Ann. Sci. Math. Québec **17** (1993), no. 2, 139–143.

RELATIONS ENTRE L'ORTHOGONALITÉ DE BIRKHOFF-JAMES ET L'ORTHOGONALITÉ DE CARLSSON

BRAHIM BOUSSOUIS

RÉSUMÉ. Nous montrons dans cet article que si l'orthogonalité de Carlsson entraîne l'orthogonalité de Birkhoff-James, alors l'espace est préhilbertien.

ABSTRACT. We prove that a real normed linear space is an inner product space if the Carlsson orthogonality implies the Birkhoff-James orthogonality. See the English extended abstract at the end of the paper.

Introduction. Un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit préhilbertien s'il existe un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$ tel que $\|x\|^2 = (x, x)$, pour tout $x \in E$. Dans ce cas on définit usuellement l'orthogonalité de deux vecteurs x et y par $x \perp y$ si et seulement si $(x, y) = 0$.

Il se trouve que cette dernière relation admet plusieurs expressions équivalentes, certaines d'entre elles gardent un sens dans un espace normé quelconque, et donnent lieu à différents concepts d'orthogonalité (voir [1, 5, 7, 9–11]).

En retour, l'étude des propriétés généralisées et la comparaison de celles-ci les unes au autres, se trouvent à la base de nombreuses caractérisations des espaces préhilbertiens (cf. [2–4]). À ce propos notons la caractérisation suivante obtenue récemment par l'auteur :

Théorème 0.1 [6]. *Un espace normé E est préhilbertien si et seulement si pour tout plan vectoriel $P \subset E$ et pour tout $x \in P$, il existe une droite vectorielle $D \subset P$, telle que x soit orthogonal au sens de Carlsson à D.*

Une conséquence immédiate de ce théorème est qu'un espace normé est préhilbertien chaque fois que l'orthogonalité de Carlsson est impliquée par une orthogonalité homogène et existante à droite.

On retrouve ainsi une caractérisation démontrée antérieurement dans [8], à savoir :

Corollaire 0.2. *E est préhilbertien si et seulement si l'orthogonalité de Birkhoff-James implique l'orthogonalité de Carlsson.*

Le but de cet article est de démontrer la réciproque du corollaire 0.2.

Signalons que cette réciproque est vraie pour certains cas particuliers de l'orthogonalité de Carlsson (cf. [12, théorèmes 5, 7 et 9]). Elle est également vraie si la norme

Reçu le 3 avril 1992 et, sous forme définitive, le 20 octobre 1992.

est soit strictement convexe, soit Gâteaux-différentiable en dehors de l'origine (cf. [13, p. 126]).

1. Préliminaires et notations. Dans tout ce qui suit on désignera par

$(E, \|\ \|)$: un espace vectoriel normé réel de dimension > 1,
S : la sphère unité de E $(S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\})$.

L'abbréviation $\perp_X \implies \perp_Y$ signifiera que l'orthogonalité au sens X entraîne l'orthogonalité au sens Y. Soient $(x, y) \in E^2$.

Définition 1.1 [5, p. 169]. x est orthogonal à y au sens de Birkhoff-James, ce que nous noterons par $x \perp_{\mathrm{B}} y$, si et seulement si $\|x\| \leq \|x + ky\|$, pour tout réel k.

Définition 1.2 [7, p. 297]. x est orthogonal à y au sens de Carlsson, ce que nous noterons par $x \perp_{\mathrm{C}} y$, si et seulement si $\sum_{j=1}^{m} a_j\|b_j x + c_j y\|^2 = 0$, où m est un entier ≥ 2; a_j, b_j, c_j sont des réels tels que $\sum_{j=1}^{m} a_j b_j^2 = \sum_{j=1}^{m} a_j c_j^2 = 0$ et $\sum_{j=1}^{m} a_j b_j c_j = 1$; $a_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, m$.

Nous supposerons en outre, ce qui n'enlève rien à la généralité, que les couples (b_j, c_j) sont deux à deux linéairement indépendants.

