Ann. Sci. Math. Québec **21** (1997), no. 2, 133–146.

DÉCOMPOSITIONS SUCCESSIVES DE LA FORME NORMALE D'UN SURRÉEL ET GÉNÉRALISATION DES ϵ-NOMBRES

DENIS LEMIRE

RÉSUMÉ. Le neuvième chapitre du livre de Gonshor, [G], est consacré à l'étude des ϵ-nombres généralisés et des quasi-ϵ-nombres, c'est-à-dire, les surréels qui satisfont les équations $x = \omega^x$ et $x = \omega^{-x}$ respectivement. Ici, nous étudierons des surréels ayant des propriétés plus générales, plus précisement, les surréels x de forme normale $x = \omega^{\pm x_1}$ où x_1 est de fome normale $x_1 = \omega^{\pm x_2}$ et inductivement $x_n = \omega^{\pm x_{n+1}}$.

ABSTRACT. In the ninth chapter of his book Gonshor [G] studied the generalized ϵ-numbers and the quasi-ϵ-numbers (i.e. the surreals satisfying the equations $x = \omega^x$ and $x = \omega^{-x}$ respectively). In this paper, we study surreals having more general properties: the surreals whose normal form is given by $x = \omega^{x_1}$ where $x_1 = \pm\omega^{x_2}$ and by induction $x_n = \pm\omega^{x_{n+1}}$.

Les nombres surréels ont été introduits dans les années 70 par J. H. Conway. Ils forment une classe, notée $\mathbb{S}$, contenant les ordinaux et les nombres réels. Nous pouvons définir sur $\mathbb{S}$ les opérations lui donnant une structure de corps totalement ordonné.

Cet article est la première partie d'un projet qui consiste à définir une somme infinie de nombres surréels et à définir une fonction d'ensemble à valeurs dans les surréels qui aurait des propriétés apparentées à une mesure.

Un nombre surréel est une paire ordonnée $L\big|R$ d'ensembles de surréels tel que tout élément de L est strictement plus petit que tout élément de R. Par exemple, $0 = \{\}\big|\{\}$, $1 = \{0\}\big|\{\}$, $-1 = \{\}\big|\{0\}$, $1/2 = \{0\}\big|\{1\}$. Tout surréel x peut être construit de façon inductive où $x = L\big|R$ est le plus simple élément compris entre L et R. x a une expression canonique $x = \{x^L\}\big|\{x^R\}$. L'addition et la multiplication sont définies par

$$x + y = \{x^L + y, x + y^L\}\big|\{x^R + y, x + y^R\}$$

et par

$$xy = \{x^Ly+xy^L-x^Ly^L, x^Ry+xy^R-x^Ry^R\}\big|\{x^Ly+xy^R-x^Ly^R, x^Ry+xy^L-x^Ry^L\}.$$

De façon plus intuitive nous pouvons voir les surréels comme des suites terminantes de + et de $-$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{S}$ est une suite de *plus* et de *moins* de longueur $l(x)$, un ordinal, (nous noterons $x(\alpha) \in \{+, -\}$ si $\alpha < l(x)$ et $x(\alpha) = 0$ pour $\alpha \geq l(x)$).

Reçu le 3 mai 1996 et, sous forme définitive, le 29 avril 1997.

L'ordre correspond à l'ordre lexicographique avec $- < 0 < +$. x est l'unique élément de longueur minimale compris entre L et R. Par exemple, 0 est la suite vide, $1 = +$, $-1 = -$, $3/2 = \{1\}\big|\{2\} = ++-$.

Conway s'est rendu compte que l'on pouvait exprimer les surréels à l'aide d'une forme normale comme Cantor l'a fait pour les ordinaux, à la différence que pour les surréels nous n'avons pas nécessairement une somme finie. Nous pouvons exprimer tout nombre surréel x sous la forme

$$x = \sum_{i<\Omega_x} r_i \omega^{a_i}$$

où Ω_x est un ordinal, les r_i sont réels et $\{a_i : i < \Omega_x\}$ est une suite décroissante de surréels. La fonction $g : a \mapsto \omega^a$ où $\omega^a = \{0, r\omega^{a^L}\}\big|\{s\omega^{a^R}\}$ $(r, s \in \mathbb{R})$ n'est pas une exponentielle. Elle respecte l'ordre, $\omega^0 = 1$, $\omega^{a+b} = \omega^a\omega^b$ et correspond à l'exponentielle ordinale si a en est un, mais elle n'est pas surjective. Elle exprime plutôt un ordre de grandeur.

La demi-droite surréelle positive peut être divisée en classes d'équivalence par la relation θ définie par $(x, y) \in \theta$ si il existe $n \in \mathbb{N}$tel que $y \leq nx$ et $x \leq ny$. Il y a bijection entre $\mathbb{S}$ et les classes d'équivalence et nous notons par ω^a l'élément de longueur minimum correspondant à la classe a Nous avons donc pour $a < b$ $\omega^a < \omega^b$ mais $(\omega^a, \omega^b) \notin \theta$. Étant donné x et y deux surréels positifs nous noterons $x \ll y$ si x est plus petit que y et $(x, y) \notin \theta$. Nous avons donc pour deux surréels positifs x et y une et une seule des conditions suivantes: $x \ll y$, $(x, y) \in \theta$ ou $y \ll x$.

Remarque. La notation habituelle pour noter les formes normales est $x = \sum \omega^{a_i} r_i$, notre notation est cependant plus simple pour le traitement des décompositions successives.

Gonshor a montré la relation entre une forme normale et la suite de signes correspondante. Ainsi, si nous notons par x^+ l'ordinal obtenu en retirant tous les *moins* du surréel x nous avons le résultat suivant.

Théorème 0. (1) *La suite de signe de ω^a est formée de la juxtaposition suivante: Nous commençons par un +, ensuite chaque suite de plus de a induit une suite de ω^{b^+} plus où b est le plus petit segment initial de a incluant la suite. Chaque suite de moins de a induit une suite de $\omega^{b^+ +1}c$ moins où b est défini comme précédemment et c est la longueur de la suite de moins.*

(2) *La suite de signes de $r\omega^a$, pour r positif est la suite de ω^a suivi de la suite de r en omettant le premier + et en répétant chaque signe ω^{a^+} fois.*

(3) *Si r est négatif nous inversons les signes de (2).*

(4) *La suite de signe de $\sum_{i<\Omega} r_i\omega^{a_i}$ est obtenue en juxtaposant les suites de signes des $r_i\omega^{a_i^0}$ où a_i^0 est la suite (réduite) obtenue en enlevant les moins suivants de la suite de a_i*

(i) *Si $a_i(\delta) = -$ et $\exists j < i$ tel que $\forall \alpha \leq \delta$ $[a_j(\alpha) = a_i(\alpha)]$ alors $a_i(\delta)$ est enlevé.*

(ii) *Si i est successeur, a_{i-1} suivi d'un $-$ est un segment initial de a_i et $l(r_{i-1}) = \omega$ alors le dernier $-$ est retiré.*

Démonstration. [G] théorème 5.12 et corollaire 5.1. □

Introduction. Nous devons d'abord spécifier notre notation. $\mathbb{O}$ dénotera la classe des ordinaux, ω le premier ordinal infini et $\mathbb{N} = \omega \setminus \{0\}$.

