alors g coégalise $\mathrm{mod}_B(^{rat}(b))$, donc ne codisjoint pas $\mathrm{mod}_B(^{rat}(b))$ et ne se factorise pas à travers le codisjoncteur $d_b : B \to B[(S_b^B)^{-1}]$ de $\mathrm{mod}_B(^{rat}(b))$ (proposition 4.9). Puisque le codisjoncteur $d_a : B \to B[(S_a^B)^{-1}]$ de $\mathrm{mod}_B(^{rat}(a))$ se factorise à travers d_b, g ne se factorise pas à travers d_a. Donc g coégalise $\mathrm{mod}_B(^{rat}(a))$ et se factorise à travers son coégalisateur q_a sous la forme $g = hq_a$. Alors $h(\overline{x}) = hq_a(x) = g(x) = fq_b(x) = f(\overline{\overline{x}}) \neq 0$. Donc $\overline{x} \neq \overline{0}$ et $x \notin {}^{rat}(a)_B$. Par suite $^{rat}(a)_B \subset {}^{rat}(b)_B$. Puisque $A = \varinjlim_{B \in \mathcal{A}} B$ est une colimite filtrante, il suit $^{rat}(a) \subset {}^{rat}(b)$ dans A. □

5. La catégorie de Zariski $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$.

5.1. Proposition. *Les épimorphismes réguliers de* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *sont universels.*

Preuve. Soit $f : A \to B$ un épimorphisme régulier de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ c'est-à-dire un morphisme surjectif de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ (proposition 2.13) et $g : C \to B$ un morphisme de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Comme $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ est une sous-catégorie pleine réflexive de $\mathbb{A}nc$ (théorème 3.5), le produit fibré de (f, g) dans $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ est l'objet $P = \{(x, y) \in A \times C : f(x) = g(y)\}$ muni des projections m et n sur C et A respectivement. Pour tout $y \in C$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = g(y)$, donc $(x, y) \in P$ et $m(x, y) = y$. Par suite m est surjectif, donc est un épimorphisme régulier de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. □

5.2. Proposition. *Les produits finis dans* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *sont co-universels.*

Preuve. Soit $A \times B$ le produit de deux objets dans $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ muni des projections p_1 et p_2 sur A et B respectivement, et $f : A \times B \to C$ un morphisme de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. On note $e = f(0, 1), e' = f(1, 0)$, $f_1 : A \to C/(e)$ et $f_2 : B \to C/(e')$ les morphismes d'anneaux définis respectivement par $f_1(x) = \overline{f(x, 1)}$ et $f_2(x) = \overline{f(1, x)}$. Montrons que l'idéal (e) de C est rationnel. Soit $(P, Q) \in \mathcal{P}_0^n$ et $(x_1, \dots, x_n) \in C^n$ tels que $P(x_1, \dots, x_n) \in (e)$. Alors il existe $t \in C$ tel que $P(x_1, \dots, x_n) = et = e^2 t =$

$eP(x_1,\ldots,x_n)$. En outre $e+e'=1$, donc $P(x_1,\ldots,x_n)e'=0$. Comme l'anneau C vérifie l'axiome (R_0) et que $(P(X_1,\ldots,X_n)X_{n+1}, Q(X_1,\ldots,X_n)X_{n+1}) \in \mathcal{P}_0$, il suit que $Q(x_1,\ldots,x_n)e'=0$ et donc $Q(x_1,\ldots,x_n) \in (e)$. On montre de même que l'idéal (e') est rationnel. Ainsi les anneaux $C/(e)$ et $C/(e')$ sont rationnels (proposition 2.2) et le morphisme canonique $q_1 : C \to C/(e)$ (resp. $q_2 : C \to C/(e')$) est tel que (q_1, f_1) (resp. (q_2, f_2)) est la somme amalgamée de (p_1, f) (resp. (p_2, f)) dans $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Alors $(q_1 : C \to C/(e), q_2 : C \to C/(e'))$ est un produit dans $\mathbb{A}nc$, donc dans $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. $\square$

5.3. Théorème (Loi de De Morgan pour les codisjoncteurs). *Pour tout anneau rationnel A et toutes congruences codisjonctables $r_1,\ldots,r_n$ sur A de codisjoncteurs respectifs $d_1 : A \to D_1,\ldots,d_n : A \to D_n$, on a :*

$$\bigvee_{i=1}^{n}{}^{c}\, r_i = 1_{A\times A} \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} d_i = 1_A.$$

