Ann. Sci. Math. Québec **17** (1993), no. 2, 187–193.

SUR LE PRODUIT INFINI DE b_f-ESPACES

MANUEL SANCHIS

RÉSUMÉ. On démontre que si $\{X_i : i \in I\}$ est une famille d'espaces localement dans la classe de Frolík $\mathcal{P}$ des espaces X tels que pour tout espace pseudocompact Y le produit $X \times Y$ est pseudocompact, alors l'espace $\prod_{i\in I} X_i$ est un b_f-espace. Ce résultat est appliqué à l'étude du produit d'une famille de groupes topologiques séparés localement pseudocompacts.

ABSTRACT. We prove that if $\{X_i : i \in I\}$ is a family of spaces locally in the Frolík's class $\mathcal{P}$ of spaces X such that for every pseudocompact space Y the product $X \times Y$ is pseudocompact, then the space $\prod_{i\in I} X_i$ is a b_f-space. We apply this result to the study of a product of a family of Hausdorff locally pseudocompact topological groups. See the English extended abstract at the end of the paper.

Introduction. Tous les espaces rencontrés sont supposés complètement réguliers et séparés. Une partie B d'un espace X est dite bornée (dans X) si toute fonction réelle continue sur X reste bornée sur B. Un espace X est dit pseudocompact s'il est lui-même borné. Un espace X est nommé un b_f-espace si toute fonction réelle sur X dont la restriction à toute partie bornée admet un prolongement continu à tout l'espace X est elle-même continue. Les k_r-espaces (des espaces X où une fonction rélle est continue si sa restriction à toute partie compacte K de X est une fonction continue sur K) et les espaces localement pseudocompacts sont des exemples usuels de b_f-espaces.

Les b_f-espaces apparaissent de façon naturelle dans l'étude des espaces de fonctions réelles continues quand on y considère la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées [2] et ils ont été appliqués en différents contextes, par exemple dans l'étude de la distribution du foncteur θ du c-replété et du foncteur ν du replété (ou "real-compactification" de Hewitt) d'un espace X [9, 11] et pour caractériser les parties compactes d'espaces fonctionnels [1]. Récemment on a établi qu'une grande classe de b_f-espaces sont héréditaires par sous-espaces ouverts (voir [10] pour les détails).

Le but de cette note est de continuer l'étude commencée dans [3] sur le produit de b_f-espaces en étudiant le produit infini. Nous montrerons que si $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ est une famille d'espaces localement dans la classe de Frolík $\mathcal{P}$ (c'est-à-dire, localement dans la classe des espaces dont leur produit par un espace pseudocompact quelconque est

Reçu le 22 juin 1992 et, sous forme définitive, le 12 février 1993.
Travail supporté par le fonds MI.25.043/92 de la Fundació Caixa Castelló.

©Association mathématique du Québec

encore pseudocompact), alors l'espace produit $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ est un $\mathrm{b_f}$-espace. Ce résultat est le meilleur possible dans le sens suivant: Si X est un espace qui n'est pas localement dans la classe de Frolík $\mathcal{P}$, on démontre dans [3, th. 13] qu'il existe un $\mathrm{b_f}$-espace Y tel que $X \times Y$ n'est pas un $\mathrm{b_f}$-espace. Le résultat obtenu est appliqué pour caractériser les fonctions réelles continues sur un produit de groupes topologiques séparés localement pseudocompacts.

Préliminaires et notations. Pour la notation et la terminologie on renvoie à [6]. Étant donné un espace produit $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, un point $x \in X$ sera noté par (x_α). Si $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de X, on notera par x^n_α la coordonnée α^{e} de l'élément n^{e} de la suite. Étant donnée une partie F de A, on notera par X_F le sous-produit de X défini par $\prod_{\alpha\in F} X_\alpha$.

