Ann. Sci. Math. Québec **17** (1993), no. 2, 169–186.

SUR UNE CLASSE DE DISTRIBUTIONS ALÉATOIRES PÉRIODIQUES

MANUEL L. ESQUÍVEL

RÉSUMÉ. L'encadrement théorique pour l'étude et les applications de l'analyse harmonique des distributions aléatoires périodiques, est fait au moins depuis les années soixante [6, 7, 9]. Dans le contexte de la géométrie fractale de Benoït Mandelbrot, les modèles mathématiques réalisables par ordinateur, de surfaces à allure irrégulière, ont remis à l'ordre du jour les processus stochastiques réprésentables par des séries de Fourier ayant des coefficients aléatoires [11, 13]. Dans ce travail nous introduisons une classe de distributions aléatoires périodiques qui a comme exemples : les masses aléatoires sur le cercle [10, pp. 109, 110, 124], les mouvements browniens (classique et fractionnaires) et les « randomisées » par translation des distributions de Schwartz classiques. Nous commençons par l'étude d'un résultat qui les caractérise avec des conditions de vérification facile et nous présentons ensuite les exemples référés ci-dessus. Ensuite, on développe deux aspects importants de l'analyse harmonique (unicité de la répresentation par série de Fourier et dérivabilité) et un aspect de la statistique de ces distributions aléatoires (existence d'un premier moment généralisé). Comme application, on généralise à cette classe de distributions aléatoires périodiques, un résultat classique sur la méthode de Fourier, qui sert à construire des solutions particulières pour les équations différentielles ordinaires à coefficients constants. Finalement, on applique ce dernier résultat, par la donnée, sous forme d'une série de Fourier-Wiener-Schwartz d'une solution particulière pour une équation de Langevin généralisée. On termine par un commentaire sur la régularité de la solution obtenue.

ABSTRACT. The theorical foundations for the study and application of periodic random distributions have been established since at least the sixties [6, 7, 9]. In the context of the fractal geometry of Benoit Mandelbrot, mathematical models of irregular surfaces that can be obtained by computer have led us to consider stochastic processes arising from Fourier series with random coefficients [11, 13]. In this article, we introduce a class of such periodic random distributions. Three examples of this case are : random mass on the unit circle [10, pp. 109, 110, 124], Brownian motion (classical anf fractional) and classical Schwartz distributions that are randomized by translations. We begin with a result giving conditions which characterize the distributions of this class. These conditions are easy to verify and this is done for the three previous examples.

Reçu le 25 juin 1991 et, sous forme définitive, le 31 juillet 1993.

Two important questions in harmonic analysis are considered : uniqueness of the representation by Fourier series and differentiability. Also we examine the statistical problem of the existence of a generalized first moment for these random distributions. As an application, a classical result in Fourier analysis, usefull for constructing particular solutions of ordinary differential equations with constant coefficients, is generalized to this class of periodic random distributions. This last result is applied to obtain the Fourier-Wiener-Schwartz series of a particular solution of a generalized Langevin equation. We conclude with a comment on the regularity of the solution.

1. Introduction.

Notations et caractérisation de la classe de distributions étudiées.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité que l'on supposera complet. On désignera par $\mathcal{M}$, l'espace des variables aléatoires de Ω dans $\mathbb{C}$ et par $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}$, l'espace des suites d'éléments de $\mathcal{M}$, indexées par les entiers de $\mathbb{Z}$. Pour un élément A dans $\mathcal{M}$, on notera :

$$\mathbb{E}[|A|] = \int_{\Omega} |A| \, d\mathbb{P}.$$

Soit $\mathcal{C}_m$ le sous-espace de $\mathcal{M}^{\mathbb{Z}}$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_m = \{(C_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{M}^{\mathbb{Z}} : (\exists A \in \mathcal{M}, A \geq 0, \mathbb{E}[A] < +\infty)(\exists k \in \mathbb{Z}) \\ (\forall n \in \mathbb{Z}) \quad |C_n| \leq A(1+|n|)^k \text{p.s. sur } \Omega\}. \quad (1) \end{aligned}$$

Voyons pour commencer deux conditions qui décrivent complètement cet espace de suites $\mathcal{C}_m$ et dont la dernière est en général de vérification aisée. Ensuite on associera à un élément $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ quelconque de $\mathcal{C}_m$, une distribution aléatoire périodique T, en prenant les C_n, (pour n dans $\mathbb{Z}$), comme les coefficients de Fourier de T.

Théorème 1. *Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{C}_m$.

(2) *Il existe une variable aléatoire A intégrable et une autre K, prenant des valeurs réelles majorée et indépendante de A, définies sur Ω et qui vérifient :*

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad |C_n| \leq A(1+|n|)^K \textit{p.s. sur } \Omega.$$

(3) *La suite $(\mathbb{E}[|C_n|])_{n\in\mathbb{Z}}$ est à croissance lente, autrement dit :*

$$(\exists a \geq 0)(\exists k \in \mathbb{Z})(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \mathbb{E}[|C_n|] \leq a(1+|n|)^k.$$

Démonstration. La proposition (2) est une conséquence triviale de (1), en prenant pour K, la variable aléatoire constante. Les hypothèses faites en (2), sur A et K, nous permettent d'écrire :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \mathbb{E}[|C_n|] \leq \mathbb{E}[A](1+|n|)^k,$$

où k est un majorant de la variable aléatoire K. On a bien que (2) entraîne (3). L'implication $(3) \implies (1)$ résulte du raisonnement suivant, qui nous a été montré par J.-P. Kahane. Supposons donc (3) et prenons $\alpha > 1$. On a alors :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \mathbb{E}\Big[\frac{|C_n|}{(1+|n|)^{k+\alpha}}\Big] \leq \frac{a}{(1+|n|)^{\alpha}}.$$

D'où on peut conclure que :

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|C_n|}{(1+|n|)^{k+\alpha}}\Big] < +\infty.$$

La variable aléatoire

$$A = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|C_n|}{(1+|n|)^{k+\alpha}},$$

est alors presque sûrement finie, intégrable et on a bien ce qu'on cherchait :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \frac{|C_n|}{(1+|n|)^{k+\alpha}} \leq A \text{ p.s. sur } \Omega. \quad \square$$

Remarque 1. Dans l'appendice figure la preuve d'un résultat plus faible que $(3) \implies (1)$ et où l'on construit la variable aléatoire A à l'aide d'un temps d'arrêt classique.

La principale difficulté est alors de prouver que A est intégrable. Nous croyons que la technique employée pourra être intéressante par elle-même.

