Ann. Sci. Math. Québec **21** (1997), no. 2, 123–131.

TEMPS D'ATTEINTE DE CERCLES POUR DES PROCESSUS DE BESSEL BIDIMENSIONNELS

MARIO LEFEBVRE ET RICHARD LABIB

RÉSUMÉ. Soit $(x(t), y(t))$ un processus de Bessel bidimensionnel et soit T le temps que prend le processus, parti entre deux cercles concentriques, pour atteindre l'un ou l'autre de ces cercles. On montre comment la méthode des similitudes peut être utilisée pour calculer explicitement la fonction génératrice des moments de T en résolvant directement l'équation de Kolmogoroff que vérifie cette fonction. On considère également les cas limites.

ABSTRACT. Let $(x(t), y(t))$ be a two-dimensional Bessel process and let T be the time taken by the process, starting between two concentric circles, to hit either of these circles. We show how the method of similarity solutions can be used to compute explicitly the moment generating function of T by solving directly the Kolmogoroff backward equation it satisfies. Limiting cases are also considered.

1. Introduction. On considère le processus stochastique bidimensionnel $(x(t), y(t))$ défini par le système d'équations différentielles stochastiques

$$dx(t) = \frac{\alpha_1 - 1}{2x(t)} dt + dW_1(t), \tag{1}$$

$$dy(t) = \frac{\alpha_2 - 1}{2y(t)} dt + dW_2(t), \tag{2}$$

où α_i est une constante non négative, pour $i = 1, 2$, et $W_1(t)$ et $W_2(t)$ sont des mouvements browniens standards indépendants. Alors $x(t)$ et $y(t)$ sont des processus de Bessel indépendants. Il faut cependant préciser que lorsque α_1 et α_2 sont inférieurs à 1 dans les équations (1) et (2), les termes $dt/x(t)$ et $dt/y(t)$ doivent être interprétés comme des valeurs principales, car dans ce cas on a :

$$\int_0^t \frac{ds}{x(s)} = \infty \text{ et } \int_0^t \frac{ds}{y(s)} = \infty. \tag{3}$$

Maintenant, le point 0 est une frontière de sortie pour un processus de Bessel unidimensionnel de paramètre $\alpha = 0$. De plus, si $\alpha \in (0, 2)$, le point 0 est une frontière régulière, tandis que l'origine est une frontière d'entrée si $\alpha \geq 2$ (voir Karlin et Taylor

Reçu le 19 août 1996 et, sous forme définitive, le 14 avril 1997.

(1981, p. 239)). Cela signifie que pour un processus de Bessel $x(t)$ dont la valeur initiale $x(0)$ est positive, la frontière $x = 0$ est inaccessible (en un temps fini) si $\alpha \geq 2$. Par contre, $x(t)$ atteint l'origine si $0 \leq \alpha < 2$.

Notons que lorsque $\alpha = n \in \mathbb{N}$ le processus de Bessel $x(t)$ peut être représenté comme suit :

$$x(t) = [Z_1^2(t) + Z_2^2(t) + \cdots + Z_n^2(t)]^{1/2}, \tag{4}$$

où $Z_1(t), \ldots, Z_n(t)$ sont des mouvements browniens standards indépendants. En particulier, lorsque $\alpha = 1$ le processus de Bessel est identique au mouvement brownien standard réfléchissant, c'est-à-dire, la valeur absolue du mouvement brownien standard. Ceci confirme le fait que le processus de Bessel de paramètre $\alpha = 1$ atteint l'origine. Toutefois, lorsque $\alpha = 1$ le processus de Bessel ne satisfait pas à l'équation (1); il faut alors remplacer $(\alpha_1 - 1)dt/x(t)$ par $dl(t)$, où $l(t)$ est le temps local, dans cette équation.

