

RÉSULTATS D'EXISTENCE ET DE SUPERCONVERGENCE POUR LA MÉTHODE DES α

ALI BENSEBAH, FRANÇOIS DUBEAU ET JACQUES GÉLINAS

RÉSUMÉ. La méthode des α est une méthode variationnelle de résolution d'un système d'équations différentielles utilisant des polynômes par morceaux de degré k ainsi qu'un paramètre réel α modifiant les discontinuités aux noeuds. Nous démontrons que l'ordre de convergence aux noeuds est $2k + 2$ et celui des polynômes est $k + 1$ en norme L^2 quand $\alpha = 1/2$ et k pair ou quand $\alpha = -\infty$ et k impair, résolvant ainsi par l'affirmative une conjecture formulée par Delfour, Hager et Trochu en 1981. L'existence et l'unicité de la solution approchée dans le cas implicite est également prouvée, complétant un résultat obtenu par Dubeau en 1986. Les relations avec une méthode de projection et une généralisation sont explorées.

ABSTRACT. The α -method is a variational method for the solution of a system of differential equations using piecewise polynomials of degree k and also a real parameter α controlling the discontinuities at the nodes. We show that the order of convergence is $2k + 2$ at the nodes and $k + 1$ for the L^2 norm of the polynomials when $\alpha = 1/2$ and k even, or when $\alpha = -\infty$ and k is odd, thus solving by the affirmative a conjecture formulated by Delfour, Hager and Trochu in 1981. The existence and unicity of the approximation in the implicit case is also proven, completing a result obtained by Dubeau in 1986. Relations with a projection method and a generalisation are explored. See the English extended abstract at the end of the paper.

1. Introduction. Dans [4], Delfour, Hager et Trochu présentent une méthode variationnelle de résolution d'un système linéaire d'équations différentielles ordinaires utilisant une approximation polynômiale discontinue, généralisant une méthode introduite par Lesaint et Raviart [11]. Dubeau [8, 9] a étendu les résultats de convergence aux systèmes non linéaires et a discuté la mise en œuvre de cette méthode qui dépend d'un paramètre réel α . Des méthodes d'approximation discontinue telles que présentées ici peuvent être utilisées en théorie de la commande optimale (voir par exemple [5] et [7]) ainsi que

Reçu le 2 août 1993.

Ce travail a été réalisé à l'aide de subventions du ministère de la Défense nationale du Canada (ARP-FUHLB) et du ministère de l'Éducation du Québec (FCAR 94-ER-0725).

pour l'approximation de solutions d'équations aux dérivées partielles (voir par exemple [10] et [11]).

Le but de cet article est de compléter l'étude de Dubeau [9] en résolvant par l'affirmative deux conjectures concernant l'existence de la solution approximative dans le cas implicite et l'ordre de convergence plus élevé observé pour certaines valeurs spéciales de α par Chalifour [2] et Delfour, Hager et Trochu [4]. Nous présentons tout d'abord une justification des équations de la méthode des α en modifiant un cas particulier ($L = 0$) d'approximation discontinue tiré de Delfour et Dubeau [3]. La section 2 est consacrée à la preuve d'existence de la solution du problème approché correspondant à la méthode des α implicite (cas B de [9], lorsque la partition est assez fine. On montre par un contre-exemple qu'il faut imposer des conditions sur le système différentiel pour certaines valeurs de α . On étudie à la section 3 l'erreur en norme L^2 des polynômes par morceaux et à la section 4 l'erreur des valeurs aux noeuds obtenues par la méthode des α : seuls les résultats pour certaines valeurs limites de α sont nouveaux, puisque l'article de Dubeau [9] couvre bien les autres cas.

Les techniques employées sont élémentaires, et se trouvent presque toutes, à notation près, dans [4], [3] ou [9]. Les seules exceptions sont la réduction à une méthode à un pas dans la preuve d'existence pour la méthode implicite, l'emploi de deux intervalles successifs pour obtenir les résultats de convergence dans les cas limites et l'utilisation systématique d'une méthode de projection pour simplifier l'étude d'autres méthodes numériques.

Nous utilisons les notations suivantes : donné un intervalle ouvert $\Omega = (a, b)$ de \mathbb{R} , $L^2(\Omega)$ est l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur Ω , $\langle u, v \rangle_\Omega$ désigne le produit scalaire usuel, et $\|u\|_\Omega$ est la norme de u dans L^2 . Pour $p = 1$ ou $p = \infty$, $\|u\|_{p, \Omega}$ est la norme de $u \in L^p(\Omega)$. On utilise Dv pour la dérivée de v au sens des distributions, et l'espace de Sobolev des fonctions de $L^2(\Omega)$ ayant des dérivées d'ordre k dans le même espace est noté par $H^k(\Omega)$.

Les intervalles d'une partition de $\Omega = [a, b]$ en N éléments finis sont $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$, pour $i \in I = \{1, 2, \dots, N\}$, leur mesure est $h_i = x_i - x_{i-1}$ et la norme de la partition est $h = \max\{h_i \mid i \in I\}$.

Donné un entier positif ou nul k , $P_k(\Omega)$ est le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k . On note par p_k le polynôme de Legendre de degré k sur $[0, 1]$, normalisé par $p_k(1) = 1$, et on utilise la base orthogonale de $P_k(\Omega_i)$, pour $i \in I$, définie par $p_{k,i}(x) = p_k((x - x_{i-1})/h_i)$. La norme de $p_{k,i}$ est $\sigma h_i^{1/2}$ où $\sigma = 1/\sqrt{2k+1}$.

La projection orthogonale de $L^2(0, 1)$ sur $P_k(0, 1)$ sera notée par S_k et sa composante perpendiculaire par $S_k^\perp = I - S_k$. Les opérateurs correspondants associés à $P_k(\Omega_i)$ et $L^2(\Omega_i)$ sont $S_{k,i}$ et $S_{k,i}^\perp$. Les conditions d'orthogonalité et de normalisation des polynômes de Legendre entraînent la relation suivante, pour $F \in H^1(0, 1)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & (\alpha + \beta)(S_k^\perp F)(1^-) - (\alpha(-1)^{k+1} + \beta(-1)^k)(S_k^\perp F)(0^+) \\ & = \langle S_k^\perp F, D(\alpha p_{k+1} + \beta p_k) \rangle_{(0,1)} + \langle D(S_k^\perp F), \alpha p_{k+1} + \beta p_k \rangle_{(0,1)} \\ & = \langle DF, \alpha p_{k+1} + \beta p_k \rangle_{(0,1)} \end{aligned}$$