Rappelons qu'un sous-espace Y d'un espace produit $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ est appelé un Σ^0-espace s'il existe un point $x \in X$ tel que $y \in Y$ si, et seulement si, le cardinal de l'ensemble $\{\alpha \in A \mid y_\alpha \neq x_\alpha\}$ est fini. Étant donné un espace $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, on dit qu'une fonction réelle sur X est Σ^0-continue si sa restriction à tout Σ^0-espace Y de X est une fonction continue sur Y. De façon analogue, une fonction sur X est 2-continue si sa restriction à tout sous-espace $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ de X, où pour tout $\alpha \in A$ le cardinal de Y_α est plus petit ou égal à 2, est une fonction continue.

Le résultat suivant sera utilisé par la suite.

Proposition 1 [8, th. 1.1]. *Si f est une fonction 2-continue et Σ^0-continue sur un espace $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, alors f est continue sur X.*

Étant donnée une partie A de X, on notera par $\mathrm{cl}_X A$ (resp. $\mathrm{int}_X A$) l'adhérence (resp. l'intérieur) de A dans X. Une partie A de X est dite régulière fermée si $A = \mathrm{cl}_X(\mathrm{int}_X A)$. $\mathbb{R}$ désignera l'espace des nombres réels muni de la topologie usuelle et $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers positifs. Les résultats suivants sur la classe de Frolík $\mathcal{P}$ y seront usés:

(R1) [5, th. 3.4] Tout espace compact appartient à $\mathcal{P}$.
(R2) [5, §3.2] La classe $\mathcal{P}$ est héréditaire par sous-espaces réguliers fermés.
(R3) [7, th. 3.1] La classe $\mathcal{P}$ est fermée par produits arbitraires.

Produit d'espaces localement dans la classe $\mathcal{P}$. Étant donné un espace X, nous dirons qu'une fonction réellle sur X est $\mathcal{P}_r$-continue si sa restriction à toute partie Y de X telle que $Y \in \mathcal{P}$, est continue sur Y. Si toute fonction $\mathcal{P}_r$-continue sur X est elle-même continue, nous dirons que X est un $\mathcal{P}_r$-espace. Évidemment on a que tout $\mathcal{P}_r$-espace est un $\mathrm{b_f}$-espace. Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 2. *Soit $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ une famille d'espaces localement dans la classe de Frolìk $\mathcal{P}$, alors l'espace produit $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ est un $\mathcal{P}_r$-espace.*

Preuve. Soit f une fonction réelle $\mathcal{P}_r$-continue sur X. Compte tenu de (R1) et de la prop. 1 il suffit de prouver que f est une fonction Σ^0-continue.

Nous allons raisonner par contradiction. Soit $x = (x_\alpha)$ un point de X, soit Y le Σ^0-sous-espace de X qui contient x et supposons que la fonction $f|_Y$ ne soit pas continue au point x. Alors, on peut trouver une partie ouverte U de $\mathbb{R}$ et deux parties régulières fermées V et G de $\mathbb{R}$ de façon que

$$f(x) \in \mathrm{int}_{\mathbb{R}} V \subset V \subset \mathrm{int}_{\mathbb{R}} G \subset G \subset U$$

et telles que, pour n'importe quel voisinage W de x dans Y, on a que $f(W)$ n'est pas contenu dans U.

Nous allons construire par induction une suite $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ de parties finies de A, avec $F_p \subset F_{p+1}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, et une suite de points $\{y^n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ telles que :

(1) Si $F_p = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_h\}$, on peut trouver pour chaque $\alpha_t \in F_p$ une partie $S^p_{\alpha_t}$ régulière fermée de X_{α_t} telle que

$$x_{\alpha_t} \in \mathrm{int}_{X_{\alpha_t}} S^p_{\alpha_t}, \quad S^p_{\alpha_t} \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad f\Big(\prod_{\alpha \in A} W_\alpha\Big) \subset V$$

où chaque W_α est défini comme suit

$$W_\alpha = \begin{cases} S^p_{\alpha_t} & \text{si } \alpha = \alpha_t \text{ et } \alpha_t \in F_p \\ \{x_\alpha\} & \text{si } \alpha \in A \setminus F_p. \end{cases}$$