Preuve. a) Considérons deux congruences codisjonctables r_1 et r_2 sur A de codisjoncteurs respectifs $d_1 : A \to D_1$ et $d_2 : A \to D_2$ et tels que $r_1 \vee^c r_2 = 1_{A\times A}$. D'après la proposition 2.11, il existe deux idéaux rationnels I et J de A tels que $r_1 = \mathrm{mod}(I)$ et $r_2 = \mathrm{mod}(J)$ et vérifiant ${}^{rat}(I+J) = A$. Alors $I+J=A$ (proposition 4.5) et il existe $(a,b) \in I \times J$ tel que $a+b=1$. On a alors ${}^{rat}(a) + {}^{rat}(b) = A$. Soit $(\alpha,\beta) \in S_a \times S_b$. Alors $S_\alpha \subset S_a$ et $S_\beta \subset S_b$, et d'après la proposition 4.10, on a ${}^{rat}(a) \subset {}^{rat}(\alpha)$ et ${}^{rat}(b) \subset {}^{rat}(\beta)$. Il suit que $A = {}^{rat}(a) + {}^{rat}(b) \subset {}^{rat}(\alpha) + {}^{rat}(\beta) \subset {}^{rat}((\alpha)+(\beta))$. D'après la proposition 4.5, l'égalité $(\alpha)+(\beta) = A$ suit. On déduit que le couple de morphismes canoniques $(\ell_\alpha : A \to A[\alpha^{-1}], \ell_\beta : A \to A[\beta^{-1}])$ est une co-union effective dans $\mathbb{A}nc$ [2, exemple 1.3.1]. Le couple de morphismes canoniques $(d_a : A \to A[S_a^{-1}],\ d_b : A \to A[S_b^{-1}])$ est alors une co-union effective dans $\mathbb{A}nc$, étant la colimite filtrante de $(\ell_\alpha, \ell_\beta)$ lorsque $(\alpha,\beta) \in S_a \times S_b$. La somme amalgamée de (d_a, d_b) dans $\mathbb{A}nc$ est l'anneau $A[(S_aS_b)^{-1}]$ muni des morphismes canoniques $d_{ab} : A[S_a^{-1}] \to A[(S_aS_b)^{-1}]$ et $d_{ba} : A[S_b^{-1}] \to A[(S_aS_b)^{-1}]$, tandis que c'est $A[S_{ab}^{-1}]$ muni des morphismes $F(d_{ab})$ et $F(d_{ba})$ dans $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ car le foncteur adjoint $F : \mathbb{A}nc \to \mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ (théorème 3.5) préserve les sommes amalgamées et $F(A[(S_aS_b)^{-1}]) \simeq A[S_{ab}^{-1}]$. Comme l'anneau $A[(S_aS_b)^{-1}]$ satisfait l'axiome (R_0) (proposition 3.2), le morphisme universel $\eta_{A[(S_aS_b)^{-1}]} : A[(S_aS_b)^{-1}] \to A[(S_{ab})^{-1}]$ est injectif (d'après b) ci-dessous). Il suit que (d_a, d_b) est une co-union effective dans $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ et donc $d_a \vee d_b = 1_A$. Mais d_a est le codisjoncteur de $(\langle a\rangle, \langle 0\rangle) : \mathbb{Q}\langle X\rangle \to A$ (proposition 4.8), donc il codisjoint $\mathrm{mod}(I)$, se factorise à travers d_1, et donc $d_a \le d_1$ dans $\mathbb{Q}uot(A)$. De même $d_b \le d_2$. Donc $d_1 \vee d_2 = 1_A$.

b) Un anneau A vérifiant l'axiome (R_0) est tel que le morphisme universel $\eta_A : A \to F(A) = A[S_A^{-1}]$ (cf. notation de la preuve du théorème 3.5) est injectif. En effet, soit $x \in A$ tel que $\frac{x}{1} = \frac{0}{1}$ dans $A[S_A^{-1}]$. Il existe $P \in \mathcal{P}_1^n$ et $(x_1,\ldots,x_n) \in A^n$ tels que $P(x_1,\ldots,x_n)x = 0$. Puisque $(P(X_1,\ldots,X_n)X_{n+1}, X_{n+1}) \in \mathcal{P}_0$, on a $x=0$.

c) Supposons l'implication du théorème 5.3 prouvée pour $n-1$ congruences. D'après la proposition 2.11, il existe n idéaux rationnels $I_1,\ldots,I_n$ de A tels que $r_1 = \mathrm{mod}(I_1),\ldots,r_n = \mathrm{mod}(I_n)$ et ${}^{rat}(I_1+\cdots+I_n) = A$, donc $I_1+\cdots+I_n = A$. Il existe $(a_1,\ldots,a_n) \in I_1\times\cdots\times I_n$ tel que $a_1+\cdots+a_n = 1$. Posons $x = a_1+\cdots+a_{n-1}$ et pour tout $i \in [1, n]$, $d_{a_i} : A \to A[S_{a_i}^{-1}]$ le morphisme canonique. On a ${}^{rat}(x) + {}^{rat}(a_n) = A$. D'après a), les codisjoncteurs $d_x : A \to A[S_x^{-1}]$ et $d_{a_n} : A \to A[S_{a_n}^{-1}]$ des congruences mod$({}^{rat}(x))$ et mod$({}^{rat}(a_n))$ respectivement sont tels que $d_x \vee d_{a_n} = 1_A$. Dans $A[S_x^{-1}]$ l'égalité $\frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} = 1$ implique ${}^{rat}(\frac{a_1}{x}) + \cdots + {}^{rat}(\frac{a_n}{x}) = A[S_x^{-1}]$. Par hypothèse de récurrence, les codisjoncteurs $d_{xa_i} : A[S_x^{-1}] \to A[S_x^{-1}][S_{\frac{a_i}{x}}^{-1}]$ des congruences mod$({}^{rat}(\frac{a_i}{x}))$ $(i \in [1, n-1])$ sur $A[S_x^{-1}]$ sont tels que $\vee_{i=1}^{n-1} d_{xa_i} = 1_{A[S_x^{-1}]}$. Soit $i \in [1, n-1]$. Puisque $A[S_x^{-1}][S_{\frac{a_i}{x}}^{-1}] \simeq A[S_{xa_i}^{-1}]$, on a $\vee_{i=1}^{n-1} v_i \vee d_{a_n} = 1_A$ et $v_i \leq d_{a_i}$ où $v_i = d_{xa_i} d_x : A \to A[S_{xa_i}^{-1}]$. On déduit $\vee_{i=1}^{n} d_{a_i} = 1_A$. Soit $i \in [1, n]$. Puisque d_{a_i} est le codisjoncteur de $(\langle a_i \rangle, \langle 0 \rangle) : \mathbb{Q}\langle X \rangle \rightrightarrows A$ (proposition 4.8), il codisjoint mod(I_i), donc se factorise à travers d_i, donc $d_{a_i} \leq d_i$. Il suit $\vee_{i=1}^{n} d_i = 1_A$. $\square$