On utilisera en particulier les relations suivantes pour relier la valeur ponctuelle de

l'erreur de projection en une extrémité d'un intervalle à un produit scalaire impliquant la dérivée, obtenues avec $(\alpha, \beta) = (1/2, 1/2), (1/2, -1/2), (0, 1), (1, 0)$:

$$S_k^\perp F(1^-) = \langle DF, \frac{1}{2}(p_{k+1} + p_k) \rangle_{(0,1)} \quad (1.1)$$

$$(-1)^k S_k^\perp F(0^+) = \langle DF, \frac{1}{2}(p_{k+1} - p_k) \rangle_{(0,1)} \quad (1.2)$$

$$S_k^\perp F(1^-) - (-1)^k S_k^\perp F(0^+) = \langle DF, p_k \rangle_{(0,1)} \quad (1.3)$$

$$S_{k-1}^\perp F(1^-) - (-1)^k S_{k-1}^\perp F(0^+) = \langle DF, p_k \rangle_{(0,1)} \quad (1.4)$$

Considérons l'équation différentielle suivante, sur $\Omega = (0, 1)$.

Trouver $y \in H^1(\Omega)$ tel que $y(0) = y_0$ et

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{pour } x \in \Omega, \quad (1.5)$$

où $y_0 \in \mathbb{R}$ et $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $L^2(\Omega \times \mathbb{R})$.

Afin de justifier les équations variationnelles de la méthode des α , on peut reformuler ce problème sous forme d'équation intégrale, en utilisant $f(y(x))$ au lieu de $f(x, y(x))$, pour simplifier les notations.

Trouver $Y \in H^1(\Omega)$ et $y \in L^2(\Omega)$ tels que

$$Y(x) = y_0 + \int_0^x f(y(t)) dt, \quad (1.6)$$

et

$$y(x) = Y(x). \quad (1.7)$$

Donnée une partition de Ω en N intervalles, le problème suivant est une forme variationnelle faible du problème de Cauchy (1.5).

Trouver des nombres réels $\{Y_i\}_{i \in I}$ et $\{y_i \in L^2(\Omega_i)\}_{i \in I}$ tels que $Y_0 = y_0$ et, pour tout $i \in I$, pour tout $v \in H^1(\Omega_i)$,

$$Y_i v(x_i^-) - Y_{i-1} v(x_{i-1}^+) = \langle y_i, Dv \rangle_{\Omega_i} + \langle f(y_i), v \rangle_{\Omega_i}. \quad (1.8)$$

En intégrant par parties le terme contenant $f(y_i)$ et en utilisant la fonction indicatrice $v = \chi_{\Omega_i}$, comme fonction test, on voit que (1.8) est équivalent au problème de projection suivant, de sorte qu'on peut identifier les solutions et utiliser la relation $Y_i = Y(x_i)$.

Trouver $Y \in H^1(\Omega)$ et $\{y_i \in L^2(\Omega_i)\}_{i \in I}$ tels que $Y(0) = y_0$,

$$Y(x) = Y(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^x f(y_i(t)) dt \quad \text{sur } \Omega_i, \quad (1.9)$$

et

$$y_i - Y \perp L^2(\Omega_i), \quad \text{pour tout } i \in I. \quad (1.10)$$

On obtient des méthodes d'intégration numérique de l'équation différentielle (1.5) en remplaçant dans (1.8) et (1.9)–(1.10) les espaces $L^2(\Omega_i)$ et $H^1(\Omega_i)$ par des sous-espaces

de fonctions pouvant être discontinues aux noeuds de la partition, par exemple des constantes par morceaux pour les approximants et des fonctions linéaires par morceaux pour les fonctions tests. Une particularité notable ici est l'utilisation simultanée de deux types d'approximation :

- (1) $u_i(x)$ appartenant à $P_k(\Omega_i)$ sur chaque intervalle de la partition, correspondant à $y_i(x) \in L^2(\Omega_i)$ en (1.10).
- (2) U_i les valeurs aux noeuds correspondant à $Y(x_i)$ en (1.9), obtenues non par évaluation de $u_i(x)$ aux noeuds comme dans les méthodes classiques, mais par intégration.

Au problème variationnel (1.8) correspond ainsi le problème approché suivant, donnée une approximation \bar{u}_0 de y_0 .

Trouver les nombres réels $\{\bar{U}_i\}_{i \in I}$ et les polynômes $\{\bar{u}_i \in P_k(\Omega_i)\}_{i \in I}$ tels que $\bar{U}_0 = \bar{u}_0$ et pour tout $i \in I$, pour tout $v \in P_{k+1}(\Omega_i)$,

$$\bar{U}_i v(x_i^-) - \bar{U}_{i-1} v(x_{i-1}^+) = \langle \bar{u}_i, Dv \rangle_{\Omega_i} + \langle f(\bar{u}_i), v \rangle_{\Omega_i}. \quad (1.11)$$

Au problème de projection (1.9)–(1.10) correspond :

Trouver $\bar{U}(x) \in H^1(\Omega)$ et $\{\bar{u}_i \in P_k(\Omega_i)\}_{i \in I}$ tels que $\bar{U}(0) = \bar{u}_0$,

$$\bar{U}(x) = \bar{U}(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^x f(\bar{u}_i(t)) dt \quad \text{sur } \Omega_i, \quad (1.12)$$

et

$$\bar{u}_i - \bar{U} \perp P_k(\Omega_i) \quad \text{dans } L^2(\Omega_i), \quad \text{pour tout } i \in I. \quad (1.13)$$

La solution de (1.11) satisfait (1.12)–(1.13) car $P_{k+1}(\Omega_i)$ contient les constantes, ce qui fournit $\bar{U}(x_i) = \bar{U}_i$ et $D\bar{U} - f(\bar{u}_i) \perp P_{k+1}(\Omega_i)$, ce qui donne (1.13) en intégrant par parties $\langle D\bar{U}, v \rangle_{\Omega}$. De même, la solution de (1.12)–(1.13) satisfait (1.11) et on identifiera les deux solutions en utilisant la relation $\bar{U}_i = \bar{U}(x_i)$. Soient $(\{\bar{e}_i\}_{i \in I}, \bar{E})$ la différence entre la solution du problème (1.9)–(1.10) et celle de (1.12)–(1.13). On a, par soustraction de (1.9) et (1.12), en identifiant $\bar{E}_i = \bar{E}(x_i)$,

$$\bar{E}_i(x) = \bar{E}_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^x f(y(t)) - f(\bar{u}_i(t)) dt \quad \text{sur } \Omega_i, \quad (1.14)$$

et

$$\bar{e}_i - \bar{E} \perp P_k(\Omega_i), \quad (1.15)$$

d'où l'on tire la représentation de l'erreur du polynôme sur Ω_i :

$$\bar{e}_i = S_{k,i} \bar{E} + S_{k,i}^\perp \bar{e}_i = \bar{E}_{i-1} + S_{k,i}(\bar{E} - \bar{E}_{i-1}) + S_{k,i}^\perp y_i. \quad (1.16)$$

On obtient la méthode des α en remplaçant une des conditions d'orthogonalité (1.13) par une condition d'interpolation aux extrémités des intervalles de la partition, imposée pour permettre d'ajuster les sauts du polynôme par morceaux.