(2) Si $p > q$ et $\alpha \in F_q$, alors $S^p_\alpha \subset \mathrm{int}_{X_{\alpha_t}} S^q_{\alpha_t}$ $p = 2, 3, \ldots$

(3) $y^p_\alpha \in \mathrm{int}_{X_\alpha} S^p_\alpha$, pour tout $\alpha \in F_p$, $p = 1, 2, \ldots$

(4) $y^p_\alpha \in X_\alpha \setminus S^{p+1}_\alpha$, pour tout $\alpha \in F_{p+1} \setminus F_p$, $p = 1, 2, \ldots$

(5) $y^p_\alpha = x_\alpha$ si $\alpha \notin F_{p+1}$, $p = 1, 2, \ldots$

(6) $f(y^p) \notin U$, $p = 1, 2, \ldots$

Examinons la construction pour $n = 1$. Soit $\alpha_1 \in A$. Compte tenu de ce que X_{α_1} est un espace localement dans la classe $\mathcal{P}$, la partie $\prod_{\alpha \in A} T_\alpha$ de X où

$$T_\alpha = \begin{cases} X_{\alpha_1} & \text{si } \alpha = \alpha_1 \\ \{x_\alpha\} & \text{si } \alpha \neq \alpha_1. \end{cases}$$

est un $\mathcal{P}_r$-espace. Par conséquent, la restriction de f à $\prod_{\alpha \in A} T_\alpha$ est une fonction continue. Puisque X_{α_1} est localement dans $\mathcal{P}$, par (R2) et par continuité on peut trouver une partie $S^1_{\alpha_1}$ régulière fermée de X_{α_1} telle que

$$x_{\alpha_1} \in \mathrm{int}_{X_{\alpha_1}} S^1_{\alpha_1}, \quad S^1_{\alpha_1} \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad f\Big(\prod_{\alpha \in A} W_\alpha\Big) \subset V$$

où chaque W_α est défini comme suit

$$W_\alpha = \begin{cases} S^1_{\alpha_1} & \text{si } \alpha = \alpha_1 \\ \{x_\alpha\} & \text{si } \alpha \neq \alpha_1. \end{cases}$$

Soit $W = \prod_{\alpha \in A} H_\alpha$ la partie ouverte de X définie par

$$H_\alpha = \begin{cases} \mathrm{int}_{X_{\alpha_1}} S^1_{\alpha_1} & \text{si } \alpha = \alpha_1 \\ X_\alpha & \text{si } \alpha \neq \alpha_1. \end{cases}$$

Compte tenu de la façon dont on a choisi U, il existe un point $y^1 \in W \cap Y$ tel que $f(y^1) \notin U$. À partir de cela, nous définissons $F_1 = \{\alpha_1\}$ et prenons y^1 comme étant le premier élément de la suite de points cherchée. Soit C la partie de A définie par la condition

$$\alpha \in C \iff y^1_\alpha \neq x_\alpha.$$

Puisque $f(y^1) \notin U$ et $y^1 \in Y$, C est finie et, de plus, on y peut trover des éléments différents de α_1. Nous définissons $F_2 = F_1 \cup C$.

En appliquant (R3), les sous-produits finis de X sont localement dans $\mathcal{P}$, et par suite la restriction de f à $X_{F_2} \times \prod_{\alpha \in A \setminus F_2} \{x_\alpha\}$ est une fonction continue. On peut donc trouver des parties régulières fermées $\{S^2_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in F_2}$ avec $S^2_{\alpha_i} \subset X_{\alpha_i}$ et $S^2_{\alpha_i} \in \mathcal{P}$ telles que

$$x_{\alpha_i} \in \mathrm{int}_{X_{\alpha_i}} S^2_{\alpha_i}, \quad S^2_{\alpha_1} \subset \mathrm{int}_{X_{\alpha_1}} S^1_{\alpha_1}, \quad y^1_{\alpha_i} \notin S^2_{\alpha_i}, \alpha_i \in F_2 \setminus F_1$$

et

$$f\Big(\prod_{\alpha \in A} W_\alpha\Big) \subset V$$

où

$$W_\alpha = \begin{cases} S^2_{\alpha_i} & \text{si } \alpha = \alpha_i \text{ et } \alpha_i \in F_2 \\ \{x_\alpha\} & \text{si } \alpha \notin F_2. \end{cases}$$