Définition 1.3. Une orthogonalité $\perp$ est homogène si chaque fois que $x \perp y$ on a également $ax \perp by$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Elle est dite existante à gauche (respectivement à droite) si pour tout $(x, y) \in E^2$, il existe un réel c tel que $cx + y \perp x$ (respectivement $x \perp cx + y$). Enfin on dit que l'orthogonalité $\perp$ est unique à gauche (respectivement à droite) si le réel c ci-dessus est unique chaque fois que $x \neq 0$.

Rappelons maintenant quelques résultats qui nous serons utiles par la suite.

Lemme 1.4 [7, théorème 3.1, corollaire 6.6]. *L'orthogonalité $\perp_{\mathrm{C}}$ est existante à droite et à gauche. De plus elle est homogène si et seulement si l'espace est préhilbertien.*

Dans [7], S. O. Carlsson démontre seulement l'existence à droite de $\perp_{\mathrm{C}}$. Néanmoins sa méthode sert également à prouver l'existence à gauche de cette orthogonalité.

Lemme 1.5 [11, théorèmes 2.3, 4.1 et 4.3 et corollaire 6.6]. *L'orthogonalité $\perp_{\mathrm{B}}$ est existante à droite et à gauche, et elle est homogène. De plus elle est unique à gauche si et seulement si l'espace est strictement convexe (i.e. sa sphère unité ne contient pas de segments). Enfin $\perp_{\mathrm{B}}$ est unique à droite si et seulement si la norme est Gâteaux-différentiable en dehors de l'origine.*

2. Résultat principal.

Théorème 2.1. *E est préhilbertien si et seulement si $\perp_{\mathrm{C}} \implies \perp_B$.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire car, dans un espace préhilbertien les orthogonalités $\perp_{\mathrm{C}}$ et $\perp_{\mathrm{B}}$ coïncident avec l'orthogonalité usuelle.

Pour montrer qu'elle est suffisante, démontrons d'abord que si $\perp_{\mathrm{C}} \implies \perp_B$, alors l'espace est strictement convexe.

En effet si tel n'est pas le cas, on disposerait de $(x, y) \in S^2$, $x \neq y$, tel que le segment $[x, y]$ soit inclus dans S et tel que y soit un point extrémal de S (i.e. si $y = \lambda u + (1 - \lambda)v$, avec $0 < \lambda < 1$ et $(u, v) \in S^2$, alors $u = v = y$).

En vertu de toutes ces hypothèses on aurait alors :

$$\varepsilon u \perp_{\mathrm{C}} (v-u), \quad \text{pour tout } (u,v) \in ([x,y])^2 \text{ et pour tout } \varepsilon \in \{-1,+1\}. \tag{1}$$

En effet soient $u = tx + (1-t)y$ et $v = t'x + (1-t')y$, $0 \leq t, t' \leq 1$. Il suffit de montrer (1) pour tout $0 < t < 1$, les cas $t = 0$ et $t = 1$ s'obtiennent par continuité. Grâce au lemme 1.4, il existe un réel a tel que $\varepsilon u \perp_{\mathrm{C}} au + v$.

Puisque $\perp_{\mathrm{C}} \Longrightarrow \perp_B$, on a aussi $\varepsilon u \perp_{\mathrm{B}} au + v$, c'est-à-dire

$$1 = \|\varepsilon u\| \leq \|(\varepsilon + ka)u + kv\|, \quad \forall k \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

On en déduit, en choisissant k assez petit (positif et négatif) que

$$1 = \left\| u + \left[\frac{k}{\varepsilon} + k(a+1)\right]^{-1} (v-u) \right\| = \left\| \left[\frac{1}{\varepsilon} + k(a+1)\right]^{-1} (\varepsilon u + k(au+v) \right\| \geq \frac{1}{|\varepsilon + k(a+1)|}.$$

Ainsi $a = -1$, et la relation (1) est démontrée.

Reprenons à présent la démonstration du théorème 2.1.