Gonshor a fait une étude complète des ϵ-nombres des surréels et des solutions des équations $x = \omega^{-x}$ et$x = \omega^{-\omega^{-x}}$. Nous donnerons ici ses principaux résultats. Il est à noter que pour trouver ces résultats il utilise directement la définition des surréels, c'est-à-dire, $a = F|G$ avec F et G adéquats ainsi que le théorème d'uniformité. Notre méthode de travail est différente. Comme nous le verrons, les ϵ-nombres forment un cas très spécial, c'est pourquoi l'idée de ce travail est plus inspirée de l'étude de $x = \omega^{-x}$ que des ϵ-nombres.

Théorème 1. *Il existe un isomorphisme d'ordre*

$$g : \mathbb{S} \longrightarrow \{x \in \mathbb{S} : x = \omega^x\}$$

Cet isomorphisme nous permet de noter les éléments de $\{x \in \mathbb{S} : x = \omega^x\}$ par ϵ_b où $\epsilon_b = g(b)$. Il a généralisé le théorème 1 aux points fixes d'ordres supérieurs.

Théorème 2. *Soit f une fonction des surréels dans les surréels telle que:*

(1) *pour tout a $f(a)$ est de la forme ω^x pour un x donné;*
(2) *$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$;*
(3) *il existe des ensembles fixes C et D tel que si $a = G\big|H$ où G n'a pas de maximum et H n'a pas de minimum alors $f(a) = [C, f(G)]\big|[D, f(H)]$*

alors il existe un isomorphisme d'ordre $g : \mathbb{S} \longrightarrow \{x \in \mathbb{S} : x = \omega^x\}$ qui respecte les hypothèses par rapport aux ensembles $f_n(C)$, $f_n(D)$ où $n \in \mathbb{N}$ et f_n est la n-ième itérée de f.

Il a donné les suites de signes de ces nombres.

Théorème 3. *Soit a un surréel, a_α et b_α la longueur de la α-ième suite de plus et de la α-ième suite de moins respectivement. a est un ϵ-nombre si et seulement si $a_0 \neq 0$; tous les a_α différents de 0 sont des ϵ-nombres ordinaires tels que $\sup_{\beta<\alpha} a_\beta < a_\alpha$; b_α est un multiple de $\omega^{a_\alpha \omega}$ pour $a_\alpha \neq 0$ et un multiple de $\omega^{c_\alpha \omega}$ où $c_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} a_\beta$ pour $a_\alpha = 0$.*

Théorème 4. *En utilisant la notation du théorème précédent soit $d_\alpha = \sup_{\beta\leq\alpha} a_\beta$. Alors la α-ième suite de plus ϵ_a est de longueur ϵ_{d_α} et la α-ième suite de moins ϵ_a est de longueur $(\epsilon_{d_\alpha})^\omega b_\alpha$.*

Théorème 5. *Soit f une fonction des surréels dans les surréels. Soient également les fonctions sur les ordinaux g et h tel que g est strictement croissante, continue avec image dans $\{\omega^x : x \in \mathbb{O}\}$ et h est quelconque qui n'a pas 0 dans son image. Supposons aussi que la suite de signes de $f(a)$ est donnée par:*

(1) *La α-ième suite de plus de $f(a)$ est de longueur $g(d_\alpha)$.*
(2) *La α-ième suite de moins de $f(a)$ est de longueur $h(d_\alpha)b_\alpha$ où nous utilisons la notation précédente.*

Alors $f(a) = a$ si et seulement si pour tout α, $g(a_\alpha) = a_\alpha$, $\sup_{\beta<\alpha} a_\beta < a_\alpha$, et b_α est un multiple de $[h(d_\alpha)]^\omega$.

Et en conclusion;

Théorème 6. *Soit f satisfaisant les hypothèses des théorèmes 2 et 5. La suite de signes de la fonction de points fixes du théorème 2 f' est donnée de la façon suivante: La α-ième suite de plus de $f'(a)$ est de longueur $g'(d_\alpha)$ où g' est la fonction de points fixes de g dans la théorie des ordinaux et la α-ième suite de moins est de longueur $[hg'(d_\alpha)]^{\omega^{b_\alpha}}$.*

Pour les quasi-ϵ nous avons les deux résultats suivants.

Théorème 7. *L'équation $x = \omega^{-x}$ a une unique solution et cette solution est le surréel défini par $a_0 = 1$; $b_0 = \omega$ et pour chaque naturel n, $a_{n+1} = \omega^{b_n}$ et $b_{n+1} = (a_{n+1})^2$; et pour tout $\alpha \geq \omega$ a_α et b_α sont tous deux nuls.*

Ainsi pour se donner un ordre de grandeur de ce nombre, x commence par un + suivi de ω *moins*, de ω^ω *plus*, de $\omega^{\omega 2}$ *moins*, etc.

Théorème 8. *Les points fixes de la fonctions $g(x) = \omega^{-\omega^{-x}}$ sont les surréels qui commencent par la solution de l'équation $x = \omega^{-x}$ et dont les a_α et b_α suivants sont tous des ϵ-nombres plus grands que ϵ_0 et où chacun est plus grand que le* sup *des précédents.*

Définitions de base.

Notation. Nous noterons par $\mathcal{L}_\omega$ l'ensemble des surréels de longueur inférieure ou égale à ω avec $x(0) = +$.

Définition 1. Soit la relation d'ordre $- < 0 < +$. Nous définissons sur $\mathcal{L}_\omega$ la relation d'ordre $\prec$ de la façon suivante: Soit x, y appartenant à $\mathcal{L}_\omega$ et n_0 le plus petit n tel que $x(n) \neq y(n)$; nous écrirons $x \prec y$ si $x(n_0) < y(n_0)$ et card$\{n < n_0 : x(n) = -\}$ est pair ou si $y(n_0) < x(n_0)$ et card$\{n < n_0 : x(n) = -\}$ est impair.

Exemples. $3/4 = + - + \prec + - - = 1/4$, $1/8 = + - -- \prec + - -+ = 3/8$, $5/8 = + - +- \prec + - + - + = 11/16$, $19/32 + - + - - + \prec + - + - - = 9/16$.

Nous voyons facilement.