Trouver $U(x) \in H^1(\Omega)$ et $\{u_i \in P_k(\Omega_i)\}_{i \in I}$ tels que, donné $U(0) = u_0$,

$$U(x) = U(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^x f(u_i(t)) dt \quad \text{sur } \Omega_i, \quad (1.17)$$

$$u_i - U \perp P_{k-1}(\Omega_i) \text{ dans } L^2(\Omega_i) \quad (1.18)$$

pour tout $i \in I$, et pour certains paramètres $\alpha_i \in \mathbb{R}$, soit

$$U_{i-1} = \alpha_{i-1}u(x_{i-1}^-) + (1 - \alpha_{i-1})u(x_{i-1}^+). \quad (1.19)$$

ou

$$U_i = \alpha_i u(x_i^-) + (1 - \alpha_i)u(x_i^+). \quad (1.20)$$

Deux choix de paramètres ont été étudiés, par Delfour, Hager, et Trochu [4] pour les équations linéaires et par Dubeau [9] pour les équations non linéaires :

A. $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{i-1} \neq 1$ pour $1 < i \leq N$, ce qui permet de calculer *explicitement* la valeur initiale sur un intervalle à partir de la solution sur les intervalles précédents par

$$u_i(x_{i-1}^+) = U_{i-1} + \beta_{i-1}(u_{i-1}(x_{i-1}^-) - U_{i-1}) \quad (1.21)$$

où

$$\beta_{i-1} = \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_{i-1} - 1}. \quad (1.22)$$

B. $\alpha_N = 1$ et $\alpha_i \neq 0$ pour $1 \leq i < N$, ce qui lie les valeurs de la solution approchée sur un intervalle à ses valeurs sur les intervalles suivants, conduisant à un problème *implicite* sur toute la partition

$$u_i(x_i^-) = U_i + \beta_i(u_{i+1}(x_i^+) - U_i) \quad (1.23)$$

où

$$\beta_i = \frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i}. \quad (1.24)$$

Soient $(\{e_i\}_{i \in I}, E)$ la différence entre la solution du problème (1.9)–(1.10) et celle de (1.17)–(1.18). On a, par soustraction de (1.9) et (1.17), en identifiant $E_i = E(x_i)$,

$$E(x) = E_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^x (f(y(t)) - f(u_i(t))) dt \quad \text{sur } \Omega_i, \quad (1.25)$$

et

$$e_i - E \perp P_{k-1}(\Omega_i). \quad (1.26)$$

On en tire la représentation de l'erreur du polynôme sur Ω_i dans le cas implicite, en notant que la projection de $e_i - E$ sur $P_k(\Omega_i)$ est un multiple de $p_{k,i}$ qui est déterminé par la valeur en un point :

$$\begin{aligned} e_i &= S_{k,i}^\perp e_i + S_{k,i} E + S_{k,i}(e_i - E) \\ &= S_{k,i}^\perp e_i + S_{k,i} E + S_{k,i}(e_i - E)(x_i^-) p_{k,i} \\ &= S_{k,i}^\perp e_i + S_{k,i} E + \{e_i - E - S_{k,i}^\perp(e_i - E)\}(x_i^-) p_{k,i} \\ &= S_{k,i}^\perp e_i + S_{k,i} E \end{aligned}$$

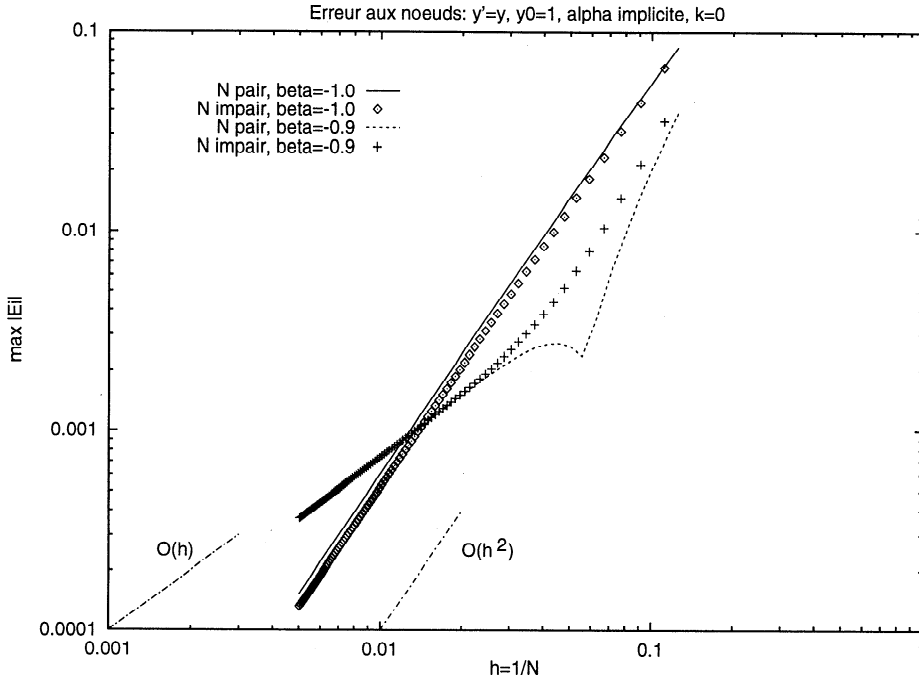


FIGURE 1.

$$+ \{e_i(x_i^-) - E_i - \langle D(e_i - E), \frac{1}{2}(p_{k+1,i} + p_{k,i}) \rangle_{\Omega_i}\} p_{k,i} \quad (1.27)$$

$$= S_{k,i}^\perp y_i + E_{i-1} + S_{k,i}(E - E_{i-1}) + \{\beta_i(e_{i+1}(x_i^+) - E_i) + \langle f(y_i) - f(u_i) - Dy_i, \frac{1}{2}(p_{k+1,i} + p_{k,i}) \rangle_{\Omega_i}\} p_{k,i}. \quad (1.28)$$