Ceci achève la construction pour $n = 1$. Étant donné un $p \in \mathbb{N}$, nous allons maintenant supposer qu'on a construit les ensembles $F_1, F_2, \ldots, F_p$ et les points $\{y^q\}_{q=1}^{p-1}$ qui vérifient les conditions désirées et nous allons définir l'ensemble F_{p+1} et le point y^p. Soit $W = \prod_{\alpha \in A} H_\alpha$ la partie ouverte de X définie par

$$H_\alpha = \begin{cases} \mathrm{int}_{X_{\alpha_i}} S^p_{\alpha_i} & \text{si } \alpha = \alpha_i \text{ et } \alpha_i \in F_p \\ X_\alpha & \text{si } \alpha \neq \alpha_i. \end{cases}$$

Raisonnant comme dans le cas $n = 1$, il existe un point $y^p \in W \cap Y$ tel que $f(y^p) \notin U$. Prenons ce point comme le p^{e} point de la suite cherchée. Soit maintenant C la partie de A définie par la condition

$$\alpha \in C \iff y^p_\alpha \neq x_\alpha$$

et soit $F_{p+1} = F_p \cup C$. Puisque $y^p \in Y$, F_{p+1} est fini. En outre, compte tenu de ce que $f(y^p) \notin U$, C contient des éléments qui n'appartiennent pas à F_p.

Soit $F_{p+1} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_h\}$. En utilisant le qur les sous-produits finis de X sont localement dans $\mathcal{P}$, on peut raisonner comme dans le cas $n = 1$ pour trouver des parties régulières fermées $\{S^{p+1}_{\alpha_t}\}_{\alpha_t \in F_{p+1}}$ de X_{α_t} satisfaisant $S^{p+1}_{\alpha_t} \in \mathcal{P}$ telles que

$$\begin{gathered} x_{\alpha_t} \in \mathrm{int}_{X_{\alpha_t}} S^{p+1}_{\alpha_t}, \quad \text{si } \alpha_t \in F_{p+1}, \\ S^{p+1}_{\alpha_t} \subset \mathrm{int}_{X_{\alpha_t}} S^p_{\alpha_t}, \quad \text{si } \alpha_t \in F_p, \\ y^p_{\alpha_t} \notin S^{p+1}_{\alpha_t}, \text{si } \alpha_t \in F_{p+1} \setminus F_p, \end{gathered}$$

et

$$f\Big(\prod_{\alpha \in A} W_\alpha\Big) \subset V$$

où

$$W_\alpha = \begin{cases} S^{p+1}_{\alpha_t} & \text{si } \alpha = \alpha_t \text{ et } \alpha_t \in F_{p+1} \\ \{x_\alpha\} & \text{si } \alpha \notin F_{p+1}. \end{cases}$$

Ceci achève la construction.

Étant donné $\alpha \in A$, soit P_α la partie de X_α définie par les trois conditions suivantes :

(a) si $\alpha = \alpha_1$ alors $P_\alpha = S^1_{\alpha_1}$;

(b) si $\alpha \notin \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p$ alors $P_\alpha = \{x_\alpha\}$;

(c) si $\alpha \in \bigcup_{p>1} F_p$, il existe un $q \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha \in F_q \setminus F_{q-1}$, alors $P_\alpha = S^q_\alpha \cup \{\{y^{q-1}_\alpha\}$.