Lemme 9. *$\langle \mathcal{L}_\omega ; \prec \rangle$ est un ensemble linéairement ordonné avec un plus grand élément $\omega = + + + \cdots$ et un plus petit élément $1 - 1/\omega = + - + + + \cdots$.*

Démonstration. Soit x et y deux éléments distincts de $\mathcal{L}_\omega$, nous devons montrer que nous avons soit $x \prec y$, soit $y \prec x$. Soit n_0 le plus petit n tel que $x(n) \neq y(n)$. Si card$\{n < n_0 : x(n) = -\}$ est pair alors nous obtenons $x \prec y$ si $x(n_0) < y(n_0)$ et $y \prec x$ si $y(n_0) < x(n_0)$. Si card$\{n < n_0 : x(n) = -\}$ est impair alors $x \prec y$ si $y(n_0) < x(n_0)$ et $y \prec x$ si $x(n_0) < y(n_0)$.

Soit $x \in \mathcal{L}_\omega$ tel que $x \neq \omega$ et n_0 le plus petit n tel que $x(n) \neq \omega(n)$. n_0 est donc le premier n tel que $x(n) \neq +$. Il s'en suit que card$\{n < n_0 : x(n) = -\}$ est pair et donc $x \prec \omega$ car $x(n_0) < \omega(n_0) = +$. Soit $x \in \mathcal{L}_\omega$ tel que $x \neq 1 - 1/\omega$ et n_0 le plus petit n tel que $x(n) \neq (1 - 1/\omega)(n)$. Nous avons deux possibilités. Premièrement, si $n_0 = 1$ alors nous avons directement $1 - 1/\omega \prec x$. Si $1 < n_0$ alors card$\{n < n_0 : (1 - 1/\omega)(n) = -\} = 1$, d'où $1 - 1/\omega \prec x$ car $x(n_0) < + = (1 - 1/\omega)(n_0)$. $\square$

Définition 2. Nous noterons par E l'ensemble des surréels, y, satisfaisant une des deux conditions suivantes:

(1) Il existe une suite infinie $\{y_n : n < \omega\}$ où $y = y_0$ et pour tout n $y_n \in \{\omega^{y_{n+1}}, -\omega^{y_{n+1}}\}$
(2) Il existe une suite finie $\{y_n : n < n_y\}$ où pour tout $n < n_y - 1$ $y_n \in \{\omega^{y_{n+1}}, -\omega^{y_{n+1}}\}$ et $y_{n_y-1} \in \{r, -r\}$ pour un réel positif donné r.

Nous remarquons que si y appartient à E et si y est de la première forme nous avons $l(y) = l(y_n)$ pour tout $n < \omega$. Nous remarquons également qu'aux éléments de E est associée une suite de + et de $-$ correspondants aux coefficients successifs de ω. Si y est un élément de la première forme nous obtenons une suite de longueur ω et si y est un élément de la deuxième forme nous sommes en présence d'une suite de longueur n_y. Ce fait motive la prochaine définition.

Définition 3. Soit $x \in \mathcal{L}_\omega$. Nous noterons par E_x l'ensemble des y appartenant à E tel que la suite des coefficients successifs de y est donnée par x et où si x est de longueur finie alors le dernier coefficient est le signe d'un nombre réel.

Exemples. 1) Si $x = +++\cdots = \omega$ alors

$$E_\omega = \{y \in E : y = \omega^{y_1} = \omega^{\omega^{y_2}} = \cdots\}.$$

$E_\omega = \{y \in E : y = \omega^y\}$ est l'ensemble des ϵ-nombres généralisés.

2) Si $x = +-++ = 7/8$ alors

$$E_{7/8} = \{y \in E : y = \omega^{y_1} = \omega^{-\omega^{y_2}} = \omega^{-\omega^{\omega^r}} \text{ où } r \text{ est un réel postif }\}.$$

3) Si $x = +-+-\cdots = 2/3$ alors

$$E_{2/3} = \{y \in E : y = \omega^{y_1} = \omega^{-\omega^{y_2}} = \omega^{-\omega^{\omega^{y_3}}} = \omega^{-\omega^{\omega^{-\omega^{y_4}}}} = \cdots\}.$$

4) Si $x = +---\cdots = 1/\omega$ alors

$$E_{1/\omega} = \{y \in E : y = \omega^{y_1} = \omega^{-\omega^{y_2}} = \omega^{-\omega^{-\omega^{y_3}}} = \cdots\}.$$

C'est l'ensemble des solutions de $x = \omega^{-\omega^{-x}}$ décrit au théorème 8.

Nous allons suivant Conway [C] utiliser une notation linéaire pour exprimer les exponentiations successives d'éléments de E.

Notation. L'exponentiation successive

$$\omega^{\pm\omega^{\cdot^{\cdot^{\pm y_n}}}}$$

sera maintenant notée

$$\omega^{\pm}\omega^{\pm}\ldots^{\pm}y_n.$$

Théorème 10. *Soit x_1, x_2 appartenant à $\mathcal{L}_\omega$ et y_1, y_2 appartenant à E_{x_1} et E_{x_2} respectivement. Si $x_1 \prec x_2$ alors $y_1 \ll y_2$.*

Démonstration. Soit n_0 le plus petit n tel que $x_1(n) \neq x_2(n)$, n_1 et n_2 les longueurs de x_1 et x_2 respectivement. Nous avons $n_1, n_2 \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$. Supposons que $n_0 < n_1, n_2$. Si card$\{n < n_0 : x(n) = -\}$ est pair alors $x_1(n_0) = -$ et $x_2(n_0) = +$. D'où il existe a et b positifs tels que

$$y_1 = \omega^{x_1(1)}\omega^{x_1(2)} \cdots \omega^{x_1(n_0-1)}\omega^{-a}$$

et

$$y_2 = \omega^{x_2(1)}\omega^{x_2(2)} \cdots \omega^{x_2(n_0-1)}\omega^{b}.$$

$-a < b$ implique $\omega^{-a} \ll \omega^b$. D'où, si nous faisons l'exponentiation successive en partant de la fin jusqu'au début, en inversant l'ordre à chaque signe *moins*, nous trouvons que $y_1 \ll y_2$ parce que nous avons un nombre pair de *moins*. Si card$\{n < n_0 : x(n) = -\}$ est impair alors $x_1(n_0) = +$, $x_2(n_0) = -$ et en inversant $-a$ et b nous avons la conclusion.