On peut maintenant associer à un quelconque élément $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de l'espace $\mathcal{C}_m$, une distribution aléatoire périodique de période 1, ([10, p. 9]) c'est-à-dire un élément de $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))^{\Omega}$, défini presque sûrement sur Ω par :

$$T(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n(\omega)e^{2\pi i n x}.$$

Dans l'autre sens, si T appartient à $(\mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))^{\Omega}$ et a comme coefficients de Fourier-Schwartz :

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \omega \in \Omega) \quad C_n^T(\omega) = \langle T(\omega), e^{-2\pi i n x}\rangle,$$

et si la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans l'espace $\mathcal{C}_m$, alors la distribution aléatoire périodique :

$$V = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n^T e^{2\pi i n x}.$$

coïncide avec T, presque sûrement sur Ω.

La classe de distributions aléatoires périodiques qui fait l'objet de ce qui va suivre se trouve définie ainsi par les conditions décrites dans le théorème 1 et qui portent sur la suite de ses coefficients de Fourier-Schwartz.

2. Exemples.

Masses ponctuelles sur le cercle, les mouvements browniens (classique et fractionnaire) et les « randomisées » par translation des distributions de Schwartz classiques

2.1. *Masses ponctuelles aléatoires sur le cercle.* On considère $(\epsilon_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite standard de Rademacher c'est à dire une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur Ω, prenant les valeurs $+1$ ou -1 avec la même probabilité. On considère $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur Ω à valeurs sur $[0,1]$, ayant toutes la loi uniforme. On suppose que la première suite est indépendante de la seconde. On considère finalement $(m_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres positifs — les masses — telle que :

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_j^2 < +\infty.$$

Soit maintenant, la distribution aléatoire périodique $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ définie par :

$$(\forall \omega \in \Omega) \quad T(\omega) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j(\omega) m_j \delta_{\theta_j(\omega)}.$$

On a que :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad C_n^T = \lim_{N\to+\infty} \sum_{j=1}^{N} \epsilon_j m_j e^{-2\pi i n \theta_j} \text{ p.s. sur } \Omega.$$

Chacun des C_n^T est limite simple, définie presque sûrement sur Ω, d'une suite de variables aléatoires, donc, c'en est une. On a que la suite C_n^T est dans la classe $\mathcal{C}_m$, par application du théorème 1 au fait suivant :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \mathbb{E}[|C_n^T|] \leq (\mathbb{E}[|C_n^T|^2])^{1/2} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} m_j^2\right)^{1/2} < +\infty.$$

2.2. *Les mouvements browniens.* Nous commençons par établir un théorème qui fournit une condition suffisante pour qu'une distribution aléatoire ayant des « trajectoires", ait ses coefficients de Fourier dans l'espace $\mathcal{C}_m$. Considérons B un espace de Banach séparable, s'injectant continûment dans $L^1([0,1], \mathcal{B}, dx)$. Soit T définie sur Ω et prenant ses valeurs dans B, une variable aléatoire vectorielle. Cela veut dire que si $\mathcal{E}$ est la topologie naturelle de B, on a que $T^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$ où nous le rappelons, $\mathcal{A}$ est la tribu donnée sur Ω (voir [10, p. 3] ou [6, p. 14]).

Théorème 2.

$$\int_\Omega ||T(\omega)||_B \, d\mathbb{P}(\omega) < +\infty \implies (C_n^T)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{C}_m.$$

Démonstration. B étant un espace polonais est un espace standard, par conséquent ([6, p. 15, I.42]), T est limite simple , dans B, d'une suite de fonctions simples, autrement dit T est $\mathbb{P}$-mesurable ou fortement mesurable. T est alors aussi faiblement $\mathbb{P}$-mesurable ([2, page 41 et suivantes]) et comme par hypothèse $L^\infty \subset B^*$ on a nécessairement que : pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, $C_n^T =< T, e^{-2\pi i n x} >$ est une variable aléatoire numérique. Les hypothèses faites nous assurent que T est une variable aléatoire Bochner-intégrable et la conclusion énoncée suit de la majoration immédiate :

$$\begin{aligned}(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \mathbb{E}[|C_n^T|] &= \int_\Omega \left| \int_0^1 T(\omega) e^{-2\pi i n x} \, dx \right| d\mathbb{P}(\omega) \\ &\leq \int_\Omega ||T(\omega)||_{L^1([0,1])} \, d\mathbb{P}(\omega) \leq \int_\Omega ||T(\omega)||_B \, d\mathbb{P}(\omega) < +\infty. \quad \square \qquad (2)\end{aligned}$$

Nous allons voir maintenant, que le théorème précédent s'applique aux mouvements browniens. Nous aurons ainsi prouvé que ces mouvements browniens définissent des distributions aléatoires appartenant à la classe que l'on étudie et cela sans avoir calculé explicitement les coefficients de Fourier respectifs. Notons au passage que ces coefficients de Fourier seront calculés dans la section 4, quand on s'occupera de la construction d'une solution particulière pour une équation de Langevin généralisée.

Considérons la généralization du processus de Wiener, donnée par un processus gaussien $X^\gamma = (X_t^\gamma)_{t\in[0,1]}$ prenant des valeurs complexes et vérifiant :

$$(\forall s, t \in [0,1]) \quad \mathbb{E}[|X_t^\gamma - X_s^\gamma|^2] = |t-s|^\gamma. \tag{3}$$

On sait construire de tels processus pour $\gamma \in \,]0,2]$ (voir [10, pp. 136, 263, 279]). Pour $\gamma = 1$, c'est le processus de Wiener ou le mouvement brownien classique et pour $\gamma \neq 1$, ce sont les mouvements browniens fractionnaires. La distribution aléatoire X^γ définie sur Ω par l'application qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe la trajectoire (continue) $(X_t^\gamma(\omega))_{t\in[0,1]}$ a bien ses coefficients de Fourier dans la classe $\mathcal{C}_m$. C'est une conséquence du résultat suivant :

Théorème 3. *Soit l'espace de Banach $B = C^0([0,1]) \cong C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, où la norme est donnée par*

$$(\forall f \in B) \quad \|f\|_B = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|,$$