La relation (1) se traduit par $\sum_{j=1}^{m} a_j \|\varepsilon b_j u + c_j(v-u)\|^2 = 0$, ou encore en utilisant l'égalité $\sum_{j=1}^{m} a_j b_j^2 = 0$, et en exprimant u et v en fonction de x et y:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j[\|p_j x + q_j y\|^2 - (p_j + q_j)^2] = 0, \tag{2}$$

où $p_j = \varepsilon t b_j + (t'-t)c_j$ et $q_j = \varepsilon(1-t)b_j - (t-t')c_j = \varepsilon b_j - p_j$.

Notons que $\|p_j x + q_j y\| = |p_j + q_j|$ chaque fois que $p_j q_j \geq 0$ (car $[x,y] \subset S$), et choisissons à présent ε, t et t' de telle façon qu'il y ait un seul indice j pour lequel $p_j q_j < 0$.

Deux cas sont alors à distinguer:

1[er] *cas.* Si $b_1 \cdots b_m \neq 0$

On choisit ε tel que $\inf_{1 \leq j \leq m}(\varepsilon c_j / b_j) < 0$ (on prend $\varepsilon = +1$ si $\inf_{1 \leq j \leq m}(c_j/b_j) < 0$ et $\varepsilon = -1$ sinon). En réindexant au besoin on peut supposer que $(\varepsilon c_1/b_1) < (\varepsilon c_2/b_2) < \cdots < (\varepsilon c_m/b_m)$. (Rappelons que les couples (b_j, c_j) sont deux à deux linéairement indépendants).

Soient $a < 0$ et $b > 1$ tels que $(\varepsilon c_1/b_1) < a < (\varepsilon c_2/b_2) < \cdots < (\varepsilon c_m/b_m) < b$ et posons $t = a/(a-b)$ et $t' = (1-a)/(b-a)$. On vérifie aisément que $0 < t < t' < 1$ et que $(\varepsilon c_1/b_1) < a = t/(t-t') < (\varepsilon c_2/b_2) < \cdots < (\varepsilon c_m/b_m) < b = (1-t)(t'-t)$.

Écrivons $p_j q_j = b_j^2(t'-t)^2[t/(t'-t) + \varepsilon c_j/b_j] \cdot [(1-t)/(t'-t) - \varepsilon c_j/b_j]$. Il s'ensuit que $p_1 q_1 < 0$ et que $p_j q_j > 0$ pour $2 \leq j \leq m$ et la relation (2) se réduit à $\|p_1 x + q_1 y\| = |p_1 + q_1| = |b_1|$.

Posons $w = \varepsilon[(p_1/b_1)x + (q_1/b_1)y]$; on a alors $w \in S$, $w \neq x$ et $y = (\varepsilon b_1/q_1)w + (1 - \varepsilon b_1/q_1)x$, $0 < \varepsilon b_1/q_1 < 1$. Ce qui contredit l'extrémalité de y.

2[e] *cas.* Si $b_1 \cdots b_m = 0$.

Dans ce cas, il va exister un seul indice i compris entre 1 et m, tel que $b_i = 0$. De plus on aurait $c_i \neq 0$. Quitte à passer par une réindexation on peut supposer que $i = 1$.

Soient à présent $a < 0$ et $b > 1$ tels que $a < (c_j/b_j) < b, 2 \leq j \leq m$. Écrivons comme dans le premier cas $a = t/(t - t')$ et $b = (1 - t)/(t' - t)$, avec $0 < t < t' < 1$ et choisissons $\varepsilon = +1$. On constate alors que $p_j q_j > 0$ pour $2 \leq j \leq m$ et la relation (2) se réduit à :

$$a_1 c_1^2 \|u - v\|^2 = a_1 c_1^2 (t' - t)^2 \|x - y\|^2 = 0.$$

Donc $x = y$, contrairement à l'hypothèse faite sur x et y.

En conclusion E est strictement convexe.

Pour terminer la démonstration du théorème 2.1, supposons qu'il existe $(x, y) \in E^2$, tel que x soit B-orthogonal et non C-orthogonal à y.