5.4. Théorème. $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *est une catégorie de Zariski.*

Preuve. La catégorie $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ est cocomplète (théorème 3.7). Comme l'objet $\mathbb{Z}[X]$ est générateur fort et de présentation finie dans $\mathbb{A}\mathrm{nc}$ [3], il en est de même de l'anneau rationnel $\mathbb{Q}\langle X \rangle = F(\mathbb{Z}[X])$ dans $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ (exemple 3.6.1). En outre $\mathbb{Q}\langle X \rangle$ est platement codisjonctable (proposition 4.8). Les épimorphismes réguliers et les produits finis de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ sont respectivement universels et co-universels (propositions 5.1 et 5.2). L'anneau nul est objet final strict (proposition 1.5), de présentation finie et n'admet pas de sous-objet propre. En outre, $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ vérifie la loi de De Morgan pour les codisjoncteurs (théorème 5.3). Par conséquent, $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ est une catégorie de Zariski [2, §1.2]. $\square$

6. Corps rationnels.

6.0. Rappels. Dans la catégorie de Zariski $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$, un objet K est dit *simple* s'il admet exactement deux congruences [2, définition 2.1.1], un objet simple K est *algébriquement clos* si et seulement si toute extension simple de présentation finie de K est un isomorphisme [2, proposition 6.1.5], et un objet simple initial K est algébriquement clos si et seulement si, pour tout objet non final de présentation finie A, il existe au moins un morphisme $A \to K$ [2, théorème 6.1.6].

6.1. Proposition. *Si K est un corps, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *K vérifie l'axiome (R_0).*
(2) *K vérifie l'axiome (R_1).*
(3) *K est un anneau rationnel.*

Preuve. 1) ⇒ 2) : Soit $P \in \mathcal{P}_1^n$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$. Comme $(P, 1) \in \mathcal{P}_0$ et K vérifie (R_0), on a $P(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, donc $P(x_1, \ldots, x_n)$ est inversible dans K.

2) ⇒ 3) : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de la $\mathbb{Q}$-algèbre K. Comme K vérifie (R_1), il existe un morphisme surjectif de $\mathbb{Q}$-algèbres $\langle x_i \rangle_{i\in I} : \mathbb{Q}\langle X_i \rangle_{i\in I} = F(\mathbb{Z}[X_i]_{i\in I}) \to K$. L'idéal ker$(\langle x_i \rangle_{i\in I})$ est maximal donc rationnel (corollaire 4.6). Par suite $K \simeq \mathbb{Q}\langle X_i \rangle_{i\in I} / \ker(\langle x_i \rangle_{i\in I})$ est un anneau rationnel (proposition 2.2). $\square$

6.2. Proposition. *1) Les objets simples de* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *sont les corps rationnels c'est-à-dire les corps qui sont des anneaux rationnels.*

2) Les objets intégraux de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *sont les anneaux rationnels qui sont intègres.*

Preuve. 1) Soit K un objet simple de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ et I un idéal non nul de K. Alors mod$({}^{rat}(I)) \neq \Delta_K$, donc mod$({}^{rat}I) = 1_{K\times K}$, ${}^{rat}I = K$, et $I = K$ (proposition 4.5).

Donc K est un corps. Réciproquement, considérons un corps K qui est objet de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at. Si r une congruence sur K, il existe un idéal rationnel I de K tel que $r = \text{mod}(I)$ (proposition 2.11) or $I = K$ ou $I = \{0\}$, donc $r = 1_{K\times K}$ ou $r = \Delta_K$. Donc K est un objet simple de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at.

2) Soit A un objet intégral de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at. Soit $A \to K$ un monomorphisme de codomaine simple c'est-à-dire un morphisme injectif tel que K soit un corps rationnel. Alors l'anneau A est intègre. Réciproquement, soit A un anneau rationnel intègre. Alors le corps des fractions K_A de A est un corps rationnel (propositions 3.2 et 6.1). Par suite A est un sous-objet d'un objet simple de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at, donc un objet intégral de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at. □

6.3. Notation. On note $\mathbb{C}$p$\mathbb{R}$at la *catégorie des corps rationnels*, sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at dont les objets sont les corps rationnels, et $\mathbb{C}$p$\mathbb{R}$at$_0$ la sous-catégorie pleine des corps rationnels finiment engendrés en tant que corps.