B vérifie bien les hypothèses du théorème antérieur et

$$\int_\Omega \|X_t^\gamma\|_B \, d\mathbb{P} < +\infty$$

Démonstration. On appliquera le théorème de Dudley sur l'existence de versions continues pour les processus gaussiens (voir [10, p. 219]). Sur $[0,1]$ on introduit la semi-distance :

$$d(s,t) = \mathbb{E}[|X_s^\gamma - X_t^\gamma|^2])^{1/2}.$$

Soit $N_d(\epsilon)$ le nombre minimum de boules de rayon ϵ pour la distance d, nécessaires pour recouvrir $[0,1]$. D'après Dudley :

$$\int_\Omega \|X_t^\gamma\|_B \, d\mathbb{P} \le \text{cte}\Big(\int_0^{+\infty} \sqrt{\log(N_d(\epsilon))}\, d\epsilon + \inf_{t\in[0,1]} \mathbb{E}[|X_t^\gamma|^2]^{1/2}\Big).$$

Il nous faut prouver seulement que l'intégrale d'entropie (à droite dans l'inégalité) est finie. Remarquons que la question de la convergence pour cette intégrale se pose en zéro. La propriété de définition (3) a comme conséquence que pour $t \in [0,1]$ la boule de centre en t et de rayon ϵ pour la semi-distance d, est la boule de centre en t et de rayon $\epsilon^{2/\gamma}$ pour la distance usuelle sur $[0,1]$. On a donc à étudier pour une constante $c > 1$ quelconque :

$$\int_0^c \sqrt{\log(N_d(\epsilon))}\, d\epsilon = \int_0^c \sqrt{\log\Big(\frac{1}{2\epsilon^{2/\gamma}}\Big)}\, d\epsilon.$$

Le changement de variable $2\epsilon^{2/\gamma} = e^{-x}$ nous ramène à l'étude de l'intégrale :

$$\int_{c'}^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x\gamma/2}\,dx,$$

qui est finie dès que $\gamma > 0$. $\square$

2.3. *Distributions de Schwartz classiques rendues aléatoires par translation.* Soit F une variable aléatoire définie sur Ω et prenant ses valeurs sur $[0,1]$. Soit f une distribution de Schwartz, périodique de période égale à 1 (ce que l'on note : $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$). Définissons la distribution aléatoire $T \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))^{\Omega}$ par :

$$(\forall \omega \in \Omega) \quad T(\omega) = \tau_{F(\omega)} f,$$

où τ_a pour $a \in [0,1]$, est l'opérateur classique de translation. On a alors : $(C_n^T)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{C}_m$. En effet :

$$\begin{aligned} C_n^T = \langle \tau_F f, e^{-2\pi i n x}\rangle = \langle f, \tau_{-F} e^{-2\pi i n x}\rangle = \langle f, e^{-2\pi i n(x+F)}\rangle \\ = e^{-2\pi i n F}\langle f, e^{-2\pi i n x}\rangle = e^{-2\pi i n F}\hat{f}(n). \quad (4) \end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{D}'$ la suite $\big(\hat{f}(n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier est à croissance lente. Comme pour n dans $\mathbb{Z}$, C_n^T ne diffère de $\hat{f}(n)$, que d'un facteur de module 1, on vérifie bien le résultat annoncé. On verra dans la section prochaine, une propriété intéressante de ces distributions aléatoires, relative à la statistique.

3. Propriétés.

L'unicité de la réprésentation par série de Fourier, d'une distribution aléatoire périodique. La dérivation et l'analyse harmonique de la dérivée. La moyenne d'une distribution aléatoire périodique.

Les résultats qui vont suivre et qui sont essentiels pour les applications admettent une formulation facile dans le cadre des distributions aléatoires dont les coefficients appartiennent à la classe $\mathcal{C}_m$.

Théorème 4. *Soit T une distribution dont les coefficients de Fourier appartiennent à l'espace $\mathcal{C}_m$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $T = 0_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z})}$ *p.s. sur* Ω.

(2) $(\forall n \in \mathbb{Z})\, C_n^T = 0$ *p.s. sur* Ω.

Démonstration. Supposons (2). Soit pour chaque $n \in \mathbb{Z}, \Omega_n \subset \Omega$ mesurable tel que $\mathbb{P}[\Omega_n] = 1$ et $C_n^T = 0$ sur Ω_n. L'ensemble $\Omega^* = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \Omega_n$ est mesurable, vérifie $\mathbb{P}[\Omega^*] = 1$ et naturellement on a :

$$(\forall n \in \mathbb{Z})(\forall \omega \in \Omega^*) \quad C_n^T(\omega) = 0.$$

Par ailleurs, on a qu'au moins sur Ω^* :

$$(\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})) \quad \langle T, \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n^T \hat{\varphi}(-n) = 0.$$

Ceci montre que T est presque sûrement nulle sur Ω. Supposons (1). On aura alors que, sur $\Omega_1 \subset \Omega$ mesurable et vérifiant $\mathbb{P}[\Omega_1] = 1$:

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad C_n^T = \langle T, e^{-2\pi inx} \rangle = 0,$$

ce qui veut dire que les coefficients de Fourier, sont des variables aléatoires presque sûrement nulles. □

Corollaire 1. *Pour deux distributions aléatoires T et V, dont les suites des coefficients de Fourier respectives $(C_n^T)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(C_n^V)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont dans l'espace $\mathcal{C}_m$, on a les propositions équivalentes suivantes :*
(1) $T = V$ *p.s. sur* Ω.
(2) $(\forall n \in \mathbb{Z})\, C_n^T = C_n^V$ *p.s. sur* Ω.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $T - V \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))^\Omega$ et que :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad C_n^{T-V} = C_n^T - C_n^V \text{ p.s. sur } \Omega. \quad \square$$

Étant donné une distribution aléatoire $T \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))^\Omega$, il est naturel de définir sa dérivée T', comme la distribution aléatoire, qui à chaque ω dans Ω, associe la dérivée au sens des distributions de $T(\omega)$, autrement dit :

Définition 1. La *dérivée* d'une distribution aléatoire T, est, par définition, la distribution aléatoire T' donnée par :

$$(\forall \omega \in \Omega)(\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \quad \langle T'(\omega), \varphi \rangle = -\langle T(\omega), \varphi' \rangle.$$

Le théorème facile suivant nous montre que la classe des distributions aléatoires que nous étudions est stable par dérivation.

