Ann. Sci. Math. Québec **17** (1993), no. 2, 155–167.

CONJUGAISON QUASI CONVEXE DES FONCTIONNELLES POSITIVES

ABDELKADER ELQORTOBI

1. Introduction. La dualité quasi convexe joue un rôle important dans l'optimisation quasi convexe et dans la théorie de la «surrogate» dualité. De nombreux chercheurs se sont intéressés à l'optimisation quasi convexe (cf. [1, 3–5, 7, 9–10, 12-14], etc.). Dans cet article, notre contribution à l'optimisation consiste à proposer une méthode originale de construction de la bipolaire quasi convexe d'une fonction. Le principal résultat obtenu est le suivant : si la fonction de départ est quasi convexe, semi-continue inférieurement et non négative, elle coïncide avec sa bipolaire. Cette méthode qu'on va décrire découle d'une décomposition particulière de la conjuguée convexe. Notre point de vue rejoint donc celui de Crouzeix (cf. [3]), de Greenberg-Pierskalla (cf. [5]) et de Singer (cf. [12]). On rappelle que Crouizeix et Greenberg-Pierskalla utilisent, chacun à leur manière, une décomposition de la conjuguée convexe pour définir leur conjuguée (cf. [3, 5]). Quant à Singer, il propose une série de conjuguées en utilisant la notion de tranches de fonctions. Dans [1], les auteurs appliquent deux polarités particulières aux tranches de fonctions pour définir leur conjuguée. Passy et Prisman utilisent les fonctions homogènes et la notion de «evenly» convexe pour définir une conjugaison symétrique (cf. [9]). Dans [13], Volle a généralisé toutes ces notions. Dans [14], on se sert de l'inf-convolution quasi convexe pour définir une conjugaison symétrique.

2. λ-polaires d'une fonctionnelle. Dans tout ce qui suit, X et X' désigneront deux espaces vectoriels topologiques localement convexes mis en dualité séparante par la forme bilinéaire notée $\langle\ ,\ \rangle$, $\mathbb{F}$ sera l'ensemble $\{f\colon X \to [-\infty,+\infty]\}$ et $\mathbb{F}_+ = \{f\colon X \to [0,+\infty]\}$.

On prendra soin de prolonger l'addition des réels à $[-\infty,+\infty]$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a+(-\infty) &= -\infty \quad \text{pour tout } a \text{ appartenant } [-\infty,+\infty[,\\ a+(+\infty) &= +\infty \quad \text{pour tout } a \text{ appartenant } [-\infty,+\infty] \text{ (cf. [8])} \end{aligned}$$

Nous adopterons aussi les conventions suivantes : $\inf\varnothing = +\infty$ et $\sup\varnothing = -\infty$.

On désignera par $\underline{f}$ la plus grande fonctionnelle quasi convexe (qcx) et semi-continue inférieurement (sci) majorée par f. On aura aussi besoin des demi-espaces suivants :

$$H_\alpha(x) = \{x' \in X' : -\langle x,x'\rangle < \alpha\} \quad \text{et} \quad H_\alpha(x') = \{x \in X : -\langle x,x'\rangle < \alpha\}.$$

Reçu le 23 juin 1992 et, sous forme définitive, le 12 mai 1993.

Rappelons certaines définitions

Les tranches ou sections de f sont les ensembles suivants

$$T(f,\lambda) = \{x \in X : f(x) \leq \lambda\} \quad \text{et} \quad S(f,\lambda) = \{x \in X : f(x) < \lambda\} \quad \text{où } \lambda \text{ est réel.}$$

f est quasi convexe si

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \max\big(f(u), f(v)\big)$$
$$\text{pour tout } (u,v,\lambda) \text{ appartenant à } X \times X \times [0,1].$$

On a le résultat suivant :

$$f \text{ est qcx} \iff \text{les ensembles } T(f,\lambda) \text{ ou } S(f,\lambda) \text{ sont convexes pour tout } \lambda \text{ réel.}$$

f est quasi convave (qcv) si $-f$ est quasi convexe.

f est semi-continue supérieurement (scs) si $-f$ est semi-continue inférieurement.

La conjuguée convexe est définie par

$$f^{c}(x') = \sup\{\langle x, x'\rangle - f(x) : x \in X\}.$$

Pour la définition de notre conjuguée, inspirons-nous du résultat suivant établi par Volle (cf. [14]).

Soient f et g des fonctionnelles de $\mathbb{F}$ avec $g = g^{cc}$. Si on pose $F(x,r) = f(x) - r$ et $G(x,r) = g(x) - r$ pour tout (x,r) appartenant à $X \times \mathbb{R}$, alors on obtient :

$$2\inf\{\max\big(F(x,r), -G(x,r)\big) : (x,r) \in X \times \mathbb{R}\} = \inf\{f(x) - g(x) : x \in X\}.$$

Démontrons alors ce résultat d'une manière plus générale.

Lemme 1. *Soient f et g des fonctionnelles appartenant à $\mathbb{F}$. On obtient l'égalité suivante :*

$$2\inf\{\max[f(x)-r, -g(x)+r] : (x,r) \in X \times \mathbb{R}\} = \inf\{f(x)-g(x) : x \in X\}. \quad \text{(E1)}$$

Preuve. Posons $\Gamma = 2\inf\{\max[F(x,r), -G(x,r)] : (x,r) \in X \times \mathbb{R}\}$ avec $F(x,r) = f(x) - r$ et $G(x,r) = g(x) - r$.

$$F \leq \max[F, -G] \quad \text{et} - G \leq \max[F, -G]$$
$$\implies f(x) - g(x) = F(x,r) - G(x,r) \leq 2\max[F(x,r), -G(x,r)]$$

pour tout $(x,r) \in X \times \mathbb{R}$ d'où $\inf\{f(x) - g(x) : x \in X\} \leq \Gamma$. Par suite l'égalité (E1) est vérifiée si $\Gamma = -\infty$ ou bien si $\inf\{f(x) - g(x) : x \in X\} = +\infty$.