6.4. Théorème. *Le corps rationnel $\mathbb{Q}$ est un objet simple algébriquement clos de* $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at*.*

Preuve. D'après la proposition 6.2, $\mathbb{Q}$ est objet simple de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at. Soit A un objet de présentation finie non final de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at, donc un anneau rationnel non nul engendré par une famille $\{x_1, \dots, x_n\}$. Notons $f : \mathbb{Q}\langle X_1, \dots, X_n\rangle \to A$ le morphisme de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at défini par $f(X_i) = x_i$, $I = \ker(f)$ et $\overline{f} : \mathbb{Q}\langle X_1, \dots, X_n\rangle/I \to A$ l'isomorphisme tel que $\overline{f}q = f$ où q est la projection canonique. L'anneau $\mathbb{Q}\langle X_1, \dots, X_n\rangle$ étant nœthérien, il existe $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] \setminus \mathcal{P}_1^n$ tel que $I = {}^{rat}(P)$ (proposition 2.5). Soit $(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ tel que $P(q_1, \dots, q_n) = 0$ et $g : \mathbb{Q}\langle X_1, \dots, X_n\rangle \to \mathbb{Q}$ défini par $g(X_i) = q_i$. Comme $g(P) = P(q_1, \dots, q_n) = 0$, il existe $h : \mathbb{Q}\left\langle X_1, \dots, X_n\right\rangle/I \to \mathbb{Q}$ tel que $hq = g$. On obtient ainsi un morphisme $h\overline{f}^{-1} : A \to \mathbb{Q}$ de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at. Par suite l'objet simple initial $\mathbb{Q}$ est algébriquement clos dans $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at. □

6.5. Théorème. $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at *est une catégorie de Zariski rationnelle réduite.*

Preuve. $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at est une catégorie de Zariski (théorème 5.4) dont l'objet initial $\mathbb{Q}$ est simple algébriquement clos (théorème 6.4). D'après le corollaire 4.2, la catégorie $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at est localement nœthérienne [3], donc rationnelle [2, §6.3]. En outre, les anneaux rationnels sont des objets réduits de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at. En effet, soit A un anneau rationnel finiment engendré et $\varphi : A \to \mathbb{Q}^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}}(A,\mathbb{Q})}$ le morphisme de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at défini par $\varphi(x)(u) = u(x)$. D'après la proposition 4.4, le morphisme φ est injectif. Par suite A est un sous objet d'un produit d'objets simples de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at, donc un objet réduit. Il suit que tout objet de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at est réduit [2, proposition 2.3.3], et que $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at est une catégorie de Zariski réduite [2, §6.4]. □

7. Ensembles algébriques rationnels. Suivant [2, proposition 5.3.1, définitions 6.5.1 et 6.5.10], un ultraschéma affine sur $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at est un espace modelé sur $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at isomorphe à l'espace modelé $\mathrm{Spec}_{\max}(A)$ où A est un objet de Jacobson de $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at, un espace algébrique affine sur $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at est un ultraschéma affine localement finiment présentable séparé, et une variété algébrique affine est un espace algébrique affine irréductible sur $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at. La catégorie des espaces algébriques affines sur $\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at est notée $\mathbb{E}$sp$\mathbb{A}$lg$\mathbb{A}$ff($\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at) [2, p.167], celle des variétés algébriques affines, $\mathbb{V}$ar$\mathbb{A}$lg$\mathbb{A}$ff($\mathbb{A}$n$\mathbb{R}$at) [2, p.167], et celle des variétés algébriques affines et morphismes rationnels est notée

$\mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{A}\mathrm{ff}(\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at})_{rat}$ [2, p.168]. Notons $\mathbb{E}\mathrm{ns}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$ la catégorie des ensembles algébriques rationnels dont les objets sont les ensembles de la forme $Z(P) = \{x \in \mathbb{Q}^n : P(x) = 0\}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, et les morphismes de $Z(P)$ dans $Z(Q) \subset \mathbb{Q}^m$ sont les applications $u : Z(P) \to Z(Q)$ telles que pour tout $j \in [1, m]$, en notant $p_j : \mathbb{Q}^m \to \mathbb{Q}$ la projection d'indice j, l'application $p_j|_{Z(Q)} \circ u : Z(P) \to \mathbb{Q}$ soit la restriction à $Z(P)$ d'une fonction rationnelle $\tilde{r}$ associée à une fraction rationnelle $r \in \mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_n)$ [1, Ch. IV, §3]. Notons $\mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$ la catégorie des variétés algébriques rationnelles, sous-catégorie pleine de $\mathbb{E}\mathrm{ns}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$ dont les objets sont les ensembles algébriques rationnels irréductibles, et $\mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}_{rat}$ la catégorie ayant les mêmes objets que $\mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$ et pour morphismes de $Z(P) \subset \mathbb{Q}^n$ dans $Z(Q) \subset \mathbb{Q}^m$ les applications rationnelles dominantes définies de la même façon que dans [4, Ch. 1, §4].

7.1. Théorème. *La catégorie* $\mathbb{E}\mathrm{sp}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{A}\mathrm{ff}(\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at})$ *des espaces algébriques affines sur* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *est concrètement équivalente [6] à la catégorie* $\mathbb{E}\mathrm{ns}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *des ensembles algébriques rationnels.*