Si $n_0 = n_1$ et card$\{n < n_0 : x(n) = -\}$ est pair alors $x_2(n_0) = +$ et nous avons

$$y_1 = \omega^{x_1(1)}\omega^{x_1(2)} \cdots \omega^{x_1(n_0-1)}r$$

et

$$y_2 = \omega^{x_2(1)}\omega^{x_2(2)} \cdots \omega^{x_2(n_0-1)}\omega^{a}.$$

pour un r réel donné et un a positif. Nous avons donc $r \ll \omega^a$ car a est positif et en faisant les exponentiations successives comme précédemment nous trouvons $y_1 \ll y_2$. Les trois autres cas, nommément, $n_0 = n_1$ avec card$\{n < n_0 : x(n) = -\}$ impair et $n_0 = n_2$ avec card$\{n < n_0 : x(n) = -\}$ pair ou impair se traitent de manière analogue. $\square$

Gonshor a amené la notion de grand infinitésimal en parlant de la solution de $x = \omega^{-x}$ et des éléments de $E_{1/\omega}$, mais ce n'est pas strictement exact. En effet, soit $z \in \mathcal{L}_\omega$ et $y \in E_z$ alors pour que y soit infinitésimal nous devons avoir $l(z) \geq 2$ et si nous voulons maximiser y alors nous devons avoir $z(2) = -$. Étant donné que nous avons 2 *moins* nous retombons sur l'ordre $- < 0 < +$ et nous pouvons dire que le z qui engendre les plus grands infinitésimaux est $z = 1/2 - 1/\omega = + - - + + + \cdots$. Nous verrons plus tard l'ordre de grandeur des éléments de $E_{1/2-1/\omega}$.

Développement en signes de $y \in E_x$. Nous allons tout d'abord présenter un algorithme pour donner le début du développement en signes de y en fonction de x et nous terminerons en généralisant une partie du théorème 8.

Nous rappelons le théorème 0 qui donne la suite de signes de ω^a par rapport à a. Ainsi, la suite de signes de ω^a commence par un +, puis pour chaque suite de *plus* de a nous avons ω^b *plus* où b est le nombre total de *plus* jusqu'à et incluant la suite et pour chaque suite de *moins* de a nous avons $\omega^{b+1}c$ *moins* où b est comme précédemment et c est le nombre de *moins* dans la suite. L'algorithme repose sur un fait: Si y est de la forme $y = \omega^{-z}$ alors y commence par exactement un +. Nous voyons déjà un problème si nous voulons trouver la suite de signes de $y \in E_x$ pour un x qui n'a pas de *moins* (c'est-à-dire $x \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$), nous en reparlerons après avoir expliqué l'algorithme.

Le meilleur moyen de présenter l'algorithme est de procéder à un exemple.

Supposons que nous voulons la suite de signes de

$$y = \omega^- \omega^- \omega^+ \omega^- \omega^+ \omega^- z$$

pour un z donné. Soit $y_0 = y$,

$$\begin{aligned}
y_1 &= -\omega^- \omega^+ \omega^- \omega^+ \omega^- z,\\
y_1' &= \omega^- \omega^+ \omega^- \omega^+ \omega^- z,\\
y_2 &= -\omega^+ \omega^- \omega^+ \omega^- z,\\
y_2' &= \omega^+ \omega^- \omega^+ \omega^- z,\\
y_3 &= \omega^- \omega^+ \omega^- z,
\end{aligned}$$

$y_4 = -\omega^+ \omega^- z$, $y_4' = \omega^+ \omega^- z$ et $y_5 = \omega^- z$. Nous avons, en particulier, $y = \omega^{-y_1'}$, $y_1' = \omega^{-y_2'}$, $y_3 = \omega^{-y_4'}$ et $y_5 = \omega^{-z}$.

Soit a un surréel. Nous noterons par b_n^a et c_n^a la longueur de la n-ième suite de *plus* et de *moins*, respectivement. Nous supposons toujours que la n-ième suite de *plus* vient avant la n-ième suite de *moins*, c'est-à-dire nous pouvons avoir $b_0^a = 0$.

$y = \omega^{-y_1'}$ implique que y commence avec un +. Ensuite, nous allons à y_1' qui doit aussi commencer par un +, donc $b_0^{y_1'} = 1$. De là $b_0^{y_1} = 0$ et $c_0^{y_1} = 1$, car $y_1 = -y_1'$ et par le corollaire $c_0^y = \omega$. Puis nous allons à $y_3 = \omega^{-y_4'}$, donc $b_0^{y_3} = 1$ et $b_0^{y_2'} = \omega$ car $y_2' = \omega^{y_3}$. $y_2 = -y_2'$ implique que $b_0^{y_2} = 0$ et $c_0^{y_2} = \omega$ et puis successivement, $c_0^{y_1'} = \omega^2$, $b_1^{y_1} = \omega^2$ et $b_1^y = \omega^{\omega^2}$. En se rendant ensuite à y_5. nous trouvons que $b_0^{y_5} = 1$ et nous remontons jusqu'à c_1^y. Le tableau suivant nous permet de visualiser ce que nous avons fait.

	+	−	+	−	+
y	1	ω	ω^{ω^2}	ω^{ω^4}	
y_1		1	ω^2	ω^{ω^4}	
y_1'	1	ω^2	ω^{ω^4}		
y_2		ω	ω^4		
y_2'	ω	ω^4			
y_3	1	ω^2			
y_4		ω			
y_4'	ω				
y_5	1				

Dans ce tableau que se passe-t-il? Considérons L_1 et L_2, deux lignes consécutives du tableau. Il y a trois opérations possibles de L_2 à L_1: premièrement, exponentiation simple si les deux lignes sont positives; deuxièmement, si L_2 est négative alors nous avons exponentiation avec apparition d'un 1 dans la première colonne de L_1 et troisièmement si L_1 est négative alors la ligne L_1 est la ligne L_2 translatée d'une case. Ceci nous suggère que nous pouvons raccourcir l'algorithme.

Nous allons, en effet, définir une suite à partir de $x \in \mathcal{L}_\omega$ liant le développement en signe de x au signe de l'élément correspondant à une ligne de l'algorithme.

Définition 4. Soit $x \in \mathcal{L}_\omega$. Nous associons à x la suite $\tilde{x}$ formée de 0 et de 1 de la façon suivante: Pour chaque $n < \omega$ nous écrivons un 1 à droite de ce qui est déjà écrit si $x(n) = +$ et 01 si $x(n) = -$.

Exemple. Si $x = + - + - - + - - + \cdots$ alors $\tilde{x} = 1011010110101011 \cdots$.