Dans cette note, on suppose que $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$. (En fait, il suffit que $\min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$.) De plus, lorsque $0 < \alpha_1 < 2$ (respectivement $0 < \alpha_2 < 2$), on suppose que 0 est une frontière instantanément réfléchissante pour le processus $x(t)$ (respectivement $y(t)$). Ainsi, si $x(0) \geq 0$ et $y(0) \geq 0$, alors le processus $(x(t), y(t))$ ne peut sortir du premier quadrant. Soit

$$\begin{aligned} T(x,y) = \inf\{t > 0 : x^2(t) + y^2(t) = d_1^2 \text{ ou } d_2^2 \mid x(0) = x > 0, \\ y(0) = y > 0,\ d_1^2 < x^2 + y^2 < d_2^2\}. \end{aligned} \tag{5}$$

C'est-à-dire, $T(x,y)$ $(= T(x, y, d_1, d_2))$ est le temps que prend le processus stochastique bidimensionnel $(x(t), y(t))$ pour atteindre soit le cercle défini par $x^2(t) + y^2(t) = d_1^2$ $(d_1 > 0)$, soit celui défini par $x^2(t) + y^2(t) = d_2^2$ $(d_2 > 0)$, étant donné que le point de départ du processus est situé entre ces deux cercles.

On pose :

$$M(x, y; a) := E[e^{-aT(x,y)}], \tag{6}$$

de sorte que la fonction $M(x, y; a)$ est la fonction génératrice des moments (ou la transformée de Laplace, ici) de l'instant de premier passage $T(x, y)$. On suppose que le paramètre a est réel et non négatif. Alors la fonction $M(x, y; a)$ satisfait à l'équation inverse de Kolmogoroff

$$\frac{1}{2}M_{xx} + \frac{1}{2}M_{yy} + \frac{\alpha_1 - 1}{2x}M_x + \frac{\alpha_2 - 1}{2y}M_y = aM. \tag{7}$$

Cette équation est valide pour tout couple (x, y) dans C, où

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, d_1^2 < x^2 + y^2 < d_2^2\}. \tag{8}$$

De plus, on a la condition aux frontières :

$$M(x, y; a) = 1 \quad \text{si } x^2 + y^2 = d_1^2 \text{ ou } d_2^2. \tag{9}$$

Notons aussi que la fonction $M(x, y; a)$ doit être telle que

$$0 < M(x, y; a) < 1 \quad \forall (x, y) \in C. \tag{10}$$

Pour résoudre l'équation (7), sous la condition (9), nous allons utiliser une technique connue sous le nom de méthode des similitudes (voir Dresner (1983), par exemple). Cette technique permet de transformer une équation aux dérivées partielles comme l'équation (7) en une équation différentielle ordinaire en supposant que la fonction M est en fait de la forme

$$M(x, y; a) = N(z; a), \tag{11}$$

où $z = f(x, y)$. De plus, puisque la région C définie en (8) est bornée, on peut affirmer que la solution de l'équation (7), sous la condition (9), est *unique* (voir Zaidman (1989, p. 281), par exemple).

Des résultats explicites sont généralement difficiles à obtenir pour des problèmes de premier passage en deux ou plusieurs dimensions. Même dans le cas du mouvement brownien bidimensionnel, les formules qui correspondent à celles que nous allons démontrer dans cette note ont été obtenues relativement récemment, soit en 1980 par Wendel, lequel a également généralisé des formules classiques de Doob (1955) et Spitzer (1958), en particulier.

Shiga et Watanabe (1973) ont démontré que la somme des carrés de deux processus de Bessel indépendants, de paramètres α_1 et α_2, est le carré d'un processus de Bessel de paramètre $\alpha_1 + \alpha_2$. Par conséquent, le problème de calculer la distribution de la variable aléatoire T peut se ramener à un problème de temps de premier passage unidimensionnel. De plus, ce problème de temps de premier passage unidimensionnel a déjà été résolu par Kent (1978). Cependant, dans cette note nous voulons montrer comment la méthode des similitudes peut être utilisée pour résoudre facilement le problème qui nous intéresse, et ce, sans faire appel au résultat de Shiga et Watanabe.