Preuve. a) Soit X un objet de $\mathbb{E}\mathrm{ns}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$ et $P \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $X = Z(P)$. Considérons la topologie de Zariski sur X dont les fermés sont de la forme $Z_X(u) = \{x \in X : u(x) = 0\}$ et les ouverts de la forme $D_X(u) = \{x \in X : u(x) \neq 0\}$ où $u \in R(X)$ (exemple 1.2.3). Pour tout $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X$, posons $I_a = \{u \in R(X) : u(a) = 0\}$. Puisque le morphisme d'évaluation $\varphi_a : R(X) \to \mathbb{Q}$ en a est surjectif, on a $R(X)/I_a = R(X)/\ker(\varphi_a) \simeq \mathbb{Q}$, donc I_a est un idéal maximal de $R(X)$. Soit $f : X \to \mathrm{Spec}_{\max}(R(X))$ l'application définie par $f(a) = I_a$. Montrons que f est un homéomorphisme. Soit $b = (b_1, \ldots, b_n) \in X$ tel que $I_a = I_b$. Puisque l'application $u : X \to \mathbb{Q}$ définie par $u(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2$ appartient à I_a, on a $u \in I_b$, donc $u(b) = 0$ et $a = b$. Donc f est injective. Soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de $R(X)$. D'après l'exemple 4.3 et le théorème 6.4, il existe un isomorphisme $\varphi : R(X)/\mathcal{M} \to \mathbb{Q}$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Pour tout $i \in [1, n]$, posons $a_i = \varphi(\overline{p}_i)$ où $p_i : X \to \mathbb{Q}$ est la projection d'indice i. On a $P(a_1, \ldots, a_n) = P(\varphi(\overline{p}_1), \ldots, \varphi(\overline{p}_n)) = \varphi(P(\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n)) = \varphi(\overline{P(p_1, \ldots, p_n)}) = \varphi(\overline{0}) = 0$. Donc $a = (a_1, \ldots, a_n) \in X$. Soit $u \in R(X)$ et $(S, T) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]^2$ tels que pour tout $x \in X$, $T(x) \neq 0$ et $u(x) = \frac{S(x)}{T(x)}$. On a : $u \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \overline{u} = \overline{0} \Leftrightarrow \frac{S(\varphi(\overline{p}_1), \ldots, \varphi(\overline{p}_n))}{T(\varphi(\overline{p}_1), \ldots, \varphi(\overline{p}_n))} = \varphi\left(\frac{S(\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n)}{T(\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_n)}\right) = \varphi(\overline{u}) = 0 \Leftrightarrow S(\varphi(\overline{p}_1), \ldots, \varphi(\overline{p}_n)) = 0 \Leftrightarrow u(\varphi(\overline{p}_1), \ldots, \varphi(\overline{p}_n)) = 0 \Leftrightarrow u(a_1, \ldots, a_n) = 0 \Leftrightarrow u \in I_a$. Donc $I_a = \mathcal{M}$, f est surjective et donc bijective. D'après [2, définition 5.1.6 et proposition 3.1.7] et la proposition 2.5, les fermés de $\mathrm{Spec}_{\max}(R(X))$ pour la topologie de Zariski sont de la forme $V(u) = \{I \in \mathrm{Spec}_{\max}(R(X)) : u \in I\}$ où $u \in R(X)$. Si $Z_X(u)$ est un fermé de X et $a \in X$, on a : $a \in Z_X(u) \Leftrightarrow u(a) = 0 \Leftrightarrow u \in I_a \Leftrightarrow I_a = f(a) \in V(u)$. Donc $f(Z_X(u)) = V(u)$. On déduit que f est fermée, continue, donc un homéomorphisme.

b) Notons $\Omega(X)$ et $\Omega(\mathrm{Spec}_{\max}(R(X)))$ les ensembles ordonnés des ouverts de X et $\mathrm{Spec}_{\max}(R(X))$ respectivement. Le foncteur $0_X : \Omega(X)^{op} \to \mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ qui associe $R(U)$ à U (exemple 1.2.3) est un préfaisceau d'anneaux rationnels sur X, et le foncteur $\widetilde{R(X)} : \Omega(\mathrm{Spec}_{\max}(R(X)))^{op} \to \mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ qui associe $R(X)[S_u^{-1}]$ à $D(u) = \{I \in \mathrm{Spec}_{\max}(R(X)) : u \notin I\}$ un faisceau d'anneaux rationnels sur $\mathrm{Spec}_{\max}(R(X))$ ([2, définition 5.1.9] et proposition 4.9). Soit $D(u) \in \Omega(\text{Spec}_{\max}(R(X)))$. D'après a), on a $f^{-1}(D(u)) = D_X(u)$. Notons $\rho_{D(u)} : R(X) \to R(D_X(u))$ le morphisme de restriction. Puisque $\rho_{D(u)}(u) : D_X(u) \to \mathbb{Q}$ ne s'annule pas, $\rho_{D(u)}(u)$ est inversible dans $R(D_X(u))$. Par suite, il existe un unique morphisme $f^{\#}_{D(u)} : R(X)[S_u^{-1}] \to R(D_X(u))$ de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ tel que $f^{\#}_{D(u)} d_u = \rho_{D(u)}$ où $d_u : R(X) \to R(X)[S_u^{-1}]$ est le morphisme canonique. Montrons que c'est un isomorphisme. Soit $\frac{r}{s} \in R(X)[S_u^{-1}]$ tel que $f^{\#}_{D(u)}(\frac{r}{s}) = 0$. Alors $r|_{D_X(u)} = 0$. Puisque $u = 0$ sur $Z_X(u)$, on déduit que $ur = 0$ sur X. Par suite $\frac{r}{s} = \frac{0}{1}$. Donc $f^{\#}_{D(u)}$ est injective. Soit $v \in R(D_X(u))$. Il existe $(V_1, V_2) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^2$ tel que pour tout $x \in D_X(u), V_2(x) \neq 0$ et $v(x) = \frac{V_1(x)}{V_2(x)}$. Soit $(v_1, v_2) \in R(X)^2$ les fonctions polynomiales associées aux polynômes V_1 et V_2. Soit $(Q, T) \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]^2$ tel que pour tout $x \in X,\ T(x) \neq 0$ et $u(x) = \frac{Q(x)}{T(x)}$. Puisque v_2 ne s'annule pas dans $D_X(u)$, on a $D_X(u) \subset D_X(v_2)$, donc $Z_X(v_2) \subset Z_X(u)$. Soit $x \in \mathbb{Q}^n$ tel que $(P^2 + V_2^2)(x) = 0$. Alors $P(x) = V_2(x) = 0$, donc $x \in Z_X(v_2),\ x \in Z_X(u)$ et $Q(x) = 0$. D'où $(P^2 + V_2^2, Q) \in \mathcal{P}_0$. Soit $(p_1, \dots, p_n)$ les restrictions à X des projections de $\mathbb{Q}^n$ dans $\mathbb{Q}$. Puisque $(P^2 + V_2^2)(p_1, \dots, p_n) = v_2^2 \in {}^{rat}(v_2)$, la fonction polynomiale $q = Q(p_1, \dots, p_n) \in R(X)$ associée à Q appartient à ${}^{rat}(v_2)$, donc $u \in {}^{rat}(v_2)$ et ${}^{rat}(u) \subset {}^{rat}(v_2)$. D'après la proposition 4.10, on a $S_{v_2} \subset S_u$ et donc v_2 est inversible dans $R(X)[S_u^{-1}]$. Alors $f^{\#}_{D(u)}(\frac{v_1}{v_2}) = \frac{v_1}{v_2}|_{D_X(u)} = v$. Donc $f^{\#}_{D(u)}$ est surjective et par suite est un isomorphisme. On définit alors une transformation naturelle isomorphique $f^{\#} : \widetilde{R(X)} \to 0_X(f^{-1})^{op}$ où $f^{-1} : \Omega(\text{Spec}_{\max}(R(X))) \to \Omega(X)$ est le foncteur qui associe $f^{-1}(U)$ à U. D'après a), le morphisme d'espaces modelés $(f, f^{\#}) : (X, 0_X) \to (\text{Spec}_{\max}(R(X)), \widetilde{R(X)})$ est un isomorphisme, donc 0_X est un faisceau d'anneaux rationnels sur X. Alors $(X, 0_X)$ est un ultraschéma affine sur $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ [2, proposition 6.3.3] finiment présentable [2, corollaire 5.3.7] séparé [2, propositions 4.5.7 et 6.3.8], donc un objet de $\mathbb{E}\mathrm{sp}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{A}\mathrm{ff}(\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at})$.