Théorème 5. *Soit $T \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))^\Omega$, ayant ses coefficients de Fourier dans l'espace $\mathcal{C}_m$. Alors T', la dérivée de T, a comme coefficients de Fourier, la suite définie par :*

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad C_n^{T'} = 2\pi in C_n^T,$$

suite qui est aussi dans l'espace $\mathcal{C}_m$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des définitions. En effet :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad C_n^{T'} = \langle T', e^{-2\pi inx} \rangle = -\langle T, (e^{-2\pi inx})' \rangle = 2\pi in C_n^T.$$

D'autre part si A est une variable aléatoire non négative et intégrable, telle que pour k entier relatif, on ait :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad |C_n^T| \leq A(1 + |n|)^k \text{ p.s. sur } \Omega,$$

en remarquant que :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad |C_n^{T'}| \leq (2\pi A)(1 + |n|)^{(k+1)} \text{ p.s. sur } \Omega,$$

on aura bien prouvé l'énoncé. □

L'étude des premiers moments d'une variable aléatoire usuelle est utile dans la plupart des applications. Dans le cadre des distributions aléatoires périodiques que nous étudions, on peut toujours définir un premier moment généralisé — une moyenne. La définition qui suit est calquée sur celle que l'on peut trouver par exemple dans l'ouvrage [7].

Définition 2. Soit T une distribution aléatoire périodique. On dit que T admet la distribution de Schwartz classique $\overline{T} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ comme *moyenne* ssi :
(1) $(\forall \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))\, \langle T, \varphi \rangle \in M \cap L^1(\Omega)$.
(2) $(\forall \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}))\, \mathbb{E}[\langle T, \varphi \rangle] = \langle \overline{T}, \varphi \rangle$.

Théorème 6 (Sur la moyenne des distributions aléatoires). *Soit T une distribution aléatoire périodique dont la suite des coefficients de Fourier est dans la classe $\mathcal{C}_m$. Alors T admet :*

$$\overline{T} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}[C_n^T] e^{2\pi i n x},$$

comme moyenne.

Démonstration. D'après la définition, il est clair que si T admet une moyenne, alors cette moyenne est unique. Vérifions donc simplement, que $\overline{T}$, définie dans l'énoncé, est une moyenne pour T. La suite $(\mathbb{E}[C_n^T])_{n \in \mathbb{Z}}$ est à croissance lente d'après les hypothèses faites et définit donc une distribution de Schwartz périodique. Prenons $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ arbitraire. D'après la formule de Parseval on a que :

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^T \hat{\varphi}(-n) \text{ p.s. sur } \Omega.$$

Comme cette série converge absolument et uniformément presque sûrement sur Ω, on a que la condition (1) de la définition est vérifiée et de plus :

$$\mathbb{E}[\langle T, \varphi \rangle] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}[C_n^T] \hat{\varphi}(-n) = < \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}[C_n^T] e^{2\pi i n x}, \varphi >,$$

comme on le voulait. □

Exemple. (Détermination de la moyenne des distributions classiques « randomisées ») Reprenons les notations de l'exemple référé et soit μ_F la loi de probabilité de la variable aléatoire F. Le calcul des coefficients de Fourier de la distribution de Schwartz, moyenne de la distribution aléatoire construite, donne :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \mathbb{E}[C_n^T] = \hat{f}(n) \mathbb{E}[e^{-2\pi i n F}] = \hat{f}(n) \int_{\Omega} e^{-2\pi i n F} d\mathbb{P} = \\ = \hat{f}(n) \int_0^1 e^{-2\pi i n x} d\mu_F(x) = \hat{f}(n) \hat{\mu}_F(n). \quad (5)$$

Remarquons maintenant que, f étant une distribution et μ_F une mesure, leur convolution $f * \mu_F$ est bien définie et de plus ses coefficients de Fourier vérifient :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \widehat{f * \mu_F}(n) = \hat{f}(n) \hat{\mu}_F(n).$$

Le théorème antérieur et la remarque que nous venons de faire nous montrent donc que T admet $\overline{T} = f * \mu_F$ comme moyenne.

Pour terminer cette section mentionnons une conséquence immédiate dont nous aurons à nous servir par la suite.

Corollaire 2. *Soient T et V deux distributions aléatoires périodiques dont les suites des coefficients de Fourier sont dans l'espace $\mathcal{C}_m$. Soient α et β des nombres complexes, $\overline{T}$ la moyenne de T et $\overline{V}$ la moyenne de V. Alors $\alpha T + \beta V$ admet $\alpha\overline{T} + \beta\overline{V}$ comme moyenne.*

4. Applications.

Condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution particulière. Le calcul des coefficients de Fourier des mouvements browniens. Construction d'une solution particulière pour une équation de Langevin généralisée.

La réprésentation des distributions en série de Fourier-Schwartz permet la construction de solutions particulières pour les équations différentielles ordinaires à coefficients constants, moyennant une condition de compatibilité entre les zéros du polynôme, naturellement associé à l'opérateur différentiel en question et les coefficients de Fourier-Schwartz nuls, de la distribution qui figure dans le second membre de l'équation différentielle[1]. La condition de compatibilité décrite ci-dessous, est aussi valable dans la classe de distributions aléatoires périodiques que nous étudions. C'est ce que montrera le théorème 7. Précisons d'abord quelques notations. Nous noterons $P(z) = \sum_{k=0}^{r} a_k z^k$ un polynôme d'une variable complexe à coefficients complexes. Nous définissons par récurrence les opérateurs différentiels suivants :

$$D^0 = \mathrm{Id}, \qquad D = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}, \qquad (\forall k \geq 2) \quad D^k = D \circ D^{k-1}.$$

Le facteur $(1/2\pi i)$ qui figure dans l'expression de D sert juste à simplifier un peu les notations qui vont suivre. À $P(z)$ un polynôme comme ci-dessus on associe de façon univoque et naturellement, l'opérateur différentiel : $P(D) = \sum_{k=0}^{r} a_k D^k$.

Théorème 7 (Sur l'existence de solutions particulières). *Soit T une distribution aléatoire périodique, telle que la suite de ses coefficients de Fourier $(C_n^T)_{n\in\mathbb{Z}}$ soit dans $\mathcal{C}_m$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) $(\exists V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{\Omega})\ (C_n^T)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{C}_m$ *et* $P(D)V = T$ *p.s. sur* Ω.

(2) $(\forall n \in \mathbb{Z})\ P(n) = 0 \implies C_n^T = 0$ *p.s. sur* Ω.

Démonstration. Supposons pour commencer (1). Ayant $P(D)V = T$, l'unicité de la réprésentation en série de Fourier nous permet d'écrire :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad C_n^{P(D)V} = C_n^T \text{ p.s. sur } \Omega.$$

Un calcul facile nous montre aussi que :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad C_n^{P(D)V} = P(n) C_n^V,$$

[1] Voir par exemple [3, II, p. 126] ou [4], où on montre, comment par modification locale de la distribution figurant au second membre de l'équation différentielle, on peut obtenir toujours une réprésentation en série de Fourier-Schwartz locale. Dans [5] on a montré comment utiliser cette technique pour la résolution d'un problème de Cauchy particulier.

la condition (2) est, en conséquence, vérifiée.