On pourrait aussi se servir de cette méthode des similitudes pour résoudre des problèmes de temps de premier passage pour d'autres processus de diffusion et dans d'autres systèmes de coordonnées.

À la section 2, nous allons obtenir une formule explicite pour la fonction génératrice des moments de $T(x, y)$. Les cas limites où d_1 est égal à 0 et où, ensuite, d_2 est égal à l'infini seront traités à la section 3. De plus, dans cette même section, nous calculerons la moyenne de la variable aléatoire $T(x, y)$ dans les différents cas considérés dans cette note. Des remarques et des généralisations possibles seront finalement mentionnées à la section 4.

2. Fonction génératrice des moments de $T(x, y)$. Pour résoudre l'équation (7) sous la condition aux frontières (9), par la méthode des similitudes, il est naturel de supposer que la fonction M est en fait de la forme

$$M(x, y; a) = N(x^2 + y^2; a). \tag{12}$$

On pose :

$$z = x^2 + y^2. \tag{13}$$

L'équation (7) devient

$$2zN''(z; a) + (\alpha_1 + \alpha_2)N'(z; a) = aN(z; a). \tag{14}$$

De plus, la condition aux frontières est maintenant

$$N(d_1^2; a) = N(d_2^2; a) = 1. \tag{15}$$

La solution générale de l'équation (14) est

$$N(z; a) = z^{(1-\alpha)/2}[c_1 I_\nu(\sqrt{2az}) + c_2 K_\nu(\sqrt{2az})], \tag{16}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes,

$$\alpha := \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}, \tag{17}$$

$$\nu := \alpha - 1 \tag{18}$$

et I_ν et K_ν sont des fonctions de Bessel modifiées (voir Abramowitz et Stegun (1965, p. 374), par exemple). En utilisant les conditions (15), on trouve que

$$\begin{aligned} N(z; a) = \frac{z^{-\nu/2}}{\Delta}\big\{&[d_1^\nu K_\nu(\sqrt{2a}d_2) - d_2^\nu K_\nu(\sqrt{2a}d_1)]I_\nu(\sqrt{2az}) \\ &+ [d_2^\nu I_\nu(\sqrt{2a}d_1) - d_1^\nu I_\nu(\sqrt{2a}d_2)]K_\nu(\sqrt{2az})\big\}, \end{aligned} \tag{19}$$

où

$$\Delta := I_\nu(\sqrt{2a}d_1)K_\nu(\sqrt{2a}d_2) - K_\nu(\sqrt{2a}d_1)I_\nu(\sqrt{2a}d_2). \tag{20}$$

Finalement, puisque la solution de l'équation (7), sous la condition (9), est *unique*, comme nous l'avons mentionné précédemment, on peut maintenant énoncer la proposition qui suit.

Proposition 2.1. *La fonction génératrice des moments de la variable aléatoire $T(x, y)$ définie en (5) est donnée par la formule (19), où $z = x^2 + y^2$.*

À la section 3, nous allons considérer le cas où d_1 est égal à 0, puis celui où d_2 est égal à l'infini. Nous allons aussi calculer la moyenne de la variable aléatoire $T(x, y)$ pour ces cas limites, de même que pour le cas traité dans la présente section.

3. Cas limites. Considérons d'abord le cas où la constante d_1 dans la définition de la variable aléatoire $T(x, y)$ est égale à 0 et où $\alpha_i \geq 2$ pour $i = 1, 2$. (En fait, il suffit de supposer que $\alpha_1 + \alpha_2 > 2$.) Rappelons que dans ce cas le processus stochastique $(x(t), y(t))$ ne peut atteindre l'axe des x ou celui des y. Puisque la nouvelle région de continuation C est encore bornée, on peut affirmer que la solution de l'équation (7), sous la condition