D'après le lemme 1.4, il existe un réel non nul a tel que $ay + x \perp_{\mathrm{C}} y$. Comme $\perp_{\mathrm{C}} \Longrightarrow \perp_{\mathrm{B}}$, on a aussi $ay + x \perp_{\mathrm{B}} y$. Or E est strictement convexe, donc $\perp_{\mathrm{B}}$ est unique à gauche (d'après le lemme 1.5) et par suite $a = 0$. D'où une contradiction.

Par conséquent on a $\perp_{\mathrm{B}} \Longrightarrow \perp_{\mathrm{C}}$ et les orthogonalités sont alors équivalentes. On en déduit que $\perp_{\mathrm{C}}$ est homogène et que l'espace E est préhilbertien, d'après le lemme 1.4. Ceci achève la démonstration du théorème 2.1. □

Remerciements. L'auteur tient à remercier l'arbitrage de la revue de l'avoir aidé à améliorer la rédaction de cet article.

English extended abstract. Most characterizations of inner product spaces are based either on the fact that a generalized orthogonality has a well-defined property (such as homogeneity, symmetry, ...) or that an orthogonality is implied by another one. For more details see [2–4].

The aim of this paper is to show the following characterization of inner product spaces is true: A necessary and sufficient condition for a real normed space to be an inner product space is that Carlsson's orthogonality implies Birkhoff-James' orthogonality.

The proof is in two parts:

First, we show that if $\perp_{\mathrm{C}} \Longrightarrow \perp_{\mathrm{B}}$ then the underlying space is strictly convex. In order to prove this statement, we use the same technique as the one developped in [12] where it was noticed that if $\perp_{\mathrm{C}} \Longrightarrow \perp_{\mathrm{B}}$ and if the interval $[x, y]$ belongs to the unit sphere (denoted S), then we have $\varepsilon u \perp_{\mathrm{C}} (v - u)$, for all $(u, v) in ([x, y])^2$ and for all ε in $\{-1, +1\}$. It follows that, by choosing appropriately u, v, and ε, we get either $x = y$ or that x (or y) is not an extremal point of S. The contradiction is obtained by choosing y as an extremal point of S and $x \neq y$.

The second step of the proof is based on the fact if a right existent orthogonality (resp. left existent orthogonality) implies a unique right orthogonality (resp. unique left orthogonality), then they are equivalent. Which is the case, because $\perp_{\mathrm{C}}$ is left existent and $\perp_{\mathrm{B}}$ is left unique if the norm is strictly convex (Lemma 1.5). Therefore, $\perp_{\mathrm{C}}$ is homogeneous and the result follows from Lemma 1.4.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Alonso, *Orthogonalidad en espacios normados*, Thèse de doctorat, Univ. Extramadura, Badajoz, 1984.
2. J. Alonso et C. Benitez, *Orthogonality in normed spaces*: *a survey*: Part I *Main properties*, Extracta Math. **3** (1988), 1–15.

3. ———, *Orthogonality in normed spaces: a survey*: Part II *Relations between main orthogonalities*, Extracta Math. **4** (1989), 121–131.
4. D. Amir, *Characterizations of inner product spaces*, Birkhäuser, Basel, 1986.
5. G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J. **1** (1935), 169–172.
6. B. Boussouis, *Caractérisations des espaces préhilbertiens au moyen de orthogonalités généralisées*, Extracta Math. **7** (1992), 20-24.
7. S. O. Carlsson, *Orthogonality in normed linear spaces*, Ark. Mat. **4** (1962), 297–318.
8. J. Desbiens, *Une nouvelle caractérisation des espaces de Hilbert*, Ann. Sci. Math. Québec **14** (1990), 17–22.
9. C. R. Dimminie, *A new orthogonality relation in normed spaces*, Math. Nachr. **114** (1983), 197–203.
10. R. C. James, *Orthogonality in normed linear spaces*, Duke Math. J. **12** (1945), 291–301.
11. ———, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 265–292.
12. O. P. Kapor et J. Prasad, *Orthogonality and characterizations of inner product spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. **19** (1978), 403–416.

Département des mathématiques et informatique
Faculté des sciences
Université Sidi Mohammed ben Abdellah
B. P. 1796 — (Fès-Atlas), Fès, Maroc