Dans le cas explicite, avec les mêmes notations, on obtient par (1.2) la représentation :

$$e_i = S_{k,i}^\perp e_i + S_{k,i} E + \{(-1)^k (e_i(x_{i-1}^+) - E_{i-1}) - \langle D(e_i - E), \frac{1}{2}(p_{k+1,i} - p_{k,i}) \rangle_{\Omega_i}\} p_{k,i} \quad (1.29)$$

$$= S_{k,i}^\perp y_i + E_{i-1} + S_{k,i}(E - E_{i-1}) + \{(-1)^k \beta_{i-1} (e_{i-1}(x_{i-1}^-) - E_{i-1}) + \langle f(y_i) - f(u_i) - Dy_i, \frac{1}{2}(p_{k+1,i} - p_{k,i}) \rangle_{\Omega_i}\} p_{k,i}. \quad (1.30)$$

Les auteurs cités précédemment ont démontré, pour la méthode des α :

- l'existence de la solution dans le cas explicite, quand h est assez petit;
- l'ordre de convergence $k + 1$ en norme L^2 des u_i , quand $|\beta_i| < 1$;
- l'ordre de convergence k en norme L^2 des u_i , quand $|\beta_i| = 1$;
- l'ordre de convergence $2k + 1$ des valeurs aux noeuds U_i , quand $|\beta_i| < 1$;
- l'ordre de convergence $2k$ des valeurs aux noeuds U_i , quand $|\beta_i| \leq 1$.

Les essais numériques de Chalifour [2], confirmés par la figure 1, montrent cependant que pour le choix $\beta_i = (-1)^{k+1}$ et des partitions uniformes, l'ordre de convergence est $k + 1$ pour la norme L^2 des polynômes u_i et $2k + 2$ pour les valeurs aux noeuds U_i mais ceci n'a été prouvé que dans le cas des constantes par morceaux en appendice de [4] en comparant la méthode des α à la méthode d'Euler améliorée.

Dans cet article, nous allons prouver :

- (f) l'existence de la solution approchée dans le cas implicite, quand h est assez petit pour $|\beta_i| < 1$, ou quand la constante de Lipschitz de la fonction f est assez petite pour $|\beta_i| = 1$;
- (g) l'ordre de convergence $k + 1$ en norme L^2 pour les approximants u_i , quand $\beta_i = (-1)^{k+1}$;
- (h) l'ordre de convergence $2k + 2$ pour les valeurs U_i , quand $\beta_i = (-1)^{k+1}$.

Pour simplifier les preuves, introduire la notation, expliquer les techniques de majoration et mettre clairement en évidence les liens entre les différentes méthodes, nous prouvons de nouveau certains résultats de convergence connus, par exemple ceux concernant la méthode de projection (1.12)–(1.13). Les modifications superficielles nécessaires pour traiter un système différentiel au lieu d'une équation différentielle sont présentées dans [3] ou [9].

2. Existence de la solution de la méthode des α . Dubeau [9] a prouvé l'existence de la solution approchée dans la méthode des α explicite (1.21) appliquée à des problèmes non linéaires, lorsque la norme de la partition est assez petite; l'existence dans le cas implicite (1.23) est demeurée un problème ouvert que nous allons résoudre dans cette section.

Nous supposons que f satisfait une condition de Lipschitz en norme d'ordre 1 sur chaque intervalle, pour une constante λ et pour tout $v, w \in L^2(\Omega_i)$:

$$\|f(v) - f(w)\|_{1,\Omega_i} \leq \lambda \|v - w\|_{1,\Omega_i}. \quad (2.1)$$

L'existence de la solution du problème approché dans la méthode de projection (1.12)–(1.13) est assurée pour h assez petit car l'opérateur suivant est une contraction de $P_k(\Omega_i)$ si \bar{U}_{i-1} est donné :

$$J: u \in P_k(\Omega_i) \mapsto \bar{U}_{i-1} + S_{k,i} F_i u \in P_k(\Omega_i) \quad (2.2)$$

où

$$F_i u(x) = \int_{x_{i-1}}^x f(u(t)) dt. \quad (2.3)$$

En effet, pour tout $v, w \in P_k(\Omega_i)$,

$$\begin{aligned} \|Jv - Jw\|_{\Omega_i} &\leq \|S_{k,i} F_i v - S_{k,i} F_i w\|_{\Omega_i} \\ &\leq \|F_i v - F_i w\|_{\Omega_i} \\ &\leq \lambda h_i \|v - w\|_{\Omega_i}. \end{aligned}$$

Quand $\lambda h < 1$, on peut donc déterminer \bar{u}_1 sur Ω_1 à partir de $\bar{U}_0 = \bar{u}_0$, puis $\bar{U}_1 = \bar{U}(x_1)$ à l'aide de (1.12) et procéder de la même façon sur les intervalles suivants, obtenant ainsi une méthode implicite à un pas où les $\bar{u}_i \in P_k(\Omega_i)$ sont des fonctions auxiliaires utilisées pour calculer les valeurs aux noeuds \bar{U}_i . Ce résultat d'existence a été démontré de façon plus générale par Delfour et Dubeau [3].

Considérons ensuite le cas explicite (1.17)–(1.18)–(1.21) de la méthode des α , en supposant que f satisfait la condition de Lipschitz (2.1) et que h est assez petit. Selon

(1.18), la projection de $u_i - U$ sur $P_k(\Omega_i)$ est un multiple de $p_{k,i}$ qu'on peut déterminer à l'aide de la condition d'interpolation, ce qui suggère l'opérateur suivant qui, comme (2.2), est une contraction de $P_k(\Omega_i)$, quand on suppose déjà calculées $U_{i-1} = U(x_{i-1})$ et $u_{i-1}(x_{i-1}^-)$:

$$J_i: u_i \in P_k(\Omega_i) \mapsto U_{i-1} + S_{k,i}F_i u_i + r_i(-1)^k p_{k,i} \in P_k(\Omega_i) \quad (2.4)$$

où le facteur r_i est choisi pour satisfaire (1.21) :

$$r_i = \beta_{i-1}(u_{i-1}(x_{i-1}^-) - U_{i-1}) + S_{k,i}^+ F_i u_i(x_{i-1}^+). \quad (2.5)$$