Supposons maintenant (2). Appelons $Z_p = \{n_1, \ldots, n_p\}$ l'ensemble des zéros entiers du polynôme P. Soient $\Lambda_{n_1}, \ldots, \Lambda_{n_p}$, p variables aléatoires complexes définies sur Ω et intégrables. Définissons maintenant V (la solution particulière de l'équation différentielle en question), par :

$$V = \sum_{n \in \mathbb{Z} - Z_p} \frac{C_n^T}{P(n)} e^{2\pi i n x} + \sum_{k=1}^{p} \Lambda_{n_k} e^{2\pi i n_k x} \text{ p.s. sur } \Omega.$$

Posons pour simplifier l'écriture :

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{Z} - Z_p) & C_n = \dfrac{C_n^T}{P(n)} \text{ p.s. sur } \Omega \\ (\forall k \in \{1, \ldots, p\}) & C_{n_k} = \Lambda_{n_k} \text{ sur } \Omega \end{cases}$$

Montrons que la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est dans la classe $\mathcal{C}_m$. Par hypothèse il existe $A \in L^1(\Omega)$, A non négative et $s \in \mathbb{Z}$, tels que :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad |C_n^T| \leq A(1 + |n|)^s \text{ p.s. sur } \Omega.$$

D'autre part, on peut voir facilement, qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si r est le degré du polynôme P, alors :

$$(\forall n \in \mathbb{Z} - Z_p) \quad \left| \frac{1}{P(n)} \right| \leq \frac{c}{(1 + |n|)^r}.$$

On peut donc conclure que :

$$(\forall n \in \mathbb{Z} - Z_p) \quad |C_n| \leq cA(1 + |n|)^{s-r} \text{ p.s. sur } \Omega.$$

Pour se rendre compte de ce qui se passe pour les indices n dans Z_p, on pourra considérer la variable aléatoire intégrable :

$$\Lambda = \sup_{k \in \{1, \ldots, p\}} \frac{|\Lambda_{n_k}|}{(1 + |n_k|)^{s-r}},$$

et cette autre variable aléatoire intégrable, définie presque sûrement sur Ω par :

$$A_1 = \sup(\Lambda, cA).$$

On vérifie maintenant sans peine, que :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad |C_n| \leq A_1(1 + |n|)^{s-r} \text{ p.s. sur } \Omega.$$

Pour terminer, vérifions que l'on a bien $P(D)V = T$ presque sûrement sur Ω. Comme on écrit $V = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{2\pi i n x}$ presque sûrement sur Ω on a bien :

$$P(D)V = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n e^{2\pi i n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z} - Z_p} C_n^T e^{2\pi i n x} = T \text{ p.s. sur } \Omega. \quad \square$$

Le théorème facile qui suit nous montre que pour déterminer la moyenne d'une solution distribution aléatoire, d'une équation différentielle comme celle référée dans le théorème antérieur, on n'a qu'à résoudre l'équation différentielle déterministe usuelle, ayant comme second membre $\overline{T}$, la distribution de Schwartz moyenne de T.

Théorème 8. *Si on se place sous l'une des conditions du théorème précédent on a que, il existe $\overline{V} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, telle que $P(D)\overline{V} = \overline{T}$ sur $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ et telle que V admet $\overline{V}$ comme moyenne.*

Démonstration. Sachant que la distribution aléatoire V admet $\overline{V} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}[C_n^V]e^{2\pi inx}$ comme moyenne, on a sur $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$:

$$P(D)\overline{V} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P(n)\mathbb{E}[C_n^V]e^{2\pi inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}[P(n)C_n^V]e^{2\pi inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}[C_n^T]e^{2\pi inx} = \overline{T}. \quad \square$$

5. Sur le calcul de coefficients de Fourier des mouvements browniens. Le calcul des coefficients de Fourier des mouvements browniens fractionnaires introduits dans la deuxième section repose essentiellement sur la réprésentation de ces processus comme images du bruit blanc gaussien par des opérateurs de convolution.

Théorème 9. *Pour $\gamma \in]0,2[$ et $\gamma \neq 1$ le processus $X^\gamma = (X_t^\gamma)_{t\in[0,1]}$ admet la représentation suivante en série de Fourier :*

$$(\forall\gamma \in]0,1[) \quad X_t^\gamma = \frac{2t^{(1+\gamma)/2}}{1+\gamma} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{g_1(\gamma,n)}{(2\pi|n|)^{(1+\gamma)/2}} Z_n e^{2\pi int},$$

$$(\forall\gamma \in]1,2[) \quad X_t^\gamma = \frac{2t^{(1+\gamma)/2}}{1+\gamma} + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \Big(\frac{|n|}{n}\frac{(\gamma-1)}{2i}\frac{g_2(\gamma,n)}{(2\pi|n|)^{(1+\gamma)/2}} - \frac{1}{2\pi in}\Big) Z_n e^{2\pi int},$$

la convergence de la série ayant lieu pour tout t, presque sûrement sur Ω, où pour $j = 1,2$, $(g_j(\gamma,n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite de nombres complexes vérifiant :

$$(\forall\gamma \in]0,1[) \quad \lim_{n\to\pm\infty} g_1(\gamma,n) = \Gamma\Big(\frac{1+\gamma}{2}\Big)\exp\Big(\mp i\frac{(1+\gamma)\pi}{4}\Big),$$

$$(\forall\gamma \in]1,2[) \quad \lim_{n\to\pm\infty} g_2(\gamma,n) = \Gamma\Big(\frac{\gamma-1}{2}\Big)\exp\Big(\mp i\frac{(\gamma-1)\pi}{4}\Big),$$

et où $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite normale ou autrement dit, une suite de variables gaussiennes centrées réduites et indépendantes.