c) Soit $g : X \to Y = Z(Q) \subset \mathbb{Q}^m$ un morphisme de $\mathbb{E}\mathrm{ns}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$. Pour tout $v \in R(Y)$, on a $g^{-1}(Z_Y(v)) = Z_X(v \circ g)$ où $v \circ g \in R(X)$. Donc g est continue. On note $g^{\#}_{D(v)} : R(D_Y(v)) \to R(g^{-1}(D_Y(v)))$ le morphisme de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ défini par $g^{\#}_{D(v)}(w) = w \circ g|_{g^{-1}(D_Y(v))}$. On définit ainsi une transformation naturelle $g^{\#} : 0_Y \to 0_X(g^{-1})^{op}$.

d) Soit $E : \mathbb{E}\mathrm{ns}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at} \to \mathbb{E}\mathrm{sp}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{A}\mathrm{ff}(\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at})$ le foncteur défini par $E(X) = (X, O_X)$ et $E(g) = (g, g^{\#}) : (X, 0_X) \to (Y, 0_Y)$. Il est fidèle puisque pour tout couple de morphismes $(g, h) : X \rightrightarrows Y$ de $\mathbb{E}\mathrm{ns}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$, on a : $E(g) = E(h) \Rightarrow (g, g^{\#}) = (h, h^{\#}) \Rightarrow g = h$. Il est plein puisque pour tout morphisme $(g, g^{\#}) : (X, 0_X) \to (Y, 0_Y)$ de $\mathbb{E}\mathrm{sp}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{A}\mathrm{ff}(\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at})$, l'application $g : X \to Y$ est un morphisme de $\mathbb{E}\mathrm{ns}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$ tel que $E(g) = (g, g^{\#})$ d'après [2, proposition 6.4.3]. Montrons que E est essentiellement surjectif. Soit $(\text{Spec}_{\max} A, \tilde{A})$ un objet représentatif de $\mathbb{E}\mathrm{sp}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{A}\mathrm{ff}(\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at})$. D'après [2, corollaire 5.3.7], A est un anneau rationnel finiment engendré, donc il existe $Q \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ tel que $A \simeq \mathbb{Q}\langle X_1, \dots, X_m \rangle / {}^{rat}(Q)$ (propositions 2.5 et 4.1). Posons $X = Z(Q)$. Nous allons montrer au e) ci-après que l'on a