Supposons que $\inf\{f(x) - g(x) : x \in X\} < \Gamma$. Il existerait alors $u \in X$ tel que $f(u) - g(u)$ soit inférieur strictement à Γ. On peut supposer que $f(u) + g(u)$ est fini. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait eu pour tout u appartenant à $U = \{u \in X : f(u) - g(u) < \Gamma\}$, $f(u) + g(u) = +\infty$ ou $-\infty$. Ces considérations nous amènent à distinguer les deux cas suivants.

a) $u \in U$ et $f(u) + g(u) = +\infty$.

Comme $f(u) - g(u) < \Gamma$, il s'ensuit que $f(u) = +\infty$, ce qui est impossible car justement l'inégalité $f(u) < g(u) + \Gamma$ n'est pas vérifiée.

b) $u \in U$ et $f(u) + g(u) = -\infty$.

Nécessairement $g(u)$ est un nombre fini sinon les conditions de b) ne sont pas vérifiées. Il s'ensuit que $f(u) = -\infty$, d'où

$$\begin{aligned}\Gamma &\leq 2\inf\{\max[f(x) - r, -g(x) + r] : (x, r) \in U \times \mathbb{R}\}\\ &= 2\inf\{\max[-\infty, -g(x) + r] : (x, r) \in U \times \mathbb{R}\}\\ &= 2\inf\{-g(x) + r : (x, r) \in U \times \mathbb{R}\}\\ &\leq 2\inf\{-g(u) + r : r \in \mathbb{R}\} = -\infty.\end{aligned}$$

Autrement dit $\Gamma = -\infty$ ce qui est contraire à notre hypothèse $\Gamma \neq -\infty$.

Donc, en définitive, il existerait $u \in U$ tel que $f(u) + g(u)$ serait fini. Dans ce cas, en prenant $2r = f(u) = g(u)$ et $x = u$, on obtiendrait :

$$f(u)-g(u) < \Gamma \leq \inf\{\max[2f(x)-2r, 2g(x)+2r] : x \in U\} : x \in U\} \leq f(u)-g(u),$$

ce qui est impossible. Par conséquent, l'égalité (E1) est vérifiée. □

Remarque 1. Remplaçons dans (E1) g(x) par $\langle x, x' \rangle$ où $x' \in X'$. On obtient :

$$2\inf\{\max[f(x) - r, r - \langle x, x' \rangle] : (x, r) \in X \times \mathbb{R}\} = \inf\{f(x) - \langle x, x' \rangle : x \in X\}. \quad \text{(E2)}$$

On constate alors que le second membre de (E2) n'est autre que la fonction $-f^c$.

Définition 1. Soit f appartenant à $\mathbb{F}$ et λ un nombre réel. La fonction λ-polaire de f est définie comme suit : $f_\lambda^*(x') = inf\{\max[f(x) - \lambda, \lambda - \langle x, x' \rangle] : x \in X\}$ pour tout $x' \in X'$.

Théorème 1. *Soient f et g des fonctionnelles appartenant à $\mathbb{F}$. On obtient :*

a) $f^c = 2\sup\{f_\lambda^* : \lambda \in \mathbb{R}\}$ *et* $2\sup\{f_\lambda^*(0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = -\inf f$*;*

b) $f \leq g \implies g_\lambda^* \leq f_\lambda^*$*;*

c) $\sup(f_i)_\lambda^* = (\inf f_i)_\lambda^*$ *et* $(\sup f_i)_\lambda^* \leq \inf(f_i)_\lambda^*$ *pour toute famille de fonctions* f_i*;*

d) *i) si l'on pose* $(f \cdot \mu)(x) = \mu f(x/\mu)$ *pour tout* μ *positif, alors* $(f \cdot \mu)_\lambda^* = \mu(f_{\lambda/\mu})^*$*;*

ii) $(\mu f)_\lambda^* = \mu(f_{\lambda/\mu})^*(x'/\mu)$

e) $S(-f_\lambda^*, \mu) = \bigcup\{H_{\mu-\lambda}(x) : x \in S(f, \mu + \lambda)\}$

f) $T(f_\lambda^*, -\mu) = \bigcap\{\complement H_{\mu-\lambda}(x) : x \in S(f, \mu + \lambda)\}$ *où* $\complement A$ *désigne le complémentaire de l'ensemble* A*;*

g) $T(f^c, 2\mu) = \bigcap\{T(f_\lambda^*, \mu) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Preuve. a), b), c) et d) sont immédiats.

e)
$$\begin{aligned}x' \in S(-f_\lambda^*, \mu) &\iff -f_\lambda^*(x') < \mu\\ &\iff \inf\{\max(f(u) - \lambda, \lambda - \langle u, x' \rangle) : u \in X\} < \mu\\ &\iff \exists x \in X \text{ tel que } f(x) - \lambda < \mu \text{ et } \lambda - \langle x, x' \rangle < \mu\\ &\iff \exists x \in S(f, \mu + \lambda) \text{ et } x' \in H_{\mu-\lambda}(x)\\ &\iff x' \in \bigcup\{H_{\mu-\lambda}(x) : x \in S(f, \mu + \lambda)\}\end{aligned}$$

f) Il suffit de noter que le complémentaire de $S(-f^*_\lambda, \mu)$ est l'ensemble $T(f^*_\lambda, -\mu)$.
g) Immédiat. □