Démonstration. On part de la définition alternative suivante pour le processus de Wiener généralisé X^γ pour $\gamma \in]0,2[$ et $\gamma \neq 1$:

$$(\forall t \in [0,1]) \quad X_t^\gamma = \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{(1-\gamma)/2}}\, dX_s^1 \text{ p.s. sur } \Omega, \tag{6}$$

(voir [10, p. 279], [11, p. 355] et [12]). En effet l'intégrale figurant au second membre, est une intégrale stochastique relativement au processus de Wiener, d'une fonction non aléatoire et définit donc une variable aléatoire normale de loi $N(0,t^\gamma/\gamma)$. On utilise aussi la représentation du processus de Wiener comme série aléatoire :

$$X_t^1 = \sum_{n\neq 0} \frac{Z_n}{2\pi in} e^{2\pi int} + Z_0 t,$$

où $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite normale (voir [10, p. 235] et [8, p. 23]). La représentation intégrale (6) pour le processus X^γ peut être interprétée comme la convolution de la fonction f_γ définie par :

$$(\forall u \in [0,1]) \quad f_\gamma(u) = \frac{\mathbb{I}_{]0,1]}(u)}{u^{(1-\gamma)/2}},$$

avec la distribution aléatoire périodique $(X^1)'$ ayant la réprésentation en série de Fourier :

$$\sum_{n\neq 0} Z_n e^{2\pi int} + Z_0,$$

série convergente au sens des distributions. Cette interprétation a comme conséquence que les coefficients de Fourier de X^γ sont, pour $n \in \mathbb{Z}^*$, les coefficients de Fourier correspondants de f_γ. Ainsi, après un changement de variable évident et en séparant le cas $n > 0$ du cas contraire, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}^*) \quad \hat{f}_\gamma(n) = \int_0^1 \frac{e^{-2\pi inu}}{u^{(1-\gamma)/2}}\, du = \frac{1}{(2\pi|n|)^{(1+\gamma)/2}} \int_0^{2\pi|n|} \frac{e^{-i\frac{|n|}{n}v}}{v^{(1-\gamma)/2}}\, dv.$$

Traitons d'abord le cas $\gamma \in \,]0,1[$. Pour n entier relatif non nul, posons :

$$g_1(\gamma,n) = \int_0^{2\pi|n|} \frac{e^{-iv|n|/n}}{v^{(1-\gamma)/2}}\, dv.$$

Sachant que pour $a \in \,]0,1[$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(v)}{v^a}\, dv = \Gamma(1-a)\cos\left(\frac{(1-a)\pi}{2}\right)$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(v)}{v^a}\, dv = \Gamma(1-a)\sin\left(\frac{(1-a)\pi}{2}\right),$$

(voir [15, p. 181]), le résultat annoncé s'ensuit immédiatement si on traite la partie réelle et la partie imaginaire de $g_1(\gamma,n)$ avec les formules ci-dessus. Pour $\gamma \in \,]1,2[$ on intègre par parties $g_1(\gamma,n)$ et on obtient :

$$\int_0^{2\pi|n|} \frac{e^{-iv|n|/n}}{v^{(1-\gamma)/2}}\, dv = i\frac{|n|}{n}(2\pi|n|)^{(\gamma-1)/2} - i\frac{|n|}{n}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right) \int_0^{2\pi|n|} \frac{e^{-iv|n|/n}}{v^{(3-\gamma)/2}}\, dv.$$

On pose :

$$g_2(\gamma,n) = \int_0^{2\pi|n|} \frac{e^{-iv|n|/n}}{v^{(3-\gamma)/2}}\, dv,$$

et on termine comme dans le cas antérieur. Le coefficient de Fourier pour $n = 0$ est obtenu par la convolution de f_γ avec la fonction constante égale à 1.

Le cas $\gamma = 2$ est trivial vu qu'une version de X^2 est définie presque sûrement en posant :

$$(\forall t \in [0,1]) \quad X_t^2 = tZ, \quad Z \in \mathcal{N}(0,1). \quad \square$$

Remarque 2. La forme des coefficients de Fourier des mouvements browniens fractionnaires pour $\gamma \in]1,2[$ résulte de la méthode employée pour les construire. On a appliqué une transformation périodique (voir [16, II, page 63]) au processus défini par (6). Les trajectoires sur $\mathbb{R}$ sont ainsi presque sûrement discontinues pour t dans $\mathbb{Z}$, les dérivées des trajectoires ne sont donc pas des fonctions et l'ordre de décroissance à l'infini des coefficients de Fourier doit montrer cela.

6. Solution particulière pour une équation de Langevin généralisée. Considérons un processus $Y^\gamma = (Y_t^\gamma)_{t\in[0,1]}$ satisfaisant l'équation :

$$D^2Y_t^\gamma + KDY_t^\gamma + LY_t^\gamma = X_t^\gamma,$$

où K et L sont des constantes complexes et $X^\gamma = (X_t^\gamma)_{t\in[0,1]}$ réprésente un processus de Wiener généralisé décrivant un mouvement brownien fractionnaire. Le théorème 7 nous assure qu'au cas où l'équation $n^2 + Kn + L = 0$ n'a pas de solutions entières, une réprésentation presque sûre pour le processus Y^γ est donnée par :

$$Y_t^\gamma = \frac{2Z_0 h_\gamma(t)}{1+\gamma} + \sum_{n\neq 0} \frac{\widehat{X^\gamma}(n)}{(n^2+Kn+L)} e^{2\pi i n t} \text{ p.s. sur } \Omega,$$

où $h_\gamma(t)$ est une solution particulière de l'équation différentielle ordinaire :

$$D^2y(t) + KDy(t) + Ly(t) = t^{(1+\gamma)/2}.$$

Quand l'équation $n^2 + Kn + L = 0$ admet des solutions entières on peut, moyennant un changement local du second membre de l'équation différentielle, réprésenter (localement seulement) une solution particulière de l'équation (voir [4]).

Observation (Sur la régularité du processus Y^γ). Les coefficients de Fourier de Y^γ sont équivalents (quand n tend vers l'infini) à $1/n^{((5+\gamma)/2)}$ pour $\gamma \in]0,1[$ et à $1/n^3$ pour $\gamma \in]1,2[$. On peut donc conclure d'après le théorème 5 et les résultats sur les séries gaussiennes classiques ([10, p. 199]), que Y^γ a ses trajectoires de classe $C^2([0,1])$, presque sûrement sur Ω.

7. Appendice. Nous présentons ici une preuve d'un résultat plus faible que celui que l'on a étudié dans le théorème 1 du texte, mais dont la preuve étant un peu plus compliquée, se développe suivant une ligne de raisonnement différente. On suit, bien entendu, les notations de l'introduction.