$R(X) \simeq \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_m\rangle/^{rat}(Q)$. Alors on aura

$$\begin{aligned} E(X) = (X, 0_X) &\simeq (\mathrm{Spec}_{\max}(R(X)), \widetilde{R(X)}) \text{ (d'après b))} \\ &\simeq (\mathrm{Spec}_{\max}(\mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_m\rangle/^{rat}(Q)), \widetilde{\mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_m\rangle}/^{rat}(Q)) \\ &\simeq (\mathrm{Spec}_{\max} A, \tilde{A}). \end{aligned}$$

e) Montrons que toute fonction rationnelle partout définie sur un fermé X de $\mathbb{Q}^n$ est la restriction à X d'une fonction rationnelle partout définie sur $\mathbb{Q}^n$. Soit $u \in R(X)$. Il existe $(P, Q, S) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]^3$ tel que $X = Z(P)$ et pour tout $x \in X$, $Q(x) \neq 0$ et $u(x) = \frac{S(x)}{Q(x)}$. Posons $I = {}^{rat}(P, Q)$ dans $\mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ et $Z(I) = \{x \in \mathbb{Q}^n : \forall T \in I,\ T(x) = 0\}$. Si $I \neq \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$, il existe un morphisme $f : \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle/I \to \mathbb{Q}$ (théorème 6.4) et si on pose $y = (f(\overline{X}_1), \ldots, f(\overline{X}_n)) \in Z(I)$, on a $P(y) = Q(y) = 0$, $y \in X$, donc $Q(y) \neq 0$, ce qui est impossible. On a donc $I = \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ et d'après la proposition 4.5, $(P, Q) = \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$. Il existe alors $\left(\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}\right) \in \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle^2$ tel que $\frac{P_1}{Q_1}P + \frac{P_2}{Q_2}Q = 1$. Si $x \in X$, on a $\frac{1}{Q_(x)} = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$. Soit $v : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}$ définie par $v(x) = \frac{P_2(x)S(x)}{Q_2(x)}$. Pour $x \in X$, on a $v(x) = \frac{P_2(x)S(x)}{Q_2(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)} = u(x)$. Donc u est la restriction de v. Considérons maintenant $\varphi : \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle \to R(X)$ le morphisme surjectif de $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ défini par $\varphi(\frac{V}{T})(x) = \frac{V(x)}{T(x)}$. Puisque $P \in \ker(\varphi)$, on a ${}^{rat}(P) \subset \ker(\varphi)$. En outre, si $\frac{V}{T} \in \ker(\varphi)$ alors $V \in \ker(\varphi)$, et donc $(P, V) \in \mathcal{P}_0$. Comme $P = P(X_1, \ldots, X_n) \in {}^{rat}(P)$, on a $V = V(X_1, \ldots, X_n) \in {}^{rat}(P)$. Par suite $\frac{V}{T} \in {}^{rat}(P)$. Donc $\ker(\varphi) = {}^{rat}(P)$ et $R(X) \simeq \mathbb{Q}\langle X_1, \ldots, X_n\rangle/^{rat}(P)$. $\square$

7.2. Remarque. La catégorie $\mathbb{E}\mathrm{sp}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{A}\mathrm{ff}(\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at})$ n'est pas isomorphe à la catégorie $\mathbb{E}\mathrm{ns}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$ parce qu'elle contient de nombreux objets qui ne sont pas dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$ comme les $\mathbb{Q}$-espaces affines de dimension finie non inclus dans un espace $\mathbb{Q}^n$, leurs sous-ensembles algébriques, les groupes algébriques $GL_n(\mathbb{Q})$, $SL_n(\mathbb{Q})$, $O_n(\mathbb{Q})$, $GA(\mathbb{Q}^n)$, etc. La catégorie $\mathbb{E}\mathrm{sp}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{A}\mathrm{ff}(\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at})$ remplace donc avantageusement la catégorie $\mathbb{E}\mathrm{ns}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$ et est en fait la véritable catégorie des ensembles algébriques rationnels.

7.3. Corollaire. *La catégorie* $\mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{A}\mathrm{ff}(\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at})$ *des variétés algébriques affines sur* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *(resp.* $\mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{A}\mathrm{ff}(\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at})_{rat}$*) est concrètement équivalente à la catégorie* $\mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *des variétés algébriques rationnelles (resp.* $\mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}_{rat}$*).*

7.4. Corollaire. *1) La catégorie* $\mathbb{E}\mathrm{ns}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *est dualement équivalente à la catégorie* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}_0$ *des anneaux rationnels finiment engendrés.*

2) La catégorie $\mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}$ *est dualement équivalente à la catégorie* $\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}\mathbb{I}\mathrm{nt}_0$ *des anneaux rationnels finiment engendrés intègres et morphismes d'anneaux.*

3) La catégorie $\mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}_{rat}$ *est dualement équivalente à la catégorie* $\mathbb{C}\mathrm{p}\mathbb{R}\mathrm{at}_0$ *des corps rationnels finiment engendrés.*

Preuve. On a $\mathbb{E}\mathrm{ns}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at} \sim \mathbb{E}\mathrm{sp}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{A}\mathrm{ff}(\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}) \sim \mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}_0^{op}$ [2, proposition 6.5.9], $\mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at} \sim \mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{A}\mathrm{ff}(\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}) \sim \mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at}\mathbb{I}\mathrm{nt}_0^{op}$ ([2, proposition 6.5.13] et proposition 6.2), et $\mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{R}\mathrm{at}_{rat} \sim \mathbb{V}\mathrm{ar}\mathbb{A}\mathrm{lg}\mathbb{A}\mathrm{ff}(\mathbb{A}\mathrm{n}\mathbb{R}\mathrm{at})_{rat} \sim \mathbb{C}\mathrm{p}\mathbb{R}\mathrm{at}_0^{op}$ [2, théorème 6.5.15]. $\square$

7.5. Corollaire (Théorèmes de représentation). *1) Tout anneau rationnel finiment engendré est isomorphe à l'anneau des fonctions rationnelles partout définies sur un ensemble algébrique rationnel de la forme $Z(P) = \{x \in \mathbb{Q}^n : P(x) = 0\}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$.*

2) Tout anneau rationnel finiment engendré intègre est isomorphe à l'anneau des fonctions rationnelles partout définies sur une variété algébrique rationnelle de la forme $Z(P)$.