En effet, pour tout $v, w \in P_k(\Omega_i)$, en utilisant (1.2),

$$\begin{aligned} \|J_i v - J_i w\|_{\Omega_i} &\leq \|S_{k,i}F_i v - S_{k,i}F_i w\|_{\Omega_i} + \sigma h_i^{1/2} |S_{k,i}^+(F_i v - F_i w)(x_{i-1}^+)| \\ &\leq \|F_i v - F_i w\|_{\Omega_i} + \sigma h_i^{1/2} |\langle f(v) - f(w), \frac{1}{2}(p_{k+1,i} - p_{k,i}) \rangle_{\Omega_i}| \\ &\leq \lambda h_i^{1/2} \|f(v) - f(w)\|_{1,\Omega_i} + \sigma h_i^{1/2} \|f(v) - f(w)\|_{1,\Omega_i} \\ &\leq \lambda h_i(1 + \sigma) \|v - w\|_{\Omega_i}. \end{aligned}$$

On déduit ainsi l'existence et l'unicité de la solution pour toute partition satisfaisant $\lambda h(1 + \sigma) < 1$, quels que soient les paramètres β_i , améliorant les conditions trouvées par Dubeau [9]. Lorsque $k \rightarrow \infty$, l'importance de la condition d'interpolation diminue relativement aux conditions d'orthogonalité (1.18) et, à la limite, on retrouve la condition $\lambda h < 1$ assurant l'existence et l'unicité de la solution de la méthode de projection (1.12)–(1.13).

Dans la méthode des α implicite, (1.17)–(1.18)–(1.23), la solution $u_i \in P_k(\Omega_i)$ est définie à la fois par la valeur U_{i-1} , reliée à u_0 par les intervalles précédents, et par $u_{i+1}(x_i^+)$, reliée à la condition limite $u_N(x_N^-) = U_N$ par les intervalles suivants. Il n'est donc pas possible de prouver l'existence intervalle par intervalle comme dans les deux méthodes étudiées plus haut. On note cependant que $u_i(x_i^-)$ est fonction implicite de U_i puisque, donné U_i , on peut, sous des conditions explicitées plus loin, calculer la solution approchée sur $[x_i, 1]$, donc en particulier $u_{i+1}(x_i^+)$ qui apparaît dans (1.23). On peut donc dire que u_i est déterminée implicitement par les valeurs aux noeuds U_{i-1} et U_i . Considérons plus généralement une fonction réelle G_i satisfaisant une condition de Lipschitz de constante γ_i , pour $i \in I$, remplaçons (1.23) par

$$u_i(x_i^-) = G_i(U_i), \quad (2.6)$$

et prouvons l'existence de la solution approchée de cette généralisation de la méthode des α implicite.

Lemme 1. *Le problème (1.17)–(1.18)–(2.6) admet une solution unique, si U_{i-1} est donné et f, G_i ont des constantes de Lipschitz telles que*

$$\lambda h_i(1 + \sigma \gamma_i) < 1.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que l'opérateur suivant a un point fixe dans $P_k(\Omega_i)$, en utilisant la primitive de $f(u)$, $U(x) = U_{i-1} + F_i u(x)$:

$$J_i : P_k(\Omega_i) \rightarrow P_k(\Omega_i) : \\ u \mapsto S_{k,i}U + (G_i(U_i) - (S_{k,i}U)(x_i^-))p_{k,i}.$$

Pour $v, w \in P_k(\Omega_i)$ et les primitives correspondantes V, W de $f(v)$ et $f(w)$,

$$\begin{aligned} \|J_i v - J_i w\|_{\Omega_i} &\leq \|S_{k,i}(V - W)\|_{\Omega_i} + \sigma h_i^{1/2} |G_i(V_i) - G_i(W_i) - V_i + W_i| \\ &\quad + \sigma h_i^{1/2} |V_i - W_i - S_{k,i}(V - W)(x_i^-)| \\ &\leq \|F_i v - F_i w\|_{\Omega_i} \\ &\quad + \sigma h_i^{1/2} \{ \delta_i |V_i - W_i| + |\langle f(v) - f(w), \frac{1}{2}(p_{k+1,i} + p_{k,i}) \rangle_{\Omega_i}| \} \\ &\leq h_i^{1/2} \|f(v) - f(w)\|_{1,\Omega_i} \\ &\quad + \sigma h_i^{1/2} \{ \delta_i \|f(v) - f(w)\|_{1,\Omega_i} + \|f(v) - f(w)\|_{1,\Omega_i} \} \\ &= h_i(1 + \sigma(1 + \delta_i)) \|f(v) - f(w)\|_{1,\Omega_i} \\ &\leq \lambda h_i(1 + \sigma \gamma_i) \|v - w\|_{\Omega_i}, \end{aligned}$$

où δ_i est la constante de Lipschitz de $G_i(x) - x$ de sorte que $\gamma_i \leq 1 + \delta_i$.

Quand $\lambda h_1(1 + \sigma \gamma_1) < 1$, on peut donc déterminer U_1 et u_1 sur Ω_1 à partir de $U_0 = u_0$ et procéder de la même façon sur les intervalles suivants, obtenant ainsi une méthode implicite à un pas. Ceci démontre l'existence de la solution de la méthode des α implicite lorsque tous les β_i sont nuls, un cas considéré par Lesaint et Raviart [11], parce que les γ_i sont alors égaux à 1. \square

Un résultat similaire est prouvé de la même façon en remplaçant dans la méthode des α explicite la relation (1.21) par une condition d'interpolation plus générale :

$$u_{i-1}(x_{i-1}^+) = G_{i-1}(U_{i-1}).$$

Pour obtenir une preuve de l'existence de la solution approchée dans la méthode des α implicite, il est nécessaire, et suffisant, d'étudier les constantes de Lipschitz des expressions définissant les conditions d'interpolation sur chaque intervalle.

Théorème 1. Soient $\beta_N = 0$, $\beta = \max_{i \in I} |\beta_i|$, et

$$G_i(U_i) = U_i + \beta_i(u_{i+1}(x_i^+) - U_i), \quad (2.7)$$

de constante de Lipschitz γ_i dans la méthode des α implicite, et supposons (2.1). Alors $\gamma = \max\{\gamma_i | i \in I\}$ satisfait

- i) pour $\beta < 1$, $\gamma \leq 1 + \lambda$ si $\lambda h < (1 - \beta)/(1 + \sigma(1 + \lambda))$,
- ii) pour $\beta = 1$, $\gamma \leq 1/(1 - \lambda(1 + \sigma))$ si $\lambda < 1/(1 + \sigma)$.

Démonstration. On montre que les fonctions $H_i(U_i) = G_i(U_i) - U_i = \beta_i(u_{i+1}(x_i^+) - U_i)$ satisfont une condition de Lipschitz de constante δ_i si $u_{i+1}(x_i^+)$ est considéré comme fonction de U_i quand calculé par la méthode des α appliquée sur $[x_i, 1]$, avec U_i comme condition initiale, pour $i \in I$.