Lemme 11. *La fonction associant x à $\tilde{x}$ est une bijection entre $\mathcal{L}_\omega$ et l'ensemble des suites de* 0 *et* 1 *qui n'ont pas deux* 0 *consécutifs.* $\square$

Nous avons bien ce que nous voulons, en effet, chaque *plus* de x engendre une ligne positive de l'algorithme et chaque *moins* engendre deux lignes la première négative et la deuxième positive. Notre tableau devient donc

$\tilde{x}$	+	$-$	+	$-$	+
1	1	ω	ω^{ω^2}	ω^{ω^4}	
0		1	ω^2	ω^{ω^4}	
1	1	ω^2	ω^{ω^4}		
0		ω	ω^4		
1	ω	ω^4			
1	1	ω^2			
0		ω			
1	ω				
1	1				
0					

Ainsi, à ce niveau nous procédons de manière purement automatique. Nous trouvons le premier 0 tel que la première colonne de la ligne au dessus du 0 n'a pas déjà un 1, nous écrivons alors un 1 à cet endroit, puis nous remontons en calculant l'exposant si la ligne correspond à un 1 et nous la translatons de une colonne si la ligne correspond à un 0 et nous recommençons avec le prochain 0.

Si nous considérons le cas $x = \omega$ nous savons que les éléments appartenant à E_ω commencent avec au moins ϵ_0 *plus* ce qui est conforme à l'idée de l'algorithme. En effet, la création du premier 1 est repoussé à l'infini la longueur de la première suite de signes doit donc être plus grand que $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$ De même, pour tout x se terminant par ω *plus* nous trouvons les b_n et c_n par la méthode puis à la ligne où débute la période de 1 la valeur dans la première colonne est un ϵ-nombre.

L'algorithme nous suggère deux choses. Premièrement, pour tout x de longueur infinie il existe un élément canonique, noté y_x, appartenant à E_x. Cet élément est de longueur ϵ_0 et cette longueur est minimale dans E_x. Par exemple, pour E_ω et $E_{1/\omega}$ vus dans Gonshor $y_\omega = \epsilon_0$ et $y_{1/\omega}$ est la solution unique de $x = \omega^{-x}$. Deuxièmement, si x est de longueur infinie et ne se termine pas par ω *plus* alors nous devons avoir la même situation que pour $E_{1/\omega}$, c'est-à-dire, pour tout $\alpha \geq \omega$ b_α et c_α doivent être des ϵ-nombres supérieurs à ϵ_0 et plus grands que le sup des précédents. Ces deux faits constituent le théorème suivant.

Notation. Nous noterons par $\mathcal{I}_\omega$ l'ensemble des éléments de longueur infinie de $\mathcal{L}_\omega$.

Théorème 12. *Soit x appartenant à $\mathcal{I}_\omega$ tel que x ne se termine pas par ω plus, soit également y un élément de E_x. Si nous notons par d_α la longueur de la α-ième suite de signes de y alors y commence par y_x, l'élément canonique donné par l'algorithme, et par la suite (c'est-à-dire pour chaque $\alpha \geq \omega$) d_α est un ϵ-nombre supérieur à ϵ_0 tel que* $\sup_{\beta<\alpha} d_\beta < d_\alpha$.

Démonstration. Nous appelerons y_n l'élément sur la n-ième ligne du tableau et d_α^n la longueur de la α-ième suite de signes de y_n pour $\alpha \geq \omega$. Si $n = 0$ nous écrirons plus simplement d_α.

Nous remarquons que l'effet de décaler les suites de signes de un si nous effectuons l'opération ω^b avec b négatif n'affecte pas les α-suites pour $\alpha \geq \omega$. Cela signifie que pour $\alpha \geq \omega$ la α-ième suite de signes change de signe si et seulement si l'opération dans l'algorithme correspond à un changement de signe (c'est-à-dire la ligne correspond à un 0 de la suite $\tilde{x}$).

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\tilde{x}(n) \neq 0$, nous avons alors $y_n = \omega^{y_{n+1}}$. Étudions les relations entre d_α^n et d_α^{n+1}. Soit a_α le nombre de *plus* jusqu'à et incluant la α-ième suite de y_{n+1}.

(1) Si la α-ième suite est positive alors $d_\alpha^n = \omega^{a_\alpha}$ et par conséquent $d_\alpha^{n+1} \leq a_\alpha \leq d_\alpha^n$ où l'inégalité est stricte si d_α^n n'est pas un ϵ-nombre.
(2) Si la α-ième suite est négative alors $d_\alpha^n = \omega^{a_\alpha+1} \cdot d_\alpha^{n+1}$, d'où $d_\alpha^{n+1} \leq d_\alpha^n$ avec égalité si $\omega^{a_\alpha+1} \ll d_\alpha^{n+1}$.

Si $\alpha = \omega$ nous montrons premièrement que $\epsilon_0 < d_\omega$. Remarquons que pour tout $\alpha \geq \omega$ la α-ième suite de $y = y_0$ a le même signe que la α-ième de y_1. Si la ω-ième suite de y est négative alors nous avons $\epsilon_0 < \epsilon_0 \cdot \omega \cdot d_\omega^1 = \omega^{\epsilon_0+1} \cdot d_\omega^1 = d_\omega$. Si la ω-ième suite de y est positive alors nous devons avoir $\epsilon_0 < \omega^{\epsilon_0 + d_\omega^1} = d_\omega$.

Montrons que d_ω est un ϵ-nombre. Supposons le contraire. Nous notons que si il existe un n tel que d_ω^n est un ϵ-nombre alors pour tout $k \leq n$ nous avons $d_\omega^k = d_\omega^n$ car d_ω^n serait un ϵ-nombre plus grand que ϵ_0. Considérons la suite $\{d_\omega^n\}_{n<\omega}$, d'après (1) et (2) cette suite est décroissante. Étant donné que x contient une infinité de *moins* et que chaque *moins* correspond à un changement de signe il existe une infinité de n tel que la ω-ième suite de y_n est positive. Soit $\{d_\omega^{n_k}\}_{n_k<\omega}$ la sous-suite de $\{d_\omega^n\}_{n<\omega}$ telle que la ω-ième suite de y_{n_k} est positive, par (1) cette suite est soit strictement décroissante, soit il existe un n_{k_0} tel que $d_{n_{k_0}}$ est un ϵ-nombre; mais la deuxième possibilité contredit l'hypothèse et la première le bon ordre des ordinaux. Nous avons donc montré que d_ω est un ϵ-nombre plus grand que ϵ_0.

Soit $\alpha > \omega$ tel que pour tout $\beta \in [\omega, \alpha)$ d_β soit un ϵ-nombre supérieur à ϵ_0 et que $\sup_{\omega\leq\gamma<\beta} d_\gamma < d_\beta$. La preuve se fait encore une fois en deux temps. Nous montrons que d_α est supérieur à $\epsilon = \sup_{\omega\leq\gamma<\alpha} d_\gamma$, pour ce faire nous procédons comme pour $\alpha = \omega$ en substituant ϵ_0 par ϵ. La preuve montrant que d_ω est un ϵ-nombre reste vrai pour $\alpha \geq \omega$. $\square$

Périodicité de x et solutions d'équations de type exponentiel. Cette section est consacrée à l'étude des $x \in \mathcal{I}_\omega$ qui sont périodiques et à l'effet de la période sur $\tilde{x}$ et sur la répétition des lignes de l'algorithme.