3) Tout corps rationnel finiment engendré est isomorphe au corps des fonctions rationnelles partiellement définies sur une variété algébrique rationnelle de la forme $Z(P)$.

English extended abstract. This paper introduces a new category of commutative algebras well adapted to the study of affine rational algebraic sets and varieties. It is the category $\mathbb{R}$at$\mathbb{R}$ng of rational rings. A rational ring is a commutative ring A with unit satisfying all the implications between algebraic identities which are valid in $\mathbb{Q}$, and in which are invertible all the elements $P(x_1, \dots, x_n)$ where $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ and $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ has no zero in $\mathbb{Q}$. Rational ideals and rational multiplicative sets are defined in order to get rational quotient rings, rational spectra and rational rings of fractions. Maximal ideals of rational rings are rational and finitely generated rational ideals of rational rings are rationally principal. Any finitely generated rational ring A is a codisjunctable object in $\mathbb{R}$at$\mathbb{R}$ng in the sense of [2], that is to say, any pair of morphisms $(g, h) : A \rightrightarrows B$ in $\mathbb{R}$at$\mathbb{R}$ng has a codisjunctor i.e. a universal morphism $d : B \to D$ which codisjoints (g, h) i.e. such that the coequalizer of (dg, dh) is null. These codisjunctors are build up by using rational multiplicative sets and rational rings of fractions. The category $\mathbb{R}$at$\mathbb{R}$ng is proved to be a Zariski category [2], which means in particular that codisjunctors satisfy De Morgan's law. Moreover, the object $\mathbb{Q}$ is proved to be a simple algebraically closed initial object in $\mathbb{R}$at$\mathbb{R}$ng, which implies that $\mathbb{R}$at$\mathbb{R}$ng is a reduced rational Zariski category [2]. As a consequence, the theories of schemes, ultraschemes, algebraic spaces and algebraic varieties apply in a straightforward way to rational rings, as proved in [2]. In particular, the category $\mathbb{A}$ff$\mathbb{E}$sp$\mathbb{A}$lg ($\mathbb{R}$at$\mathbb{R}$ng) (resp. $\mathbb{A}$ff$\mathbb{V}$ar$\mathbb{A}$lg($\mathbb{R}$at$\mathbb{R}$ng)) of affine algebraic spaces (resp. varieties) on $\mathbb{R}$at$\mathbb{R}$ng is proved to be equivalent to the concrete category $\mathbb{R}$at$\mathbb{A}$lg$\mathbb{S}$et (resp. $\mathbb{R}$at$\mathbb{A}$lg$\mathbb{V}$ar) of rational algebraic sets (resp. varieties) defined as follows. The objects of $\mathbb{R}$at$\mathbb{A}$lg$\mathbb{S}$et are the sets of the form $Z(P) = \{x \in \mathbb{Q}^n : P(x) = 0\}$ where $n \in \mathbb{N}$ and $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ and the morphisms from $Z(P)$ to $Z(Q) \subset \mathbb{Q}^m$ are the maps $u : Z(P) \to Z(Q)$ such that, for all $j \in [1, m]$, the map $p_{j|Z(Q)} \circ u : Z(P) \to \mathbb{Q}$ is induced by a rational function $\tilde{r}$ associated to a rational fraction $r \in \mathbb{Q}(X_1, \dots, X_n)$, where $p_j : \mathbb{Q}^m \to \mathbb{Q}$ is the projection of index j. The category $\mathbb{R}$at$\mathbb{A}$lg$\mathbb{V}$ar is the full subcategory of $\mathbb{R}$at$\mathbb{A}$lg$\mathbb{S}$et whose objects are the rational algebraic varieties i.e. the irreducible rational algebraic sets. If follows that the category $\mathbb{R}$at$\mathbb{R}$ng$_0$ (resp. $\mathbb{I}$nt$\mathbb{R}$at$\mathbb{R}$ng$_0$) of finitely generated rational rings (resp. finitely generated rational integral rings) is dually equivalent to the category $\mathbb{R}$at$\mathbb{A}$lg$\mathbb{S}$et (resp. $\mathbb{R}$at$\mathbb{A}$lg$\mathbb{V}$ar). Moreover, the category $\mathbb{R}$at$\mathbb{A}$lg$\mathbb{V}$ar$_{rat}$ of rational algebraic varieties and partially defined dominant rational maps [4] is dually equivalent to the category $\mathbb{R}$at$\mathbb{F}$ld$_0$ of finitely generated rational fields. Finally, finitely generated rational rings (resp. finitely generated integral rings, finitely generated rational fields)

are exactly the rings which are isomorphic to the rings of rational functions everywhere (resp. everywhere, partially) defined on rational algebraic sets (resp. varieties, varieties).

BIBLIOGRAPHIE

1. N. Bourbaki, *Algèbre*, Masson, Paris, 1981.
2. Y. Diers, *Categories of Commutative Algebras*, Oxford University Press, New York, 1992.
3. P. Gabriel et F. Ulmer, *Lokal Präsentierbare Kategorien*, Lecture Notes in Math., vol. 221, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
4. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
5. S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
6. H. E. Porst, *What is concrete equivalence ?*, Research Report Navorsingsverslag, University of South Africa, 1993.
7. H. Schubert, *Categories*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

L. NISON
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES
B.P. 311
F-59304 VALENCIENNES
FRANCE