On peut commencer par l'extrémité droite de Ω , où la condition d'interpolation $u_N(x_N^-) = U_N$ correspondant à $\beta_N = 0$, $\alpha_N = 1$, est limitée à l'intervalle Ω_N et implique $H_N \equiv 0$, $\delta_N = 0$. Supposons par induction que l'on a montré l'existence de la solution approchée sur $[x_i, 1]$ pour U_i choisi arbitrairement et qu'on a prouvé, pour $j \geq i$, que les fonctions H_j satisfont une condition de Lipschitz de constante δ_j . Considérons l'intervalle Ω_i en supposant que $\lambda h_i(1 + \sigma(1 + \delta_i)) < 1$, ce qui est assuré par les hypothèses i) et ii). Par le lemme 1, il existe une solution $v_i \in P_k(\Omega_i)$ correspondant à U_{i-1} choisi arbitrairement comme condition initiale. De même, donnés V_{i-1} et W_{i-1} , il existe deux solutions v_i et w_i du problème de la méthode des α posé sur l'intervalle $[x_{i-1}, 1]$ avec ces deux conditions initiales.

Soient $e_i = v_i - w_i$, $E_{i-1} = V_{i-1} - W_{i-1}$ et $E_i = E(x_i)$ où

$$E(x) = V(x) - W(x) = E_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^x f(v_i) - f(w_i) dt.$$

D'après (1.18), $e_i - E \perp P_{k-1}(\Omega_i)$, de sorte que $e_i - E = S_{k-1,i}^\perp(e_i - E)$, ce qui fournit selon (1.4) une relation entre les sauts au début et à la fin de l'intervalle Ω_i :

$$(e_i(x_i^-) - E_i) - (-1)^k(e_i(x_{i-1}^+) - E_{i-1}) = \langle De_i + f(w_i) - f(v_i), p_{k,i} \rangle_{\Omega_i}.$$

Par définition de δ_i comme constante de Lipschitz de H_i , en posant $\gamma_i = 1 + \delta_i$,

$$\begin{aligned} |e_i(x_{i-1}^+) - E_{i-1}| &\leq |e_i(x_i^-) - E_i| + \lambda h_i^{1/2} \|e_i\|_{\Omega_i} \\ &\leq \delta_i |E_i| + \lambda h_i^{1/2} \|e_i\|_{\Omega_i} \\ &\leq \delta_i |E_{i-1}| + \lambda h_i^{1/2} \gamma_i \|e_i\|_{\Omega_i}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

De plus, la représentation de l'erreur (1.27) reste valide et puisque $De_i \perp P_k(\Omega_i)$,

$$e_i = S_{k,i} E + \{e_i(x_i^-) - E_i + \langle f(v_i) - f(w_i), \frac{1}{2}(p_{k+1,i} + p_{k,i}) \rangle_{\Omega_i}\} p_{k,i},$$

ce qui donne, en posant $\theta_i = 1/(1 - \lambda h_i(1 + \sigma \gamma_i)) = 1 + \lambda h_i(1 + \sigma \gamma_i)\theta_i$,

$$\begin{aligned} \|e_i\|_{\Omega_i} &\leq |E_{i-1}| h_i^{1/2} + \lambda h_i \|e_i\|_{\Omega_i} \\ &\quad + \sigma h_i^{1/2} (|e_i(x_i^-) - E_i| + \lambda h_i^{1/2} \|e_i\|_{\Omega_i}) \\ \|e_i\|_{\Omega_i} &\leq |E_{i-1}| \theta_i h_i^{1/2} (1 + \sigma \delta_i). \end{aligned}$$

En éliminant $\|e_i\|_{\Omega_i}$ de l'inégalité (2.8),

$$\begin{aligned} |e_i(x_{i-1}^+) - E_{i-1}| &\leq |E_{i-1}| (\delta_i + \lambda h_i \theta_i \gamma_i (1 + \sigma \delta_i)) \\ &= |E_{i-1}| (\gamma_i \theta_i (1 - \sigma \lambda h_i) - 1) \\ &= |E_{i-1}| \theta_i (\delta_i + \lambda h_i) \end{aligned}$$

On vient donc de prouver que H_{i-1} satisfait une condition de Lipschitz de constante

$$\delta_{i-1} = |\beta_{i-1}| \theta_i (\delta_i + \lambda h_i).$$

Lorsque $\beta < 1$, la condition imposée à h implique que $|\beta_{i-1}\theta_i| < 1$ et on en déduit par induction que

$$\gamma_i \leq 1 + \lambda(1 - x_i).$$

Enfin, les constantes de Lipschitz des fonctions G_i satisfont la relation de récurrence

$$\begin{aligned} \gamma_N &= 1 \\ \gamma_{i-1} &\leq 1 + |\beta_{i-1}|(\gamma_i\theta_i - 1) \quad \text{pour } i = 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Quand $\beta = 1$, la suite des γ_i est bornée si la constante de Lipschitz de la fonction f satisfait $\lambda(1 + \sigma) < 1$:

$$\begin{aligned} \gamma_{i-1} &\leq \frac{\gamma_i}{1 - \lambda h_i(1 + \sigma \gamma_i)} \leq \frac{\gamma_{i+1}}{1 - \lambda(h_i + h_{i+1} - h_i h_{i+1})(1 + \sigma \gamma_{i+1})} \\ &\leq \frac{\gamma_{i+1}}{1 - \lambda(h_i + h_{i+1})(1 + \sigma \gamma_{i+1})} \leq \frac{\gamma_N}{1 - \lambda(1 - x_{i-1})(1 + \sigma \gamma_N)} \\ &\leq \frac{1}{1 - \lambda(1 + \sigma)}. \end{aligned}$$

Lorsque l'induction se termine après N étapes, on a montré que la solution approchée existe sur $[0, 1]$ quel que soit U_0 , et c'est ce qu'il fallait prouver. \square

En un certain sens, ces résultats ne peuvent pas être améliorés. Si l'on approxime avec des polynômes constants par morceaux ($k = 0$) la solution de l'équation linéaire $Dy = \lambda y$, $y(0) = 1$, on obtient le système linéaire suivant pour déterminer les valeurs aux noeuds U_i , en choisissant $\beta_i = \beta$ et $h_i = h$, pour $i \in I$:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 + \beta & -\beta & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 + \beta & -\beta \\ & & & \beta - 1 & 1 - \beta \end{pmatrix} - \lambda h(1 - \beta)I \right] \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lorsque $\beta = 1$, correspondant à des polynômes continus et constants sur tout Ω , la matrice est singulière quel que soit h . De plus, un graphique du module de la plus petite valeur propre de la matrice tridiagonale en fonction de β confirme qu'il est nécessaire d'exiger $|\lambda|h < 1$. Par contre, on constate que toutes les valeurs propres sont dans le demi-plan $\text{Re } z > 0$, de sorte qu'on peut émettre la conjecture de l'existence de la solution approchée de la méthode des α implicite d'ordre k appliquée à des problèmes différentiels de valeurs propres dans le demi-plan $(-1)^{k+1} \text{Re } z > 0$.