Proposition 13. *Si $\tilde{x}$ est périodique alors sa période commence par un* 1.

Démonstration. Soit $\tilde{x}(n)\tilde{x}(n+1)\cdots\tilde{x}(m)$ la période de $\tilde{x}$. Si $\tilde{x}(n)=0$ alors $\tilde{x}(n-1)=1$ car on ne peut avoir deux 0 consécutifs et $\tilde{x}(m+1)=0$ d'où la répétition de $\tilde{x}(n-1)\tilde{x}(n)\cdots\tilde{x}(m-1)$. □

Si $\tilde{x}$ est périodique alors la proposition 13 nous permet, pour simplifier, de supposer que la période commence à $\tilde{x}(0)$.

Théorème 14. *Si $x\in\mathcal{I}_\omega$ alors x est périodique si et seulement si $\tilde{x}$ est périodique.*

Démonstration. $\Rightarrow$ Directement de la définition de $\tilde{x}$.

$\Leftarrow$ Si nous excluons les cas où la période de $\tilde{x}$ est 1, 10 ou de la forme $1010\cdots01$ qui sont triviaux, nous sommes certains que dans la période de $\tilde{x}$ il y a deux 1 consécutifs. Considérons i tel que $\tilde{x}(i-1)=\tilde{x}(i)=1$ alors d'après la définition de $\tilde{x}$ il existe un $k<\omega$ correspondant à i tel que $x(k)=+$. Nous formons $x(k+1)\ x(k+2)\cdots$, jusqu'à ce que nous ayons terminé une période et la suite $x(k)\ x(k+1)\ x(k+2)\cdots$ trouvée est périodique dans le développement de x. □

Théorème 15. *Soit $\tilde{x}$ périodique de période $\tilde{x}(0)\cdots\tilde{x}(n)$. Si nous notons par y_k l'élément de la k-ième ligne de l'algorithme nous avons $y_0=y_x\Longrightarrow y_{n+1}=y_x$.*

Démonstration. Si $x=\omega$ alors c'est trivial et si $x\neq\omega$ alors la période contient des 0. Nous savons que $\tilde{x}(k)=0$ si et seulement si $y_k=-y_{k+1}$ et $\tilde{x}(k)=1$ si et seulement si $y_k=\omega^{y_{k+1}}$. Ce sont les deux opérations permises d'une ligne à l'autre. De plus y_k commence par un + si et seulement si $\tilde{x}(k+1)=0$.

Soit k donné. La longueur de la n-ième suite de signe de y_k est uniquement déterminée par les éléments $\tilde{x}(k),\tilde{x}(k+1),\ldots,\tilde{x}(j)$ où $\tilde{x}(j)$ est le n-ième 0 de la suite $\tilde{x}(k)\tilde{x}(k+1)\cdots$ (ou le $(n+1)$-ième si $\tilde{x}(k+1)=0$). D'où par la périodicité de $\tilde{x}(0)\cdots\tilde{x}(n)$ nous avons $y_0=y_{n+1}=y_{(n+1)k}$ pour tout k naturel. □

Corollaire 16. *Soit x un élément périodique de $\mathcal{I}_\omega$. Si la période de x commence à $x(0)$ ou à $x(1)$ dans le cas où $x(1)=-$ (c'est-à-dire la période de x commence par un plus ou un moins respectivement) alors il existe k tel que*

$$y_x=\quad\omega^{x(1)}\omega^{x(2)}\omega\ldots,\omega^{x(k)}y_x$$

De plus, si la période de x contient un nombre impair de moins alors y_x en est la seule solution et si elle contient un nombre pair de moins alors l'ensemble solution de l'équation est E_x.

Démonstration. Les deux cas impliquent que la période de $\tilde{x}$ commence à $\tilde{x}(0)$. En effet, si la période commence à $x(0)$ c'est trivial et si la période commence à $x(1)$ alors la proposition 13 nous dit que la période de $\tilde{x}$ doit commencer à $\tilde{x}(0)$.

Le théorème nous dit qu'il existe au moins une solution, y_x. Mais étant donné que la correspondance $x\mapsto y_x$ est injective toutes les solutions doivent avoir y_x comme segment initial. Les solutions appartiennent donc toutes à E_x et par le théorème 12 nous savons que la seule chose importante pour déterminer si $y\neq y_x$ est une solution est le nombre de changement de signes des α-ièmes suites de signes c'est-à-dire le nombre de lignes négatives: y est une solution si et seulement si il y a un nombre pair de lignes négatives. □

Fonctions de points fixes généralisées. Notre but dans cette section est de généraliser les résultats des ϵ-nombres et des fonctions de points fixes en utilisant les ensembles E_x. Nous devons premièrement introduire de nouvelles notations.

Notation. Pour tout $\beta \in \mathbb{O}$ nous connaissons les fonctions g_β définies par

$$g_0 : \alpha \longmapsto \omega^\alpha,$$

$$g_1 : \mathbb{O} \longrightarrow \{\alpha : \omega^\alpha = \alpha\}$$

et pour tout β

$$g_\beta : \mathbb{O} \longrightarrow \{\alpha : g_{\beta-1}(\alpha) = \alpha\}$$

si β est successeur et g_β est définie par $g_\beta(\alpha) = \sup_{\gamma<\beta} g_\gamma(\alpha)$ si β est limite. Chaque fonction ordonnant les points fixes de la précédente. Nous posons alors ξ_β^α comme étant le α-ième point fixe de la fonction g_β.

Ainsi, $\xi_0^0 = \epsilon_0$, $\xi_0^1 = \epsilon_1$, $\xi_1^0 = \epsilon_{\epsilon_{\cdot_{\cdot_{\cdot}}}} = \xi_0^{\xi_0^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}} = x$, $\xi_2^0 = x_{x_{\cdot_{\cdot_{\cdot}}}} = \xi_1^{\xi_1^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$, etc. Nous notons que pour tout $\alpha < \beta$ et $\gamma \in \mathbb{O}$ il existe $\gamma \leq \delta$ avec $\xi_\beta^\gamma = \xi_\alpha^\delta$.

Définition 5. Soit $x \in \mathcal{I}_\omega \setminus \{\omega\}$. Nous définissons la fonction

$$\varphi_x : \mathbb{S} \longrightarrow E_x$$

par

$$(\varphi_x(z))(\alpha) = \begin{cases} y_x(\alpha), & \text{si } \alpha < \epsilon_0. \\ \zeta(\beta), & \text{si } \epsilon_\beta \leq \alpha < \epsilon_{\beta+1}. \end{cases}$$

Lemme 17. *La fonction φ_x est un isomorphisme d'ordre.*

Démonstration. Le théorème 12 nous dit que les α-ièmes suites de signes pour $\alpha \geq \omega$ suivent les indices des ϵ-nombres. $\square$

Nous voyons facilement.