Théorème 2. *Soit f appartenant à $\mathbb{F}$.*

a) *Pour tout λ fixé, la fonction f^*_λ est quasi convexe et semi-continue inférieurement en x'.*
b) *Pour tout x' fixé, la fonction f^*_λ est qcx et sci en λ.*

Preuve. a) $T(f^*_\lambda, -\mu)$ est une intersection d'ensembles convexes et fermés.

b) Pour x' fixé dans X', posons $g(\lambda) = \inf\{\max(f(x) - \lambda, \lambda - \langle x, x'\rangle) : x \in X\}$. La fonction $\phi_{x,x'}(\lambda) = max(f(x) - \lambda, \lambda - \langle x, x'\rangle)$ pour (x, x') fixé dans $X \times X'$ est convexe, concave et continue en λ, d'où $g(\lambda)$ est qcv et scs comme infimum de fonctions qcv et scs. □

Rappelons brièvement les expressions des λ-polaires définies respectivement par Greenberg-Pierskalla, Crouzeix et Singer :

i) $f^*_{\lambda,1}(x') = -\inf\{f(x) - \lambda : \lambda - \langle x, x'\rangle \leq 0 \text{ et } x \in X\}$ (cf. [5]);
ii) $f^*_{\lambda,2}(x') = -\inf\{\lambda - \langle x, x'\rangle : f(x) - \lambda \leq 0 \text{ et } x \in X\}$ (cf. [3]);
iii) $f^*_{\lambda,3}(x') = -\inf\{f(x) - \lambda : \lambda - \langle x, x'\rangle = 0 \text{ et } x \in X\}$ (cf. [12])
$f^*_{\lambda,4}(x') = -\inf\{f(x) - \lambda + 1 : \lambda - 1 - \langle x, x'\rangle < 0 \text{ et } x \in X\}$ (cf. [12]).

On vérifie aisément l'inégalité suivante : $\max(f^*_{\lambda,1}, f^*_{\lambda,2}, f^*_{\lambda,3}, f^*_{\lambda,4}) \leq f^*_\lambda$

Lemme 2 (cf. [12]**).** *Soient f appartenant à $\mathbb{F}$, E inclus dans X et μ un nombre réel.*

$$\begin{aligned}\inf f(E) &= \sup\{\mu : E \cap S(f, \mu) = \varnothing\} = \inf\{\mu : E \cap S(f, \mu) \neq \varnothing\}\\ &= \sup\{\mu : E \cap T(f, \mu) = \varnothing\} = \inf\{\mu : E \cap T(f, \mu) \neq \varnothing\}.\end{aligned}$$

Théorème 3. *Soit f appartenant à $\mathbb{F}$.*

$$\begin{aligned}f^*_\lambda(x') &= -\sup\{\mu : H_{\mu-\lambda}(x') \cap S(f, \mu + \lambda) = \varnothing\}\\ &= -\inf\{\mu : H_{\mu-\lambda}(x') \cap S(f, \mu + \lambda) \neq \varnothing\}.\end{aligned}$$

Preuve. Utilisons le lemme 2 en prenant $E = X$. On obtient :

$$\begin{aligned}&\inf\{\max(f(x) - \lambda, \lambda - \langle x, x'\rangle) : x \in X\}\\ &\qquad = \sup\{\mu : \{x \in X : f(x) - \lambda < \mu, \lambda - \langle x, x'\rangle < \mu\} = \varnothing\}\\ &\qquad = \sup\{\mu : H_{\mu-\lambda}(x') \cap S(f, \mu + \lambda) = \varnothing\}. \quad \square\end{aligned}$$

Remarque 2. $f^*_\lambda(x) = \inf\{\mu : H_{-\mu-\lambda}(x') \cap S(f, -\mu + \lambda) \neq \varnothing\}$. Géométriquement $f^*_\lambda(x')$ apparaît comme étant l'infimum de tous les réels μ tels que l'hyperplan $\langle x, x'\rangle = \mu + \lambda$ sépare les ensembles $H_{-\mu-\lambda}(x')$ et $S(f, -\mu + \lambda)$.

3. Bipolaire d'une fonction. Dans ce paragraphe, on définit la bipolaire en utilisant les λ-polaires secondes.

Définition 2. Soit f appartenant à $\mathbb{F}$. La bipolaire quasi convexe de f est définie comme suit :

$$f^{\mathrm{E}}(z) = \sup\{(f_\lambda^*)_\lambda^*(z/2) : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{pour tout } z \in X.$$

La fonction suivante nous sera utile, notamment pour la définition du quasi-tangentiel de f.