$$M(x, y; a) = 1 \quad \text{si } x^2 + y^2 = d_2^2, \tag{21}$$

demeure *unique*. Cette solution est donnée par l'équation (16). Maintenant, en utilisant la condition (10) et le fait que (voir Abramowitz et Stegun (1965, p. 375))

$$I_\nu(z) \sim (z/2)^\nu/\Gamma(\nu + 1) \tag{22}$$

et

$$K_\nu(z) \sim (1/2)\Gamma(\nu)(z/2)^{-\nu} \tag{23}$$

lorsque z décroît vers 0 et $\nu > 0$, on déduit qu'il faut choisir $c_2 = 0$ dans (16). En se servant de la condition à la frontière (21), on obtient le résultat qui suit.

Corollaire 3.1. *La fonction génératrice des moments de la variable aléatoire $T(x, y)$ définie en (5), dans le cas où d_1 est égal à 0, est donnée par*

$$M(x, y; a) = \left(\frac{d_2^2}{z}\right)^{\nu/2} \frac{I_\nu(\sqrt{2az})}{I_\nu(\sqrt{2a}d_2)}, \tag{24}$$

où $z = x^2 + y^2$.

Remarques. 1. Par définition, on a (voir Abramowitz et Stegun (1965, p. 375)) :

$$I_\nu(z) = (z/2)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4}z^2)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)}. \tag{25}$$

En utilisant cette expression, on peut réécrire la formule (24) comme suit :

$$M(x, y; a) = \frac{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{az/2}{\Gamma(\nu+2)} + \frac{(az/2)^2}{2!\Gamma(\nu+3)} + \cdots}{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \frac{ad_2^2/2}{\Gamma(\nu+2)} + \frac{(ad_2^2/2)^2}{2!\Gamma(\nu+3)} + \cdots}. \tag{26}$$

En prenant la limite lorsque le paramètre a décroît vers 0, on obtient :

$$P[T(x, y) < \infty] = 1. \tag{27}$$

C'est-à-dire, le processus bidimensionnel $(x(t), y(t))$ est certain d'atteindre le cercle défini par $x^2(t)+y^2(t) = d_2^2$ lorsque le point de départ du processus est situé à l'intérieur du cercle (dans le premier quadrant). De plus, puisque l'on a évidemment :

$$T(x, y, d_1, d_2) \leq T(x, y, d_1 = 0, d_2), \tag{28}$$

on peut conclure que, dans le cas de deux frontières, le temps mis par le processus $(x(t), y(t))$ pour atteindre l'un ou l'autre des deux cercles est fini avec une probabilité de 1 également.

2. On peut montrer que les moments de la variable aléatoire $T(x, y)$ existent (lorsque $d_2 < \infty$). Alors, en dérivant le membre droit de l'équation (26) par rapport au paramètre a, puis en prenant la limite lorsque a décroît vers 0, on obtient que

$$E[T(x, y)] = \frac{(d_2^2 - z)\Gamma(\nu + 1)}{2\Gamma(\nu + 2)} = \frac{d_2^2 - z}{2\alpha}. \tag{29}$$

Maintenant, puisque les moments de $T(x, y)$ existent, on peut écrire que

$$M(x, y; a) = 1 - aE[T(x, y)] + (a^2/2)E[T^2(x, y)] + \cdots . \tag{30}$$

Soit

$$m(x, y) := E[T(x, y)]. \tag{31}$$

Alors on déduit de l'équation (7) que la fonction $m(x, y)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$m_{xx} + m_{yy} + \frac{\alpha_1 - 1}{x} m_x + \frac{\alpha_2 - 1}{y} m_y = -2. \tag{32}$$