Soit $P = \prod_{\alpha\in A} P_\alpha$. Soit $\{W^q\}_{q=2}^\infty$ la suite des parties de P définies par :

$$W^q = \prod_{\alpha\in A} T^q_\alpha \cap P \cap f^{-1}(\mathbb{R} \setminus G)$$

où

$$T^q_\alpha = \begin{cases} \{X_\alpha\}, & \alpha \in A \setminus F_{q+1}, \\ \operatorname{int}_{X_\alpha} S^q_\alpha, & \alpha \in F_q, \\ X_\alpha \setminus S^{q+1}_\alpha, & \alpha \in F_{q+1} \setminus F_q. \end{cases}$$

À partir de la définition de P et des conditions (3), (4),(5) et (6), on vérifie aisément que $y^q \in f^{-1}(\mathbb{R} \setminus U)$. Ainsi $y^q \in W^q$, et donc $W^q \neq \varnothing$, $q = 2, 3, \ldots$ D'ailleurs, par la définition de P et (R3) on a que $P \in \mathcal{P}$. La restriction de f à P est donc une fonction continue et $\{W^q\}_{q=2}^\infty$ est une suite de parties ouvertes et non vides de P. Compte tenu de ce que P est pseudocompact, $\{W^q\}_{q=2}^\infty$ admet un point d'accumulation $y \in P$. Par continuité, on a que $f(y) \in \mathbb{R} \setminus \operatorname{int}_{\mathbb{R}} G$. Nous allons voir que cela aboutit à une contradiction.

Étant donnés les points $x = (x_\alpha)$ et $y = (y_\alpha)$ on pose $M = \prod_{\alpha\in A}\{x_\alpha, y_\alpha\}$. Compte tenu de ce que M est compact et de ce que f est une fonction $\mathcal{P}_r$-continue, la restriction de f à M est une fonction continue au point y ((R1)). Il existe donc une partie finie F de A et un $z \in M$ tels que

$$z_\alpha = \begin{cases} x_\alpha, & \alpha \notin F, \\ y_\alpha, & \alpha \in F \end{cases}$$

et $f(z) \in \mathbb{R} \setminus V$.

Soit H la partie de A formée des α tels qure $z_\alpha \neq x_\alpha$. Compte tenu de ce que $f(x) \in \operatorname{int}_{\mathbb{R}} V$, on a que $H \neq \varnothing$, et puisque $y \in P$, on a que $H \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_p$. Il existe donc un $p \in \mathbb{N}$ tel que $H \subset F_p$. Compte tenu de ce que y est un point d'accumulation de la suite $\{W^q\}_{q=2}^\infty$, on vérifie aisément que $y_\alpha \in S^p_\alpha$ si $\alpha \in F_p$ et, par suite, $f(z) \in V$, d'où contradiction. $\square$

Remarque. Si l'on fait abstraction des propriétés (R1), (R2) et que l'on remplace la (R3) par la propriété d'être fermé par produits dénombrables, le théorème ci-dessus met en évidence une technique pour obtenir des résultats de nature semblable au théorème 2 dans la théorie de Σ_R-espaces, quand Σ est un recouvrement naturel (dans le sens de Franklin [4]).

Produit de groupes localement pseudocompacts. On dit qu'une partie B de X est fortement bornée (dans X) si toute famille de parties ouvertes de X qui coupent B admet une sous-famille $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que pour tout filtre $\mathcal{F}$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ on a

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathrm{cl}\Big(\bigcup_{n\in F} U_n\Big) \neq \varnothing.$$

Cette notion a été introduite par Tkačenko dans [12], à partir de la condition de Frolík qui caractérise la classe $\mathcal{P}$ ([5, th. 3.6]). Nous en avons fait une étude dans [3]. Tkačenko montre dans [12, lemmes 2.8 et 2.10] que toute partie bornée d'un groupe topologique séparé G est fortement bornée. Ce résultat permet d'appliquer les corollaires 2 et 6 de [3] pour obtenir la caractérisation suivante des groupes topologiques séparés localement pseudocompacts.