Théorème 10. *Soit $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un élément de l'espace $M^{\mathbb{Z}}$. Si pour un p dans l'intervalle $]1,+\infty[$ la suite des moments d'ordre p, $(||C_n||_{L^p})_{n\in\mathbb{Z}}$, est à croissance lente, alors la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans l'espace $\mathcal{C}_m$.*

Ce théorème nous dit que la condition suivante sur $(C_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, élément de l'espace $M^{\mathbb{Z}}$:

$$(\exists p \in]1,+\infty[)(\exists a>0)(\exists r \in \mathbb{Z})(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \mathbb{E}[|C_n|^p]^{1/p} \leq a(1+|n|)^r,$$

est suffisante pour l'appartenance à l'espace $\mathcal{C}_m$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que d'après Hölder :

$$(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad \mathbb{E}[|C_n|] \leq \mathbb{E}[|C_n|^p]^{1/p} \leq a(1+|n|)^r.$$

En prenant α positif et $n \in \mathbb{Z}^*$, l'inégalité de Markov donne :

$$\mathbb{P}[\{|C_n| > (1+|n|)^\alpha \cdot \mathbb{E}[|C_n|\}]] \leq \frac{1}{(1+|n|)^\alpha}.$$

Pour $\alpha > 1$, le lemme de Borel-Cantelli nous dit que :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[\overline{\lim}_{n\to+\infty}\{|C_n| > (1+|n|)^\alpha \cdot \mathbb{E}[|C_n|\}]] \\ &\qquad = \mathbb{P}[\overline{\lim}_{n\to+\infty}\{|C_{-n}| > (1+|n|)^\alpha \cdot \mathbb{E}[|C_{-n}|\}]] = 0,\end{aligned}$$

ou d'une façon équivalente :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[\underline{\lim}_{n\to+\infty}\{|C_n| \leq (1+|n|)^\alpha \cdot \mathbb{E}[|C_n|\}]] \\ &\qquad = \mathbb{P}[\underline{\lim}_{n\to+\infty}\{|C_{-n}| \leq (1+|n|)^\alpha \cdot \mathbb{E}[|C_{-n}|\}]] = 1.\end{aligned}$$

Ceci nous permet de conclure donc qu'il existe Ω_1 sous-ensemble mesurable de Ω, tel que $\mathbb{P}[\Omega_1] = 1$ et pour lequel :

$$\begin{aligned}&(\exists n_1 \in \mathbb{N}, n_1 = n_1(\omega))(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_1 \implies |C_n(\omega)| \leq a(1+n)^{\alpha+r}, \\ &(\exists n_2 \in \mathbb{N}, n_2 = n_2(\omega))(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_2 \implies |C_{-n}(\omega)| \leq a(1+n)^{\alpha+r},\end{aligned}$$

En posant $m(\omega) = \sup(n_1(\omega), n_2(\omega))$, on a que :

$$(\forall \omega \in \Omega_1)(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad |n| > m(\omega) \implies |C_n(\omega)| \leq a(1+|n|)^{\alpha+r}.$$

Soit alors pour $\omega \in \Omega_1$, $m^*(\omega)$ le premier entier positif pour lequel l'implication ci-dessus est vérifiée. La correspondence qui à $\omega \in \Omega_1$ associe $m^*(\omega)$, définit une variable aléatoire, vu que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, C_n est une variable aléatoire. Soit encore pour $\omega \in \Omega_1$:

$$A(\omega) = \sup(a, \sup_{|n|\leq m^*(\omega)} |C_n(\omega)|).$$

Vu que l'application $S_M = \sup_{|n|\leq M} |C_n|$ définie pour $M \in \mathbb{N}$ est une variable aléatoire, un exercice facile nous permet de constater que $A = \sup(a, S_{m^*})$ est aussi une variable aléatoire et qui vérifie de plus, pour $\omega \in \Omega_1$ quelconque et *dès que* $\alpha + r \geq 0$:

$$\begin{aligned}|n| > m^*(\omega) &\implies |C_n(\omega)| \leq a(1+|n|)^{\alpha+r} \leq A(\omega)(1+|n|)^{\alpha+r}, \\ |n| \leq m^*(\omega) &\implies |C_n(\omega)| \leq \sup_{|n|\leq m^*(\omega)} |C_n(\omega)| \leq A(\omega) \leq A(\omega)(1+|n|)^{\alpha+r}.\end{aligned}$$

Nous allons montrer maintenant, que l'on peut choisir α d'une façon cohérente avec ce qui précède et de telle façon que $A \in L^1(\Omega)$. On a toujours :

$$\int_\Omega A\, d\mathbb{P} \leq a + \int_\Omega \sup_{|n|\leq m^*(\omega)} |C_n|\, d\mathbb{P}.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sup_{|n|\leq m^*(\omega)} |C_n|\, d\mathbb{P} &= \int_{\cup_{k=0}^{\infty}\{m^*=k\}} \sup_{|n|\leq m^*(\omega)} |C_n|\, d\mathbb{P} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\{m^*=k\}} \sup_{|n|\leq k} |C_n|\, d\mathbb{P} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{|n|\leq k} \int_{\{m^*=k\}} |C_n|\, d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Par une application de l'inégalité de Hölder et d'après les hypothèses :

$$\begin{aligned}\int_{\{m^*=k\}} |C_n|\, d\mathbb{P} &\leq (\int_\Omega |C_n|^p d\mathbb{P})^{1/p} \cdot (\int_\Omega \mathbb{I}_{\{m^*=k\}} d\mathbb{P})^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq a(1+|n|)^r \cdot (\mathbb{P}[m^*=k])^{1-1/p}.\end{aligned}$$

On peut estimer la probabilité ci-dessus vu que :

$$\{m^* = k\} \subset \{|C_k| > (1+|k|)^\alpha \cdot \mathbb{E}[|C_k|\} \cup \{|C_{-k}| > (1+|k|)^\alpha \cdot \mathbb{E}[|C_{-k}|\}.$$

On aplique l'inégalité de Markov et on a :

$$\mathbb{P}[\{m^* = k\}] \leq \frac{2}{(1+k)^\alpha}.$$

En tenant compte de ce qui précède, on a donc :

$$\int_\Omega A\, d\mathbb{P} \leq a + a2^{(1-\frac{1}{p})} \sum_{k=0}^{+\infty} (\sum_{|n|\leq k} (1+|n|)^r) \frac{1}{(1+k)^{\alpha(1-1/p)}}.$$

Faisons maintenant une discussion suivant les valeurs de r.