Définition 3. Soit f appartenant à $\mathbb{F}$. La polaire q de f en z est définie comme suit :

$$q(x', z) = \sup\{\min[\lambda - f_\lambda^*(x'), \langle z/2, x'\rangle - \lambda : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{pour tout } x' \in X'.$$

Théorème 4. *Pour tout f appartenant à $\mathbb{F}$, f^{E} est quasi convexe et semi-continue inférieurement.*

Preuve. f^{E} est le supremum d'une famille de fonctionnelles qcx et sci. □

Théorème 5. *q est qcv par rapport à la variable x'.*

Preuve. Montrons, pour z fixé, que

$$q(\mu x' + (1-\mu)y', z) \geq \min[q(x', z), q(y', z)] \quad \forall x', y' \in X', \forall \mu \in]0, 1[\,.$$

D'après le théorème 2, la fonction $h(x', \lambda) = \min[\lambda - f_\lambda^*(x'), \langle z/2, x'\rangle - \lambda]$ est qcv par rapport à x' et λ. Soient alors a et b tels que $a < q(x', z)$ et $b < q(y', z)$. Comme $q(x', z) = \sup\{h(x', \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$, il existe σ et δ tels que $a \leq h(x', \sigma) \leq q(x', z)$ et $b \leq h(y', \delta) \leq q(y', z)$ d'où

$$\begin{aligned}\min(a, b) &\leq \min[h(x', \sigma), h(y', \delta)] \\ &\leq h[\mu x' + (1-\mu)y', \mu\sigma + (1-\mu)\delta] \leq q(\mu x' + (1-\mu)y', z).\end{aligned}$$

Faisons tendre a vers $q(x', z)$ et b vers $q(y', z)$. On obtient :

$$\min[q(x', z), q(y', z)] \leq q(\mu x' + (1-\mu)y', z). \quad \square$$

Remarque 3. Nous avons le résultat suivant : f^{E} est toujours positive ou nulle. En effet,

$$\begin{aligned}f^{\mathrm{E}}(z) &= \sup\{q(x', z) : x' \in X'\} \\ &= \sup\{\min[\inf\{\max(f(x), 2\lambda - \langle x, x'\rangle) : x \in X\}, \langle z/2, x'\rangle - \lambda] : \\ &\qquad\qquad (x', \lambda) \in X' \times \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

En prenant $\lambda = 0$ et $x' = 0$, on obtient que

$$f^{\mathrm{E}}(z) \geq \min[\inf\{\max(f(x), 0) : x \in X\}, 0] \geq 0.$$

En conséquence, f^{E} n'est pas en général majorée par f.

Ce résultat inattendu nous conduit à ne considérer que des fonctionnelles positives. Cependant si f est un élément de $\mathbb{F}$, alors on appliquera la polarité à la nouvelle fonctionnelle positive $e^{f(x)}$.

Théorème 6. *Pour tout f appartenant à $\mathbb{F}_+$, f^{E} est majorée par f.*

Preuve. Supposons qu'il existe z appartenant à X tel que $f^{\mathrm{E}}(z) > f(z)$. Alors il existerait x' et λ tels que

$$\min[\inf\{\max(f(u), 2\lambda - \langle u, x'\rangle) : u \in X\}, \langle z/2, x'\rangle - \lambda] > f(z)$$

par conséquent

$$\min[\max(f(z), 2\lambda - \langle z, x'\rangle), \langle z/2, x'\rangle - \lambda] > f(z)$$

et donc

$$2\lambda - \langle z, x'\rangle > f(z) \quad \text{et} \quad \langle z, x'\rangle - 2\lambda > 2f(z).$$

Ces deux dernières inégalités impliquent que $f(z)$ est strictement négatif; ceci est contraire à notre hypothèse f appartient à $\mathbb{F}_+$. En définitive, f^{E} est majorée par f. $\square$

Théorème 7. *Soit f qcx et appartenant à $\mathbb{F}_+$. Si f est sci au point z de X, alors $f^{\mathrm{E}}(z) = f(z)$.*

Preuve. Par le théorème précédent, il suffit de montrer que $f(z)$ est majorée par $f^{\mathrm{E}}(z)$.

a) Si $f(z) = \inf f$ alors pour $x' = 0$ et $\lambda = -f(z)$, on obtient:

$$f^{\mathrm{E}}(z) \geq \min\big(\inf\{\max(f(x), -2f(z)) : x \in X\}, f(z)\big) = \min\big(\inf f, f(z)\big) = f(z).$$

b) Si $\inf f < f(z)$, soit μ tel que $\inf f < \mu < f(z)$. Puisque f est sci en z, il existe un voisinage convexe ouvert V de z tel que pour tout v appartenant à V, $\mu < f(v)$. On a: $V \cap S(f, \mu) = \varnothing$ et donc $V \setminus \{z\} \cap S(f, \mu) \setminus \{z\} = \varnothing$. D'après un théorème de séparation de Hahn-Banach (cf. [6]) et comme $S(f, \mu)$ est convexe, il existe un hyperplan fermé qui les sépare. Plus précisément, il existe x' non nul tel que pour tout x appartenant à $S(f, \mu)$, $\mu \leq \langle z - x, x'\rangle$. et pour tout x appartenant à V, $\langle z - x, x'\rangle < \mu$ car μ est strictement positif et $V \setminus \{z\}$ est un voisinage de 0. Il s'ensuit que

$$\mu \leq \inf\{\max(f(z), \langle z - x, x'\rangle) : x \in S(f, \mu)\}$$

et comme $\mu \leq f(x)$ pour tout $x \notin S(f, \mu)$, alors

$$\mu \leq \inf\{\max(f(z), \langle z - x, x'\rangle) : x \notin S(f, \mu)\}.$$

Par conséquent

$$\mu \leq \inf\{\max(f(z), \langle z - x, x'\rangle) : x \in X\}.$$

Posons alors $2\lambda = \langle z, x'\rangle$. On obtient:

$$\mu \leq \inf\{\max(f(z), 2\lambda - \langle x, x'\rangle) : x \in X\}.$$

Cette inégalité signifie que l'ensemble $\big\{(y', \alpha \in X' \times \mathbb{R} : \mu \leq \inf\{\max(f(z), 2\alpha - \langle x, y'\rangle) : x \in X\}\big\}$ est non vide. Il s'ensuit que pour tout $(z', \beta) \in X' \times \mathbb{R}$

$$\min[\mu, \langle z/2, z'\rangle - \beta]$$
$$\leq \sup\{\min[\inf\{\max(f(x), 2\alpha - \langle x, y'\rangle) : x \in X\}, \langle z/2, y'\rangle - \alpha] : (y', \alpha) \in X' \times \mathbb{R}\}$$

et finalement

$$\sup\{\min[\mu, \langle z/2, y'\rangle - \alpha] : (y', \alpha) \in X' \times \mathbb{R}\} = \mu \leq f^{\mathrm{E}}(z) \quad \text{pour tout } \mu < f(z).$$