Théorème 3. *Un groupe topolgique séparé est localement pseudocompact si, et seulement si, il est localement dans la classe de Frolík $\mathcal{P}$.*

Le théorème ci-dessus et le th. 2 permettent de caractériser les fonctions réelles continues dans un produit de groupes topologiques séparés localement pseudocompacts. On a le résultat suivant :

Théorème 4. *Soit $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ une famille de groupes topologiques séparés localement pseudocompacts. Alors le groupe produit $\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ est un $\mathcal{P}_r$-espace.*

English extended abstract. All spaces considered here will always be completely regular Hausdorff spaces. A subset B of a space X is called bounded (in X) if each continuous real-valued function on X is bounded on B. We call a space X a $\mathrm{b_f}$-space if a real-valued function is continuous whenever its restriction to each bounded subset of X can be extended to a continuous function on X. Clearly $\mathrm{k_r}$-spaces and locally bounded spaces are $\mathrm{b_f}$-spaces.

Blanchard and Jourlin [2] introduced the notion of $\mathrm{b_f}$-spaces studying spaces of continuous functions. The $\mathrm{b_f}$-spaces arises in the study of z-closed projections and also in the problem of the distribution of the topological completion functor [9], and the Hewitt real-compactification functor [11]. This class of spaces also appears studying compactness of function spaces in the topology of pointwise convergence [1].

In this paper we consider the product of a family of spaces locally in the Frolík's class $\mathcal{P}$ of spaces X such that for every pseudocompact space Y the product $X \times Y$ is pseudocompact. The class $\mathcal{P}$ of topological spaces was introduced by Frolík in the early 1960's (see [5]). This class is closed under arbitrary products [7], but the broader class of spaces that belong to $\mathcal{P}$ locally is not.

In this work we show that a product of arbitrary many spaces $\{X_i : i \in I\}$ locally in the Frolík's class $\mathcal{P}$ is a $\mathrm{b_f}$-space (even a $\mathcal{P}_r$-space) (Theorem 2).

We remark that, in order to prove this fact, we develop a technique that can be used to prove a similar result in the theory of Σ_R-spaces when Σ is a natural cover in the Franklin sense [4] and that the above result is the best in the following sense: if X is not locally in $\mathcal{P}$ then there is a space Y such that $X \times Y$ is not a $\mathrm{b_f}$-space [3].

Finally we apply the Theorem 2 to the product of a family of locally pseudocompact Hausdorff topological groups. We prove that the product of a family $\{G_i : i \in I\}$ of locally pseudocompact Hausdorff topological groups is a $\mathcal{P}_r$-space (Theorem 4).

BIBLIOGRAPHIE

1. A. V. Arkhangel′skii, *Function spaces in the toplogy of pointwise convergence, and compact sets*, Russian Math. Surveys **39** (1984), 9–56.
2. N. Blanchard et M. Jourlin, *La topologie de la convergence bornée sur les algèbres des fonctions continues*, Pub. Dép. Math. Lyon **6** (1969), 85–96.
3. J. L. Blasco et M. Sanchis, *On the producyt of two* b_f*-spaces*, Acta Math. Hungar. **62** (1993), 111–118.
4. S. P. Franklin, *Natural covers*, Compositio Math. **21** (1969), 253-261.
5. Z. Frolík, *The topological product of two pseudocompact spaces*, Czechoslovak Math. J. **10** (1960), 339–349.
6. L. Gillman et M. Jerison, *Rings of continuous functions*, Van Nostrand, New York, 1960.
7. N. Noble, *Countably compact and pseudocompact products*, Czechoslovak Math. J. **19** (1969), 390–397.
8. ———, *The continuity of functions on Cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 187–198.
9. R. Pupier, *Topological completion of a product*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **19** (1974), 925–933.
10. M. Sanchis, *Sous-espaces ouverts d'espaces munis de topologies initiales de fonctions réelles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **314** (1992), 501–503.
11. ———, *Sur l'égalité* $\nu(X \times Y) = \nu X \times \nu Y$, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **37** (1992), 805–811.
12. M. G. Tkačenko, *Compactness type properties in topological groups*, Czechoslovak Math. J. **113** (1988), 324–341.

M. SANCHIS
DPTO DE MATEMÁTICAS E INFORMÁTICA
CAMPUS DE PENYETA ROJA
UNIVERSIDAD JAUME I
12071 CASTELLÓN, ESPAÑA