Théorème 18. *Soit z et $\tilde{z}$ appartenant à $\mathcal{I}_\omega$ tels que $\tilde{z}$ est un segment final de z commençant à k_0, c'est-à-dire $\tilde{z}(k) = z(k + k_0)$ pour tout $k < \omega$. Nous avons pour tout $t \in \mathbb{S}$,*

$$\varphi_z(t) = \omega^{z(i)}\omega \cdots \omega^{z(k_0-1)}\varphi_{\tilde{z}}(t)$$

si card$\{j < k_0 : z(j) = -\}$ *est impair et*

$$\varphi_z(t) = \omega^{z(i)}\omega \cdots \omega^{z(k_0-1)}\varphi_{\tilde{z}}(-t)$$

si card$\{j < k_0 : z(j) = -\}$ *est pair.*

Démonstration. Directement de la définition de φ_z et par un argument semblable à celui du corollaire 16. $\square$

Notation. Soit $1 \leq \alpha$ et β un ordinal. Nous définissons Γ_α^β comme étant l'union:

$$\Gamma_\alpha^\beta := [\xi_\alpha^\beta, \xi_\alpha^{\beta+1}) \cup [\xi_\alpha^{\xi_\alpha^\beta}, \xi_\alpha^{\xi_\alpha^{\beta+1}}) \cup \cdots .$$

Dans tout ce qui suit x sera un élément de $\mathcal{I}_\omega \setminus \{\omega\}$.

Théorème 19. *φ_x possède des points fixes. Si z est un point fixe de φ_x alors $l(z) \in \{\xi_1^\alpha : \alpha \in \mathbb{O}\}$ et z a la forme*

$$z(\alpha) = \begin{cases} y_x(\alpha), & \text{si } \alpha < \epsilon_0. \\ y_x(\beta), & \text{si } \alpha \in \Gamma_0^\beta \text{ pour } \epsilon_0 \leq \alpha < \xi_1^0 \end{cases}$$

et pour $\xi_1^0 \leq \alpha$ les signes viennent en blocs de longueurs appartenant à $\{\xi_1^\alpha : 1 \leq \alpha\}$ tel que la longueur de chacun est plus grande que le sup *des longueurs des précédents.*

Démonstration. Notons premièrement que si z a la forme décrite alors z a la longueur mentionnée.

Montrons que z a la forme décrite. $z \in E_x$ implique que $z(\alpha) = y_x(\alpha)$ pour $\alpha < \epsilon_0$. Soit $\alpha \in [\epsilon_0, \epsilon_{\epsilon_0})$, il existe $\beta < \epsilon_0$ tel que $\alpha \in [\epsilon_\beta, \epsilon_{\beta+1})$. D'où par la définition de φ_x, $z(\alpha) = (\varphi_x(z))(\alpha) = z(\beta) = y_x(\beta)$. Par induction nous trouvons facilement que pour $\alpha \in [\epsilon_\beta, \epsilon_{\beta+1}) \cup [\epsilon_{\epsilon_\beta}, \epsilon_{\epsilon_{\beta+1}}) \cup \cdots$ nous avons $z(\alpha) = y_x(\beta)$.

Posons $z(\xi_1^0) = * \in \{+, -\}$. Nous devons alors avoir $z(\alpha) = *$ pour tout $\alpha \in [\xi_1^0, \epsilon_{\xi_1^0+1})$, puis aussi pour $\alpha \in [\xi_1^0, \epsilon_{\epsilon_{\xi_1^0+1}})$ et par induction nous arrivons à $z(\alpha) = *$ pour tout $\alpha \in [\xi_1^0, \xi_1^1)$. Le même phénomène se produit pour tout α tel que $z(\xi_1^\alpha) \neq 0$. $\square$

Nous allons maintenant regarder ce qui se passe lorsque nous composons des fonctions φ_x. Nous allons tout d'abord élargir la classe des φ_x possibles.

Définition 6. Soit $x \in \pm\mathcal{I}_\omega$. Nous posons x^* comme étant le surréel différent de x seulement pour la première composante (c'est-à-dire x est positif ssi x^* est négatif).

Remarque. x^* n'est pas égal à $-x$ car pour avoir $-x$ nous devons inverser tous les signes de x.

Définition 7. Soit x est un surréel. Si $x \in \mathcal{I}_\omega$ alors nous posons $E_{x^*} = -E_x$, $y_{x^*} = -y_x$ et $\varphi_{x^*}(t) = -\varphi_x(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{S}$.

Notation. Si nous considérons la fonction λ qui ordonne les ordinaux limites tel que $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \omega$ et plus généralement λ_α est le α-ième ordinal limite alors tout ordinal β peut s'écrire sous la forme $\beta = \lambda_\alpha + n$ où $n < \omega$ et $\lambda_\alpha = \sup\{\lambda \leq \beta : \lambda \text{ limite }\}$. Pour α, β ordinaux définissons pour $n \in \mathbb{N}$ ${}^n\xi_\alpha^\beta$ par ${}^1\xi_\alpha^\beta = \xi_\alpha^\beta$ et ${}^{n+1}\xi_\alpha^\beta = \xi_\alpha^{{}^n\xi_\alpha^\beta}$.

Nous avons donc avec cette notation $\Gamma_\alpha^\beta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [{}^n\xi_\alpha^\beta, {}^n\xi_\alpha^{\beta+1})$.

Définition 8. Soit $\{x_\alpha\}_{\alpha<\beta} \subseteq \pm\mathcal{I}_\omega \setminus \{\pm\omega\}$. Nous posons

$$E_{\{x_\alpha\}_{\alpha<\beta}} = \{x \in E_{\{x_\alpha\}_{\alpha<\beta-1}} : \exists t \in \mathbb{S}\ \varphi_{x_{\beta-1}}(t) = x\}$$

si β est successeur et $E_{\{x_\alpha\}_{\alpha<\beta}} = \bigcap_{\eta<\beta} E_{\{x_\alpha\}_{\alpha<\eta}}$ si β est limite.

$$y_{\{x_\alpha\}_{\alpha<\beta}}(\delta) = \begin{cases} y_{x_0}(\delta), & \text{si } \delta < \epsilon_0 \\ y_{x_\alpha}(\tau), & \text{si } \delta \in [{}^{n+1}\xi_\zeta^\tau, {}^{n+1}\xi_\zeta^{\tau+1}) \end{cases}$$

où $\alpha = \lambda_\zeta + n$ et

$$(\varphi_{\{x_\alpha\}_{\alpha<\beta}}(t))(\delta) = \begin{cases} y_{\{x_\alpha\}_{\alpha<\beta}}(\delta), & \text{si } \delta < {}^{n+1}\xi_\zeta^0 \\ t(\tau), & \text{si } \delta \in [\xi_\zeta^\tau, \xi_\zeta^{\tau+1}) \end{cases}$$

et $\beta = \lambda_\zeta + n$.