En définitive $f(z) \leq f^{\mathrm{E}}(z)$. $\square$

Corollaire 1. *Soit f appartenant à $\mathbb{F}_+$. Alors $f^{\mathrm{EE}} = f^{\mathrm{E}}$.*

Preuve. Il suffit de poser $g = f^E$ et d'appliquer le théorème précédent à g. □

Corollaire 2. *Soit f appartenant à $\mathbb{F}_+$. f^{E} est la plus grande minorante qcx et sci de f, autrement dit elle coïncide avec $\underline{f}$.*

Preuve. Soit g une minorante qcx, sci et positive de f. On déduit du théorème 2(b) que $g^{\mathrm{E}} \leq f^{\mathrm{E}}$. D'après le théorème précédent, $g^{\mathrm{E}} = g$ d'où $g \leq f^{\mathrm{E}}$. □

On a l'intéressante propriété : les λ-polaires d'ordre impair sont égales aux λ-polaires et les λ-polaires d'ordre pair sont égales aux λ-polaires secondes.

Théorème 8. *Pour tout f appartenant à $\mathbb{F}_+$, $(f^{\mathrm{E}})^*_\lambda = f^*_\lambda$.*

Preuve. a) $f^{\mathrm{E}} \leq f \implies f^*_\lambda \leq (f^{\mathrm{E}})^*_\lambda$.

b) Soit x' arbitraire. Par définition de $-(f^{\mathrm{E}})^*_\lambda(x')$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x : f^{\mathrm{E}}(x) - \lambda < \varepsilon - (f^{\mathrm{E}})^*_\lambda(x') \quad \text{et} \quad \lambda - \langle x, x' \rangle < \varepsilon - (f^{\mathrm{E}})^*_\lambda(x').$$

Comme f^{E} est la plus grande minorante qcx et sci de f, on a: $f^{\mathrm{E}}(x) = \inf\{\mu : x \in \overline{\mathrm{co}}T(f,\mu)\}$ où $\overline{\mathrm{co}}A$ désigne l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble A (cf. [3]). Posons $\beta = \varepsilon - (f^{\mathrm{E}})^*_\lambda(x')$. Puisque $f^{\mathrm{E}}(x) - \lambda < \beta$, du théorème de Crouzeix, il s'ensuit qu'il existe $\mu < \beta + \lambda$ tel que $x \in \overline{\mathrm{co}}T(f,\mu)$, d'où $x \in \overline{\mathrm{co}}T(f, \beta + \lambda)$. L'ensemble $V = \{u \in X : \lambda - \langle u, x' \rangle < \beta\}$ est un ouvert convexe contenant x, donc il existe un élément $v \in V \cap \mathrm{co}\, T(f, \beta + \lambda)$ autrement dit v est une combinaison convexe finie d'éléments de $T(f, \beta + \lambda)$. On peut donc écrire:

$$v = \sum \mu_i x_i$$

avec $i \in I = \{1, 2, \ldots, p\}$, $\mu_i \in [0, 1]$, $\sum \mu_i = 1$ et $x_i \in T(f, \beta + \lambda)$.

$$v \in V \implies \lambda - \langle v, x' \rangle < \beta \implies \exists j \in I : \mu_j \neq 0 \text{ et } \lambda - \langle x_j, x' \rangle < \beta.$$

Comme $x_j \in T(f, \beta + \lambda)$, $f(x_j) \leq \beta + \lambda$ il s'ensuit que

$$\max(f(x_j) - \lambda, \lambda - \langle x_j, x' \rangle) \leq \beta.$$

Par la suite

$$\inf\{\max(f(u) - \lambda, \lambda - \langle u, x' \rangle) : u \in X\} = -f^*_\lambda(x') \leq \beta$$

et finalement

$$(f^{\mathrm{E}})^*_\lambda(x') \leq \varepsilon + f^*_\lambda(x') \quad \forall \varepsilon > 0$$

d'où

$$(f^{\mathrm{E}})^*_\lambda(x') \leq f^*_\lambda(x').$$

En définitive $(f^{\mathrm{E}})^*_\lambda = f^*_\lambda$. □

Corollaire 3. *Soit f appartenant à $\mathbb{F}_+$. Pour toute fonctionnelle g vérifiant $f^{\mathrm{E}} \leq g \leq f$, alors $g^*_\lambda = f^*_\lambda$.*

Exemple. Prenons $f(x) = |x|$, $X = \mathbb{R}$ et $\langle x, y\rangle = xy$. On obtient:

$$\lambda - f_\lambda^*(x') = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \leq 0 \\ \frac{2\lambda}{1+|x'|} & \text{sinon.} \end{cases} \qquad q(x', z) = \begin{cases} 0 & \text{si } zx' \leq 0 \\ \frac{zx'}{3+|x'|} & \text{sinon.} \end{cases}$$
$$f^{\mathrm{E}}(x') = \sup\{q(x', z) : x' \in X'\} = |z|$$

4. Quasi-tangentiel. Crouzeix définit le tangentiel de f en z comme étant le sous-ensemble $Tf(z)$ de X' tel que :

$$x' \in Tf(z)$$
$$\iff f(z) = \inf\big\{\lambda \in \mathbb{R} : \sup\{\langle x - z, x'\rangle : f(x) - \lambda \leq 0 \text{ et } x \in X\}\big\} \geq 0.$$

Il est alors naturel de poser la définition suivante.