Une preuve plus directe de certains résultats de cette section peut être obtenue en caractérisant la solution de la méthode des α implicite en termes de produits scalaires seulement, qui sont plus faciles à manipuler que les valeurs ponctuelles $u_i(x_i^+)$. On obtient facilement, pour $i \in I$, en utilisant (1.1)–(1.4)–(1.23),

$$u_i = U_{i-1} + S_{k,i} F_i u_i + p_{k,i} \left(\sum_{L=i}^N \langle f(u_L) - D u_L, q_L^{(i)} \rangle_{\Omega_L} \right)$$

où $q_L^{(i)} = (p_{k+1,i} + p_{k,i})/2$ sur Ω_i et sur Ω_L , pour $L > i$,

$$q_L^{(i)} = \left(\prod_{j=i}^{L-1} (-1)^k \beta_j \right) p_{k,L}.$$

L'opérateur $J = \{J_i | i \in I\}$ suivant, défini intervalle par intervalle en commençant par Ω_1 , est une contraction de $\{P_k(\Omega_i) | i \in I\}$ pour $m \geq 1$, en notant $u = \{u_i\}_{i \in I}$:

$$J_i u = u_0 + \sum_{L=1}^{i-1} \langle f(J_L^m u), 1 \rangle_{\Omega_L} + S_{k,i} F_i u_i + p_{k,i} \left(\sum_{L=i}^N \langle f(u_L), q_L^{(i)} \rangle_{\Omega_L} \right). \quad (2.9)$$

3. Convergence des polynômes par morceaux de la méthode des α . On montre que la convergence des polynômes par morceaux est d'ordre optimal en norme L^2 lorsque $\beta_i = (-1)^{k+1}$, complétant un résultat de Dubeau [9], après avoir prouvé la même majoration pour d'autres méthodes.

Soit $(\{\bar{u}_i\}_{i \in I}, \bar{U})$ la solution du problème de projection (1.12)–(1.13) et montrons brièvement que l'ordre de convergence des \bar{u}_i est le meilleur possible dans $P_k(\Omega_i)$, un résultat déjà connu et généralisé dans [3].

Avec les notations (1.14)–(1.15), en notant par $\theta_i = 1/(1 - \lambda h_i)$ le facteur de croissance, on obtient avec la condition de Lipschitz (2.1) et la représentation (1.16) :

$$\begin{aligned} \|\bar{e}_i\|_{\Omega_i} &\leq \|S_{k,i} \bar{E}\|_{\Omega_i} + \|S_{k,i}(\bar{e}_i - \bar{E})\|_{\Omega_i} + \|S_{k,i}^\perp \bar{e}_i\|_{\Omega_i} \\ &\leq h_i^{1/2} |\bar{E}_{i-1}| + \lambda h_i \|\bar{e}_i\|_{\Omega_i} + \|S_{k,i}^\perp y\|_{\Omega_i} \\ &\leq \theta_i (h_i^{1/2} |\bar{E}_{i-1}| + \|S_{k,i}^\perp y\|_{\Omega_i}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

et, d'après (1.14),

$$|\bar{E}_i| \leq |\bar{E}_{i-1}| + \lambda h_i^{1/2} \|\bar{e}_i\|_{\Omega_i} \leq \theta_i (|\bar{E}_{i-1}| + \lambda h_i^{1/2} \|S_{k,i}^\perp y\|_{\Omega_i}). \quad (3.2)$$

La solution de ces deux inégalités récurrentes fournit les bornes d'erreurs suivantes, dont la première est d'ordre optimal pour des polynômes par morceaux de degré k , si $\theta = \max\{\theta_i | i \in I\}$ et $y \in H^{k+1}(\Omega)$:

$$\left(\sum_{i \in I} \|y - \bar{u}_i\|_{\Omega_i}^2 \right)^{1/2} \leq e^{\lambda \theta} \left(|y_0 - \bar{u}_0| + (\lambda + 1) \frac{h^{k+1}}{k+1!} \|D^{k+1} y\|_{\Omega} \right) \quad (3.3)$$

$$\max_{i \in I} |Y_i - \bar{U}_i| \leq e^{\lambda \theta} \left(|y_0 - \bar{u}_0| + \lambda \frac{h^{k+1}}{k+1!} \|D^{k+1} y\|_{\Omega} \right) \quad (3.4)$$

On a utilisé un polynôme de Taylor $t_{k,i}$ de degré k pour majorer :

$$\|S_{k,i}^\perp y\|_{\Omega_i} \leq \|y - t_{k,i}\|_{\Omega_i} \leq \frac{h_i^{k+1}}{k+1!} \|D^{k+1} y\|_{\Omega_i}.$$

Considérons également les sauts aux extrémités des intervalles. En utilisant $F = \bar{e}_i - \bar{E}$ dans (1.1), puisque $D\bar{u}_i \in P_{k-1}(\Omega_i)$ et $DE = f(y) - f(\bar{u}_i)$, on a la borne suivante :

$$\begin{aligned} |\bar{e}_i(x_i^-) - \bar{E}_i| &= |S_{k,i}^\perp(\bar{e}_i - \bar{E})(x_i^-)| \\ &\leq \lambda \theta_i h_i |\bar{E}_{i-1}| |\bar{e}_i(x_i^-) - \bar{E}_i| \\ &\leq \lambda \theta_i h_i |\bar{E}_{i-1}| + \sigma h_i^{1/2} \|S_{k-1,i}^\perp D y\|_{\Omega_i} + \lambda \theta_i h_i^{1/2} \|S_{k,i}^\perp y\|_{\Omega_i}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

et cette borne est aussi valide pour $|\bar{e}_i(x_{i-1}^+) - \bar{E}_{i-1}|$.