- Supposons $r \leq 0$. La série du second membre de l'inégalité est majorée par :

  $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k+1)}{(1+k)^{\alpha(1-1/p)}}.$$

  Cette série converge dès que : $\alpha > \frac{2}{1-\frac{1}{p}}$. Les conditions imposées à α sont $(\alpha > 1)$, $(\alpha \geq -r,\, r \leq 0)$ et celle ci-dessus, donc finalement la condition :

  $$\alpha > \sup\Big(1, -r, \frac{2}{1-1/p}\Big),$$

  suffit pour que A soit intégrable.

- Supposons $r > 0$. La série du second membre de l'inégalité est majorée par :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k+1)(k+1)^r}{(1+k)^{\alpha(1-1/p)}}.$$

Cette série converge dès que : $\alpha > \frac{r+2}{1-1/p}$. Dans ce cas, les conditions imposées à α sont $(\alpha > 1)$, $(\alpha \geq -r,\ r > 0)$ et celle ci-dessus, donc finalement la condition :

$$\alpha > \sup\left(1, \frac{2+r}{1-1/p}\right),$$

suffit pour que A soit intégrable. □

Remerciements. À l'arbitre par ses appreciations, corrections et suggestions. À l'éditeur par sa patience.

English extended abstract. A class of random periodic Schwartz distributions is introduced, some examples and elementary properties are studied and three applications are presented.

In order to define a random objet we follow [10, p. 9]. A random Schwartz periodic distribution is just a function defined in Ω (where $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ is a complete probability space) and taking values in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. This last space can be taken as the set of Schwartz distributions over $\mathbb{R}$ which are left invariant by an integer translation, endowed with the natural algebraic and topological structures. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ is isomorphic to the space of sequences (indexed by $\mathbb{Z}$) of slow growth at infinity ([14, p. 225], [16, II, p. 69]).

For a random distribution T subjected to some measurability condition, there exist two random variables A and K defined in Ω and taking values in $\mathbb{R}_+$ and $\mathbb{R}$ respectively and such that if for all ω in Ω and n in $\mathbb{Z}$, we denote by $< T(\omega), e^{2\pi inx} >$ the Fourier coefficient at the frequence n of the Schwartz distribution $T(\omega)$, we have :

$$|\langle T(\omega), e^{2\pi inx}\rangle| \leq A(\omega)(1+|n|)^{K(\omega)}.$$

The class of random Schwartz distributions under study is obtained by taking A in $L^1(\Omega)$ and K having an upper bound and independent of A. These conditions are equivalent to those obtained by assuming that the sequence $(\mathbb{E}[|\langle T(\omega), e^{2\pi inx}\rangle|])_{n\in\mathbb{Z}}$ (where $\mathbb{E}$ denotes the expectation in $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) is of slow growth at infinity. This equivalence is proved in theorem 1.

In the second section we show that the class introduced contains, as examples, some classic random objects such as the "random point-masses on the circle" ([10, p. 109]) and the Brownian motions (classical of Wiener and Lévy and fractional of Kolmogoroff and Mandelbrot). In order to verify the assertion just made about the Brownian motions we prove that a random process, with trajectories in a Banach space which is continuously embedded in the Lebesgue space $L^1([0,1])$, may be used to define (by periodic repetition) a random periodic distribution with Fourier coefficients in the class under study. As a third kind of example, we show that if we randomize by translation a classical Schwartz periodic distribution we obtain also an element of the class.

In the third section we present some simple results on the harmonic analysis and a result on the statistics of the random periodic distributions introduced. Namely, the unicity of the the representation by Fourier series, derivation and expected value with the correspondant representations by Fourier series. For illustration we compute the Fourier series of the expected value of a classical Schwartz distribution randomized by translation.

There are three applications in the fourth section. The first one is an extension to the class introduced, of the Fourier method for building particular solutions for ordinary differential equations with constant coefficients. The second application deals with the computation of the Fourier coefficients of the fractional Brownian motions using a stochastic integral with respect to the white noise Gaussian Fourier series. Finally using this last result we build a particular solution for a generalized Langevin equation in which the second member is a fractional Brownian motion.

In the appendix we prove that the following condition is sufficient for a random distribution T to belong to the class under scrutiny : "for some p in the interval $]1,+\infty[$, the sequence of p-moments $((\mathbb{E}[|\langle T(\omega), e^{2\pi i n x}\rangle|^p])^{1/p})_{n\in\mathbb{Z}}$ is of slow growth". This result is of course weaker than the result stated in theorem 1 but the proof is quite different and could be of independent interest. In order to control the growth of the random variables $\langle T, e^{2\pi i n x}\rangle$ we use a natural random variable and the proof that this random variable is integrable is the main issue. To that end an associated stopping time is of crucial importance.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. L. Butzer, U. Westphal, *An access to fractional differentiation via fractional difference quotients* Lectures Notes in Math., vol. 457, Springer Verlag, New York, 1975, 116–145.
2. J. Diestel, J. J. Uhl, Jr.,*Vector measures*, American Mathematical Society, Providence 1977.
3. R. E. Edwards *Fourier series*, 2e éd., Springer Verlag, New York, 1982.
4. M. L. Esquível, *Sur la méthode des séries de Fourier dans les équations differentielles à coefficients constants*, Trabalhos de Investigação no. 2, Departamento de Matemática, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Lisboa, 1987.
5. ——*Sobre o método das séries de Fourier nas equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes*, P.A.P.C.C, 2e éd., Departamento de Matemática, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Lisboa, 1988.
6. X. Fernique, *Processus linéaires, processus généralisés*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **17** (1967), 1–92.
7. I. M. Gel′fand, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions : Applications of harmonic analysis*, Academic Press Inc., New York 1964.
8. T. Hida, *Stationary stochastic processes*, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton 1970.
9. J.-P. Kahane, *Séries de Fourier aléatoires*, Séminaire de Mathématiques Superieures, vol. 4. Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal 1963.
10. ——*Some random series of functions*, 2e éd., Cambridge University Press, Cambridge 1985.
11. B. B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1983.
12. B. B. Mandelbrot et J. W. van Ness, *Fractional Brownian motions, fractional noises and applications*, SIAM Review **10** (1968), 422.

13. H. O. Peitgen et D. Saupe, *The science of fractal images*, Springer Verlag, New York, 1988.
14. L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1978.
15. E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, 3e éd., Chelsea Publishing Company, New York, 1986.
16. Vo-Khac Khoan, *Distributions analyse de Fourier opérateurs aux dérivées partielles*, Librairie Vuibert, Paris, 1972.
17. A. Zygmund, *Trigonometric series* , 2e éd., Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, F.C.T.
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
QUINTA DA TORRE
2825-MONTE DE CAPARICA, PORTUGAL.