Définition 4. Soient f appartenant à $\mathbb{F}_+$ et x' un élément de X'. x' est un sous-gradient de f en z si et seulement si $f(z) = \sup\{\min[\lambda - f_\lambda^*(x'), \langle z/2, x'\rangle - \lambda] : \lambda \in \mathbb{R}\}$ et si $f(z)$ est fini. Le quasi-tangentiel de f en z, noté $Qf(z)$ est l'ensemble (éventuellement vide) des sous-gradients de f en z. On a donc:

$$x' \in Qf(z) \iff f(z) = q(x', z).$$

Théorème 9. *Soient f appartenant à $\mathbb{F}_+$ et $z \in X$.*

a) *$Qf(z)$ est un ensemble convexe (éventuellement vide).*
b) $0 \in Qf(z) \iff f(z) = \inf f$.
c) $Qf(z) \neq \varnothing \implies f(z) = f^{\mathrm{E}}(z)$.
d) $f(z) = f^{\mathrm{E}}(z) \implies Qf(z) = Qf^{\mathrm{E}}(z)$

Preuve. a) D'une manière évidente, $q(x', z) \leq f(z)$ pour tout $x' \in X'$. Par conséquent, $Qf(z) = \{x' \in X' : -q(x', z) \leq -f(z)\}$. Comme q est qcv par rapport à x', on déduit que $Qf(z)$ est un ensemble convexe.

b) $q(0, z) = \sup\{\min[\lambda - f_\lambda^*(0), -\lambda] : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Comme

$$\lambda - f_\lambda^*(0) = \inf\{\max[f(x), 2\lambda] : x \in X\} = \begin{cases} \inf f & \text{si } 2\lambda \leq \inf f \\ 2\lambda & \text{sion,} \end{cases}$$

on déduit aisément que $q(0, z) = \inf f$.

c) $Qf(z)$ est non vide donc il existe x' tel que $f(z) = q(x', z)$. On sait que

$$q(x', z) \leq \sup\{q(y', z) : y' \in X'\} = f^{\mathrm{E}}(z) \leq f(z),$$

d'où $f(z) = f^{\mathrm{E}}(z)$.

d) Il suffit de remarquer, d'après le théorème 8, que f et f^{E} engendrent la même fonction q. $\square$

5. Optimisation quasi convexe. À f appartenant à $\mathbb{F}_+$, on associe le problème primal (P) :

$$\alpha = \inf f.$$

Désignons par U et U' deux espaces vectoriels topologiques localement convexes en dualité par la forme bilinéaire notée $(\ ,\ )$. U est appelé espace des perturbations pour le problème (P). Soit ψ la fonction de perturbation de $X \times [0,\infty]$ telle que :

$$\psi(x,0) = f(x) \quad \text{pour tout } x \text{ appartenant à } X.$$

Pour la perturbation u de U, on considère le problème perturbé (P_u) :

$$k(u) = \inf\{\psi(x,u) : x \in X\}.$$

Remarquons que le problème (P) correspond à la valeur $u = 0$ et donc $\alpha = k(0)$. k^{E} étant la plus grande minorante qcx et sci de k, on déduit que $k^{\mathrm{E}}(0) \leq k(0) = \alpha$. Cette inégalité nous amène à considérer le problème dual (Q) de (P) :

$$\beta = \sup\{q(u',0) : u' \in U\}$$

où la fonction q est la fonction polaire de k en 0. Son expression est

$$\beta = \sup\{\min[\inf\{\max[\inf\{\psi(x,u) : x \in X\}, 2\lambda - (u,u')] : u \in U\}, -\lambda] : (u',\lambda) \in U' \times \mathbb{R}\}.$$

On a toujours $\beta \leq \alpha$; cependant on a l'égalité si k est qcx et sci en 0. Désignons par S l'ensemble des solutions du problème (Q). On a le résultat suivant.

Théorème 10. *Si l'ensemble $Qf(0)$ est non vide, alors*

$$\beta = \alpha \iff Qk(0) = S.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que :

$$S = \{u' \in U' : q(u',0) = \beta = k^{\mathrm{E}}(0)\} \quad \text{et} \quad Qf(0) = \{u' \in U : q(u',0) = \alpha\}. \quad \square$$

6. Conclusion. On a dégagé une nouvelle notion de polarité des fonctionnelles. L'originalité de la définition réside dans le fait qu'au lieu de minimiser la fonctionnelle sur un demi-espace (ou un hyperplan), on préfère d'abord comparer cette fonctionnelle à une application linéaire et ensuite minimiser la nouvelle fonctionnelle obtenue sur l'espace tout entier.

English extended abstract. As usual in the context of convex analysis, we work in the setting of two locally (real) topological vector spaces X and X' (resp. U and U') paired in separating duality by a bilinear form we denote by $\langle\ ,\ \rangle$ (resp. $(\ ,\ )$).