De plus, dans le cas de deux frontières, on a :

$$m(x,y) = 0 \quad \text{si } x^2 + y^2 = d_1^2 \text{ ou } d_2^2. \tag{33}$$

Puisque l'on sait que la distribution de $T(x,y)$ ne dépend que de $z = x^2 + y^2$, on peut écrire que

$$m(x,y) = \mu(z). \tag{34}$$

L'équation (32) devient

$$2z\mu''(z) + 2\alpha\mu'(z) = -1, \tag{35}$$

où $\alpha := (\alpha_1 + \alpha_2)/2$. Avec les conditions $\mu(d_1^2) = \mu(d_2^2) = 0$, on trouve facilement que

$$\mu(z) = \frac{d_2^2 - z}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1^{-2\nu} - d_2^{-2\nu}}\right](z^{-\nu} - d_2^{-2\nu}). \tag{36}$$

Enfin, en prenant la limite lorsque d_1 décroît vers 0 dans le membre droit de l'équation (36), on retrouve la formule (29). Notons toutefois que la formule (36) nous donne la moyenne de la variable aléatoire $T(x,y)$ dans le cas où il y a deux frontières, et ce, beaucoup plus facilement qu'en dérivant le membre droit de l'équation (19) par rapport au paramètre a, puis en prenant la limite lorsque a décroît vers 0. Notons aussi que la moyenne de $T(x,y)$ est la même pour tous les cas où la somme $\alpha_1 + \alpha_2$ est égale à 2α, ce qui devait être le cas, étant donné le résultat de Shiga et Watanabe (1973).

Finalement, pour obtenir le moment d'ordre k de $T(x,y)$ par rapport à l'origine, c'est-à-dire $\mu_k := E[T^k(x,y)]$, on peut soit dériver k fois sa fonction génératrice des moments par rapport à a (et prendre la limite lorsque a décroît vers 0), soit résoudre l'équation aux dérivées partielles que vérifie μ_k. Dans le cas du problème avec deux frontières, la deuxième méthode est certainement plus efficace. Notons toutefois que l'équation que vérifie μ_k dépend aussi de μ_{k-1}.

3. Lorsque le paramètre ν est égal à 3/2, 5/2, 7/2, ... , la fonction $M(x,y;a)$ peut être exprimée à l'aide de fonctions élémentaires. Par exemple, si $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 3$, de sorte que $\nu = \alpha - 1 = 3/2$, en utilisant la formule (voir Abramowitz et Stegun (1965, p. 443))

$$\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} I_{3/2}(z) = -\frac{\text{sh}(z)}{z^2} + \frac{\text{ch}(z)}{z}, \tag{37}$$

on trouve que la fonction $M(x,y;a)$ peut s'écrire sous la forme

$$M(x,y;a) = \left(\frac{d_2^2}{z}\right)^{3/2}\left[\frac{-\text{sh}(\sqrt{2az}) + \text{ch}(\sqrt{2az})\sqrt{2az}}{-\text{sh}(\sqrt{2a}d_2) + \text{ch}(\sqrt{2a}d_2)\sqrt{2a}d_2}\right]. \tag{38}$$

Pour compléter cette section, nous allons considérer le cas où la constante d_2 est égale à l'infini dans la définition de la variable aléatoire $T(x,y)$. Dans ce cas, on peut prendre $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$. Cette fois-ci, étant donné que (voir Abramowitz et Stegun (1965, pp. 377-378))

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \tag{39}$$

et

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \tag{40}$$

lorsque z tend vers l'infini, on conclut que l'on doit choisir $c_1 = 0$ dans (16), sinon la condition (10) ne sera pas respectée. Puisque l'infini est une frontière inaccessible pour tout processus de Bessel, la condition à la frontière devient

$$M(x, y; a) = 1 \quad \text{si } x^2 + y^2 = d_1^2. \tag{41}$$

En se servant de cette condition, on obtient le résultat qui suit :

$$M(x, y; a) = \left(\frac{d_1^2}{z}\right)^{\nu/2} \frac{K_\nu(\sqrt{2az})}{K_\nu(\sqrt{2a}d_1)}, \tag{42}$$

où $z = x^2 + y^2$.