Nous pourrions aussi définir les compositions avec $z = \pm\omega$, cependant nous ne pourrions donner de formules compréhensives. Ce qui précède ainsi que la démonstration du théorème 19 nous donnent une bonne idée de ce qui se passe pour les points fixes d'ordres supérieurs.

Définition 9. Soit x appartenant à $\mathcal{I}_\omega \setminus \{\omega\}$. Nous définissons les ensembles E_x^α, surréels y_x^α et les fonctions φ_x^α de la manière suivante:

$$E_x^0 = E_x, \quad y_x^0 = y_x \quad \text{et} \quad \varphi_x^0 = \varphi_x : \mathbb{S} \cong E_x.$$

Ayant E_x^α, y_x^α et φ_x^α alors

$$E_x^{\alpha+1} = \{z : \varphi_x^\alpha(z) = z\},$$

$y_x^{\alpha+1}$ est l'élément de longueur minimale de $E_x^{\alpha+1}$ et

$$\varphi_x^{\alpha+1} : \mathbb{S} \longrightarrow E_x^{\alpha+1}$$

est donné par

$$(\varphi_x^{\alpha+1}(z))(\delta) = \begin{cases} y_x^\alpha(\delta), & \text{si } \delta < l(y_x^{\alpha+1}) = \xi_{\alpha+1}^0 \\ z(\beta), & \text{si } \delta \in [\xi_{\alpha+1}^\beta, \xi_{\alpha+1}^{\beta+1}). \end{cases}$$

Si α est limite alors $E_x^\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} E_x^\beta$, y_x^α est défini par $y_x^\alpha(\delta) = y_x^{\beta_\delta}(\delta)$ où α_δ est le plus petit β tel que $\delta \leq \xi_\alpha^0$ et

$$(\varphi_x^\alpha(z))(\delta) = \begin{cases} y_x^\beta(\delta), & \text{si } \delta < \xi_\alpha^0, \\ z(\beta), & \text{si } \delta \in [\xi_\alpha^\beta, \xi_\alpha^{\beta+1}). \end{cases}$$

Théorème 20. *Soit $x \in \mathcal{I}_\omega/\{\omega\}$. Nous avons les propositions suivantes.*

(1) *y_x^α existe (donc E_x^α n'est pas vide).*

(2) *φ_x^α est un isomorphisme d'ordre de $\mathbb{S}$ à E_x^α.*

(3) *Si α est successeur alors*

$$y_x^\alpha(\delta) = \begin{cases} y_x(\delta), & si\ \delta < \epsilon_0, \\ y_x(\beta) & si\ \delta \in \bigcup_{\zeta<\alpha} \Gamma_\zeta^\beta \end{cases}$$

et z est un point fixe de φ_x^α si z est de la forme:

$$z(\delta) = \begin{cases} y_x(\delta) & si\ \alpha < \epsilon_0, \\ y_x(\beta) & si\ \delta \in \bigcup_{\zeta\leq\alpha} \Gamma_\zeta^\beta, \end{cases}$$

et par la suite les signes viennent en blocs de longueur $\xi_{\alpha+1}^\gamma$ où $1 \leq \gamma$ tel que chacun est plus grand que le sup *des précédents.*

(4) *Si α est limite alors $y_x^\alpha(\delta) = y_x^\zeta(\beta)$ si $\delta \in \Gamma_\zeta^\beta$ (où $\zeta < \alpha$) et z est un point fixe de φ_x^α si z est de la forme:*

$$z(\delta) = \begin{cases} y_x(\delta) & si\ \alpha < \epsilon_0, \\ y_x(\beta) & si\ \delta \in \bigcup_{\zeta<\alpha} \Gamma_\zeta^\beta, \end{cases}$$

et par la suite les signes viennent en blocs de longueur ξ_α^γ où $1 \leq \gamma$ tel que chacun est plus grand que le sup *des précédents.*

Démonstration. 1) et 2) sont triviaux. Les preuves de 3) et 4) se font comme pour le théorème 19. □

English extended abstract. Gonshor studied the surreals satisfying the equations $x = \omega^x$ and $x = \omega^{-x}$ respectively. In this paper, we study the class of surreals numbers whose normal form can be successively decomposed in a strictly vertical way (i.e. $x = x_0 = \omega^{x_1}$ and for all n $x_n = \pm\omega^{x_{n+1}}$). We particulary study the surreals having an infinite development.

To each development we associate a surreal x of length smaller or equal to ω defined such that $x(k)$ is the sign of the k^{th}-level of the development.

We define an order $\prec$ on $\mathcal{L}_\omega$ (the set of positive surreals of length $\leq \omega$) such that for any two surreals s and t having different developments x_s and x_t we have $x_s \prec x_t \Rightarrow s \ll t$.

For $x \in \mathcal{L}_\omega$, we define E_x to be the class of surreals having the development x. We show that for x of length ω E_x has a canonical element y_x of length ϵ_0 and that the sign sequence of the elements of E_x ($x \neq \omega$) begin with y_x followed by blocks of signs such that the length of the α^{th} block, d_α, is an ϵ-number greater than ϵ_0 and such that $\sup_{\beta<\alpha} d_\beta < d_\alpha$. This result and the result for $x = \omega$ allows us to define an order-isomorphism $\varphi_x : \mathbb{S} \cong E_x$ for all x of length ω. We study the compositions of such isomorphisms and give the definitions for higher order-isomorphisms and fixed points.

We give an algorithm to find the sign sequence of the canonical element y_x of E_x. We define an associated sequence $\tilde{x} \in \{0,1\}^\omega$ that gives the operation between each line of the algorithm and with this $\tilde{x}$ we show that if x is periodic with period begining at $x(0)$ or at $x(1)$ if $x(1) = -$ then there exists a $k \in \mathbb{N}$ such that

$$y_x = \omega^{x(1)\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\omega^{x(k)y_x}}}}}}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[A] N. L. Alling, *Foundations of analysis over surreal number fields*, North-Holland, Amsterdam, 1987.

[C] J. H. Conway, *On numbers and games*, Academic Press, London, 1976.

[G] H. Gonshor, *An introduction to the theory of surreal numbers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

D. LEMIRE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE STATISTIQUE
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE CENTRE-VILLE
MONTRÉAL QC H3C 3J7
CANADA
E-MAIL: lemired@dms.umontreal.ca