Let us present some notations that will be used throughout this abstract

$$\mathbb{F} = \{f\colon X \to [-\infty,+\infty]\}, \quad \mathbb{F} = \{f\colon X \to [0,+\infty]\}$$
$$H_\alpha(x) = \{x' \in X' : \langle x,x'\rangle < \alpha\} \text{ and } H_\alpha(x') = \{x \in X : \langle x,x'\rangle < \alpha\}$$

for any real α. Let us denote the slices of a function f by $T(f,\lambda) = \{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ and $S(f,\lambda) = \{x \in X : f(x) < \lambda\}$ for any real λ and the conjugate convex f^{c} is defined as $f^{\mathrm{c}}(x') = \sup\{\langle x,x'\rangle - f(x) : x \in X\}$.

To define our conjugate, we use the following result:

Let f and g be any functions in $\mathbb{F}$. We put $F(x,r) = f(x) - r$ and $G(x,r) = g(x) - r$ $\forall (x,r) \in X \times \mathbb{R}$. Then

$$2\inf\{\max\bigl(F(x,r), -G(x,r)\bigr) : (x,r) \in X \times \mathbb{R}\} = \inf\{f(x) - g(x) : x \in X\}. \quad \text{(E1)}$$

This result was obtained by Volle putting $g = g^{cc}$ (cf. [14]).

Definition 1. Let f be any function in $\mathbb{F}$ and λ be any real number. The λ-conjugate of f is defined as: $f_\lambda^*(x') = -\inf\{\max(f(x) - \lambda, \lambda - \langle x, x'\rangle) : x \in X\}$ $\forall x' \in X'$.

Remark. We have simply changed $g(x)$ by $\langle x, x'\rangle$ in the equality (E1)

Theorem 1. *let f and g be any functions in $\mathbb{F}$. We have:*

a) $f^c = 2\sup\{f_\lambda^* : \lambda \in \mathbb{R}\}$ *and* $2\sup\{f_\lambda^*(0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = -\inf f$*;*
b) $f \le g \implies g_\lambda^* \le f_\lambda^*$*;*
c) $\sup(f_i)_\lambda^* = (\inf f_i)_\lambda^*$ *and* $(\sup f_i)_\lambda^* = \inf(f_i)_\lambda^*$ *for every family functions f_i;*
d) *i) If we put $(f \cdot \mu)(x) = \mu f(x/\mu)$ for every positive real number μ, then $(f \cdot \mu)_\lambda^* = \mu(f_{\lambda/\mu})^*$;*
ii) $(\mu f)_\lambda^* = \mu(f_{\lambda/\mu})^*(x'/\mu)$ for every positive real number μ
e) $S(-f_\lambda^*, \mu) = \bigcup\{H_{\mu-\lambda}(x) : x \in S(f, \mu+\lambda)\}$
f) $T(f_\lambda^*, -\mu) = \bigcap\{\complement H_{\mu-\lambda}(x) : x \in S(f, \mu+\lambda)\}$ *where $\complement A$ is the complementary set of A;*
g) $T(f^c, 2\mu) = \bigcap\{T(f_\lambda^*, \mu) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Theorem 2. *Let f any function in $\mathbb{F}$.*

a) *For every fixed λ, the function f_λ^* is quasiconvex and lower semi-continuous (lsc) with respect to x'.*
b) *For every fixed x', the function f_λ^* is quasiconvex and lower semi-continuous (lsc) with respect to λ.*

Let us recall briefly the λ-conjugates expressions defined respectively by Greenberg-Pierskalla, Crouzeix, and Singer:

i) $f_{\lambda,1}^*(x') = -\inf\{f(x) - \lambda : \lambda - \langle x, x'\rangle \le 0 \text{ and } x \in X\}$ (cf. [5]);
ii) $f_{\lambda,2}^*(x') = -\inf\{\lambda - \langle x, x'\rangle : f(x) - \lambda \le 0 \text{ and } x \in X\}$ (cf. [3]);
iii) $f_{\lambda,3}^*(x') = -\inf\{f(x) - \lambda : \lambda - \langle x, x'\rangle = 0 \text{ and } x \in X\}$ (cf. [12])
$f_{\lambda,4}^*(x') = -\inf\{f(x) - \lambda + 1 : \lambda - 1 - \langle x, x'\rangle < 0 \text{ and } x \in X\}$ (cf. [12]).

Théorem 3. *Let f be any function in $\mathbb{F}$.*

$$\begin{aligned} f_\lambda^*(x') &= -\sup\{\mu : H_{\mu-\lambda}(x') \cap S(f, \mu+\lambda) = \varnothing\} \\ &= -\inf\{\mu : H_{\mu-\lambda}(x') \cap S(f, \mu+\lambda) \neq \varnothing\}. \end{aligned}$$

In this paragraph, we define the biconjugate using the second λ-conjugate.

Definition 2. Let f be any function in $\mathbb{F}$. The quasiconvex biconjugate of f is defined as:

$$f^E(z) = \sup\{(f_\lambda^*)_\lambda^*(z/2) : \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \forall x' \in X'.$$

We need the following function to define the quasi-tangential of f.

Definition 3. Let f be any function in $\mathbb{F}$. The polar function q of f in the point z is defined as

$$q(x', z) = \sup\{\min[\lambda - f_\lambda^*(x'), \langle z/2, x'\rangle - \lambda]\lambda \in \mathbb{R}\} \quad \forall x' \in X'.$$

Theorem 4. *Let f be any function in $\mathbb{F}$. Then f^{E} is quasiconvex and lsc function.*

Theorem 5. *The function $(-q)$ is quasiconvex with respect to x'.*

Remark 3. We have the following result: f^{E} is always a positive function. Thus, generally f^{E} is not majorized by f so this is why we consider only positive functions. But if f is any function in $\mathbb{F}$, then we can apply the conjugacy to the new positive functin $e^{f(x)}$.