Maintenant, lorsque d_2 est égal à l'infini, la région de continuation C n'est plus bornée, de sorte que l'on ne peut plus affirmer que la solution de l'équation (7), sous la condition (41), est unique. Cependant, en utilisant les résultats de Kent (1978) et de Shiga et Watanabe (1973), on peut démontrer le corollaire suivant.

Corollaire 3.2. *La fonction génératrice des moments de la variable aléatoire $T(x, y)$ définie en (5), dans le cas où d_2 est égal à l'infini, est donnée par la formule (42).*

Remarques. 1. Notons d'abord que dans le cas du mouvement brownien standard bidimensionnel, obtenu en posant $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ dans (1) et (2), la fonction génératrice des moments de $T(x, y)$, calculée par Spitzer (1958) puis généralisée par Wendel (1980), est donnée par

$$M(x, y; a) = \frac{K_0(\sqrt{2a}(x^2 + y^2)^{1/2})}{K_0(\sqrt{2a}d_1)} \tag{43}$$

lorsque $x^2 + y^2 \geq d_1^2$. Ce résultat correspond à la formule obtenue avec $\nu = 0$ en (42). Cependant, dans le cas du mouvement brownien, le processus $(x(t), y(t))$ peut se déplacer partout dans le plan, contrairement au processus de Bessel qui est confiné dans le premier quadrant.

2. En utilisant l'expression asymptotique de la fonction $K_\nu(z)$ lorsque z décroît vers 0 et $\nu > 0$, donnée en (23), on trouve que

$$P[T(x, y) < \infty] = \lim_{a \downarrow 0} M(x, y; a) = (d_1^2/z)^\nu. \tag{44}$$

Donc, dans le cas du problème extérieur, la probabilité que le processus $(x(t), y(t))$ atteigne la frontière $(x^2(t) + y^2(t) = d_1^2)$ en un temps fini est égale à $(d_1^2/z)^\nu$ si $\nu > 0$.

3. Pour obtenir la moyenne de la variable aléatoire $T(x, y)$, on peut prendre la limite lorsque d_2 tend vers l'infini dans la formule (36). Notons que cette formule peut être réécrite sous la forme

$$\mu(z) = \frac{d_1^2 - z}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{d_1^2 - d_2^2}{d_1^{-2\nu} - d_2^{-2\nu}}\right](z^{-\nu} - d_1^{-2\nu}), \tag{45}$$

d'où l'on tire que

$$E[T(x,y)] \to \infty \quad \text{lorsque } d_2 \to \infty \tag{46}$$

$\forall \nu > -1$. Naturellement, ce résultat découle directement de la remarque précédente dans le cas où $\nu > 0$.

4. Comme dans le cas où $d_1 = 0$, lorsque le paramètre ν est égal à 1/2, 3/2, 5/2, ..., la fonction $M(x, y; a)$ peut être exprimée à l'aide de fonctions élémentaires. Par exemple, si $\nu = 1/2$, en se servant de la formule (voir Abramowitz et Stegun (1965, p. 444))

$$K_{1/2}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}, \tag{47}$$

on obtient que

$$M(x, y; a) = \left(\frac{d_1^2}{z}\right)^{1/2} \exp[\sqrt{2a}(d_1 - \sqrt{z})]. \tag{48}$$

4. Conclusion. Dans cette note, nous avons calculé la fonction génératrice des moments, $M(x, y; a)$, de la variable aléatoire $T(x, y)$ qui désigne le temps que prend un processus de Bessel bidimensionnel pour atteindre l'un ou l'autre de deux cercles centrés à l'origine. De plus, nous avons aussi considéré les cas limites où il n'y a qu'une seule frontière. Nous avons utilisé la méthode des similitudes pour résoudre l'équation aux dérivées partielles que vérifie cette fonction $M(x, y; a)$.