Theorem 6. *Let f be any function in $\mathbb{F}_+$. Then f^{E} is majorized by f.*

Theorem 7. *Let f be any function in $\mathbb{F}_+$. If f is lsc in z of X, then $f^{\mathrm{E}}(z) = f(z)$.*

Corollary 1. *For any function f in $\mathbb{F}_+$, $f^{\mathrm{EE}} = f^{\mathrm{E}}$.*

Corollary 2. *Let f be any function in $\mathbb{F}_+$. Then f^{E} is the largest quasiconvex lsc function of f.*

Theorem 8. *For any function f in $\mathbb{F}_+$, $(f^{\mathrm{E}})_\lambda^* = f_\lambda^*$.*

Corollary 3. *Let f be any function in $\mathbb{F}_+$. For every function g such that $f^{\mathrm{E}} \leq g \leq f$, then $g_\lambda^* = f_\lambda^*$.*

Example. Let us take $f(x) = |x|$, $X = \mathbb{R}$, and $\langle x, y\rangle = xy$. We obtain:

$$\lambda - f_\lambda^*(x') = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda \leq 0 \\ \frac{2\lambda}{1+|x'|} & \text{elsewhere,} \end{cases} \qquad q(x', z) = \begin{cases} 0 & \text{if } zx' \leq 0 \\ \frac{zx'}{3+|x'|} & \text{elsewhere,} \end{cases}$$
$$f^{\mathrm{E}}(x') = \sup\{q(x', z) : x' \in X'\} = |z|.$$

As applications, we define the quasi-tangential and we characterize the dual problem of a positive functin f.

Definition 4. Let f be any function in $\mathbb{F}_+$ and x' be an élément of X'. x' is a subgradient of f in z if and only if $f(z) = \sup\{\min[\lambda - f_\lambda^*(x'), \langle z/2, x'\rangle - \lambda] : \lambda \in \mathbb{R}\}$ and $f(z)$ is real. Let us denote by $Qf(z)$, the quasi-tangential of f in z, i.e. the set of subgradients of f in z. Then:

$$x' \in Qf(z) \iff f(z) = q(x', z).$$

Theorem 9. *Let f be any function in $\mathbb{F}_+$ and $z \in X$.*

a) *$Qf(z)$ is a convex set (eventually empty).*
b) $0 \in Qf(z) \iff f(z) = \inf f$.
c) $Qf(z) \neq \varnothing \implies f(z) = f^{\mathrm{E}}(z)$.
d) $f(z) = f^{\mathrm{E}}(z) \implies Qf(z) = Qf^{\mathrm{E}}(z)$.

To $f \in \mathbb{F}_+$, we can associate the following problem denoted by (P): $\alpha = \inf f$. Let the function $\psi\ X \times U \to [0, +\infty]$ be such that $\psi(x, 0) = f(x)$, $\forall x \in X$. The dual problem, denoted by (Q), will be: $\beta = \sup\{q(u', 0) : u' \in U'\}$, where the function q is the polar function of k in 0 with $k(u) = \inf\{\psi(x, u) : x \in X\}$. We have

$$\beta = \sup\{\min[\inf\{\max[\inf\{\psi(x,u) : x \in X\}, 2\lambda - (u, u')] : u \in U\}, -\lambda] : (u', \lambda) \in U' \times \mathbb{R}\}.$$

We always have $\beta \leq \alpha$; but we have the equality if k is quasiconvex and lsc in 0. Let us denote by S the set of solutions of the problem (Q). We have the following result.

Theorem 10. *If $Qf(0)$ is not empty, then*: $\beta = \alpha \iff Qk(0) = S$.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Atteia et A. Elqortobi, *Quasi-convex duality*, Optimization and Optimal Control, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., vol. 30, 1980, pp. 3–8.
2. N. Bourbaki, *Espace vectoriels topologiques*, Hermann.
3. J.-P. Crouzeix, *Contributions à l'étude des fonctions quasi convexes*, thèse de doctorat d'état, Université de Clermont-Ferrand, France, 1977.
4. A. Elqortobi, inf-*convolution quasi convexe des fonctionnelles positives*, RAIRO Rech. Opér., vol. 26, 1992, pp. 301–311.
5. M. J. Greenberg et W. P. Pierskallai, *Quasi-conjugate functions and surrogate duality*, Cahiers Centre Études Rech. Opér. **15** (1973), 437–448.
6. P.-J. Laurent, *Approximation et Optimisation*, Hermann, 1972.
7. J. E. Martinez, *Quasiconvex duality theory by generalized conjugation methods*, Optimization **19** (1988), 603–652.
8. J.-J. Moreau, inf-*convolution, sous-additivité, convexité des fonction numériques*, J. Math. Pures Appl. **49** (1970), 109–154.
9. U. Passy et E. Z. Prisman, *Conjugacy in quasiconvex programming*, Math. Programming **30** (1984), 121–146.
10. J.-P. Penot et M. Volle, *On quasi-convex duality*, Math. Oper. Res. **15** (1990), 597–625.
11. R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton, 1970.
12. I. Singer, *Conjugate functionals and level sets*, Nonlinear Anal., vol. 8, 1984, pp. 313–320.
13. M. Volle, *Conjugaison par tranches*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **139**, 279–312.
14. ———, *Conjugaison par tranches et dualité de Toland*, Optimization **18** (1987), 633–642.

A. ELQORTOBI
DÉP. DES MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES
UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL
C. P. 6128, SUCC. A
MONTRÉAL (QUÉBEC) CANADA
H3C 3J7