Les calculs ont été effectués, sauf pour le cas où $d_1 = 0$, pour des valeurs des paramètres α_1 et α_2 des processus de Bessel supérieures à 0. Dans ce cas, le processus bidimensionnel $(x(t), y(t))$ ne peut sortir du premier quadrant. En effet, si le paramètre α_1 du processus de Bessel $x(t)$ est supérieur ou égal à 2 alors $x(t)$ ne peut tout simplement pas atteindre l'origine; de plus, dans le cas où $\alpha_i \in (0, 2)$, nous avons supposé que l'origine était une frontière instantanément réfléchissante.

Pour compléter notre étude, on pourrait aussi essayer d'obtenir la fonction $M(x, y; a)$ dans le cas où $d_1 = 0$ et $\alpha_1 \in (0, 2)$ et/ou $\alpha_2 \in (0, 2)$. (Plus précisément, lorsque $0 < \alpha_1 + \alpha_2 < 2$, en fait.)

Finalement, on pourrait généraliser notre travail en considérant le même problème que celui dans cette note, mais pour un processus de Bessel en n dimensions, comme l'a fait Wendel (1980) pour le mouvement brownien standard. Il est certain, par récurrence, que la méthode des similitudes s'appliquerait aussi dans ce cas.

Remerciements. Les auteurs tiennent à remercier les arbitres de cette note pour leurs commentaires pertinents. Cette recherche a été subventionnée par le Conseil de recherche en sciences naturelles et en génie du Canada.

English extended abstract. We consider the two-dimensional diffusion process $(x(t), y(t))$ defined by the system of stochastic differential equations (1), (2). The processes $x(t)$ and $y(t)$ are independent Bessel processes. Let $T(x, y)$ be the random variable defined in (5). We want to compute the moment generating function of the first passage time $T(x, y)$.

Since $x^2(t) + y^2(t)$ is a squared Bessel process, this problem can be solved by considering a one-dimensional Bessel process. However, here we want to show how the method of similarity solutions can be used to solve such a first passage time problem.

In Section 2, we transform the Kolmogoroff backward equation satisfied by the function $M(x, y; a)$ defined in (6) into an ordinary differential equation by assuming that the function M can in fact be written as $M(x, y; a) = N(z; a)$, where $z := x^2 + y^2$. This ordinary differential equation is solved explicitly and the moment generating function of $T(x, y)$ is deduced at once from this solution given in (19).

In Section 3, the limiting cases when first the constant d_1 in the definition of $T(x, y)$ is equal to zero, then when the constant d_2 is equal to infinity, are treated. The value of the function $M(x, y; a)$ when d_1 is equal to zero is given in (24), whereas the formula for the case when d_2 is equal to infinity appears in (42).

Finally, the moments of the random variable $T(x, y)$ when $d_2 < \infty$ are also considered. Again, the method of similarity solutions is used to solve the partial differential equation satisfied by the mean $m(x, y)$ of $T(x, y)$. The general formula for $m(x, y)$ is given in (36). When d_2 tends to infinity, $m(x, y)$ also increases to infinity.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Abramowitz et I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1965.
2. J. L. Doob, *A probability approach to the heat equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 216–280.
3. L. Dresner, *Similarity Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations*, Research Notes in Mathematics, vol. 88, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA - London, 1983.
4. S. Karlin et H. Taylor, *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1981.
5. J. Kent, *Some probabilistic properties of Bessel functions*, Ann. Probab. **6** (1978), 760–770.
6. T. Shiga et S. Watanabe, *Bessel diffusions as a one-parameter family of diffusion processes*, Z. Wahrscheinlichkeitsteorie und Verw. Gebiete **27** (1973), 37–46.
7. F. Spitzer, *Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 187–197.
8. J. G. Wendel, *Hitting spheres with Brownian motion*, Ann. Probab. **8** (1980), 164–169.
9. S. Zaidman, *Une introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles*, Les Publications CRM, Université de Montréal, Montréal, 1989.

M. LEFEBVRE ET R. LABIB
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CAMPUS DE L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
CASE POSTALE 6079, SUCCURSALE CENTRE-VILLE
MONTRÉAL QC H3C 3A7
CANADA