En supposant $y \in H^{k+1}(\Omega)$ et en utilisant un polynôme de Taylor $t_{k,i}$ de degré k associé à y sur Ω_i ,

$$\|S_{k-1,i}^\perp Dy\|_{\Omega_i} \leq \|Dy - Dt_{k,i}\|_{\Omega_i} \leq \frac{h_i^k}{k!} \|D^{k+1}y\|_{\Omega_i} \quad (3.6)$$

ce qui fournit selon (3.5), (3.4),

$$|\bar{e}_i(x_i^-) - \bar{E}_i| = |\bar{E}_0|O(h) + O(h^{k+2})\|D^{k+1}y\|_{\Omega} + O(h_i^{k+1/2})\|D^{k+1}y\|_{\Omega_i}, \quad (3.7)$$

avec la même majoration pour $|\bar{e}_i(x_{i-1}^+) - \bar{E}_{i-1}|$. Si $y \in H^{k+2}(\Omega)$,

$$|\bar{e}_i(x_i^-) - \bar{E}_i| = |\bar{E}_0|O(h) + O(h^{k+1})\|D^{k+1}y\|_{\infty,\Omega}. \quad (3.8)$$

Considérons comme à la section précédente des fonctions réelles $G_i(U_i) = U_i + H_i(U_i)$ satisfaisant une condition de Lipschitz de constante $\gamma_i = 1 + \delta_i$ où δ_i est la constante de Lipschitz de H_i . Le résultat suivant montre qu'on peut ramener l'étude de l'ordre de convergence de la méthode des α implicite ainsi généralisée à l'étude de la convergence de l'approximation $(\{\bar{u}_i\}_{i \in I}, \bar{U})$ fournie par la méthode de projection.

Lemme 2. *La solution $(\{u_i\}_{i \in I}, U)$ du problème (1.17), (1.18), (2.6), (2.1) satisfait les inégalités suivantes, si $\bar{U}_0 = U_0 = u_0$, $\gamma = \max\{\gamma_i | i \in I\}$ et, pour une constante $\theta > 1$, $\lambda h_i(1 + \sigma\gamma_i) < 1 - 1/\theta$.*

$$\left(\sum_{i \in I} \|\bar{u}_i - u_i\|_{\Omega_i}^2 \right)^{1/2} \leq \sigma\theta e^{\lambda\theta\gamma} (1 + \lambda\gamma\theta) \left(\sum_{i \in I} h_i |\bar{u}_i(x_i^-) - G_i(\bar{U}_i)|_{\Omega_i}^2 \right)^{1/2}.$$

$$\max_{i \in I} |\bar{U}_i - U_i| \leq e^{\lambda\theta\gamma} \sigma\lambda\theta \left(\sum_{i \in I} h_i |\bar{u}_i(x_i^-) - G_i(\bar{U}_i)|_{\Omega_i}^2 \right)^{1/2}.$$

Démonstration. Soient $e_i = \bar{u}_i - u_i$, $E_{i-1} = \bar{U}_{i-1} - U_{i-1}$, $E_i = E(x_i)$ et $E(x) = \bar{U}(x) - U(x)$.

Les propriétés d'orthogonalité (1.13), (1.18) satisfaites par u_i et \bar{u}_i impliquent que la représentation (1.27) est valide ici et on obtient, avec $\theta_i = 1/(1 - \lambda h_i(1 + \sigma\gamma_i))$,

$$\|e_i\|_{\Omega_i} \leq \gamma_i \theta_i h_i^{1/2} |E_{i-1}| + \sigma \theta_i h_i^{1/2} |\bar{u}_i(x_i^-) - G_i(\bar{U}_i)|$$

et

$$|E_i| \leq |E_{i-1}|(1 + \lambda h_i \theta_i \gamma_i) + \sigma \lambda \theta_i h_i |\bar{u}_i(x_i^-) - G_i(\bar{U}_i)|.$$

La solution de ces deux inégalités récurrentes fournit la conclusion. \square

Lemme 3. *Supposons que la solution (y, Y) du problème (1.6), (1.7), (2.1) appartient à $H^{k+1}(\Omega)$ et satisfait*

$$y(x_i^-) = Y_i = G_i(Y_i).$$

Alors

$$|\bar{u}_i(x_i^-) - G_i(\bar{U}_i)| = |Y_0 - \bar{U}_0|O(1) + O(h^{k+1})\|D^{k+1}y\|_{\Omega} + O(h_i^{k+1/2})\|D^{k+1}y\|_{\Omega_i}.$$

Démonstration. Soient $\bar{e}_i = y - \bar{u}_i$ et $\bar{E}_i = Y_i - \bar{U}_i$. On obtient

$$\begin{aligned} |\bar{u}_i(x_i^-) - G_i(\bar{U}_i)| &= |\bar{e}_i(x_i^-) - \bar{E}_i + H_i(Y_i) - H_i(\bar{U}_i)| \\ &\leq |\bar{e}_i(x_i^-) - \bar{E}_i| + \delta_i |\bar{E}_i| \end{aligned}$$

et les inégalités (3.3) et (3.7) fournissent la conclusion. \square

Le résultat suivant montre que la méthode des α implicite généralisée a le même ordre de convergence que la méthode de projection, si les fonctions G_i sont reliées au problème à résoudre.

Théorème 2. *Si $y \in H^{k+1}(\Omega)$, $y(x_i^-) = Y_i = G_i(Y_i)$ et f, G_i ont des constantes de Lipschitz telles que $\lambda h_i(1 + \sigma \gamma_i) < 1$, alors l'approximation $(\{u_i \mid i \in I\}, U)$ fournie par la méthode implicite généralisée (1.17)–(1.18)–(2.6) satisfait :*

$$\left(\sum_{i \in I} \|y - u_i\|_{\Omega_i}^2 \right)^{1/2} + \max_{i \in I} |Y_i - U_i| = |E_0|O(1) + O(h^{k+1}) \|D^{k+1}y\|_{\Omega}.$$

Démonstration. On obtient la conclusion en utilisant les lemmes 2 et 3, les inégalités (3.3), (3.4) et les identités $y - U_i = y - \bar{u}_i + \bar{u}_i - u_i$, $Y - U_i = Y_i - \bar{U}_i + \bar{U}_i - U_i$. \square

La même preuve fournit les mêmes conclusions pour la méthode explicite généralisée (1.17)–(1.18) satisfaisant :

$$u_{i-1}(x_{i-1}^+) = G_{i-1}(U_{i-1}).$$

Dans ce cas, la valeur U_{i-1} peut être considérée constante dans l'étude de l'erreur sur Ω_i , et les constantes de Lipschitz γ_i sont nulles.

Pour utiliser la méthode de projection dans l'étude d'erreur de la méthode des α , il est nécessaire d'en borner les sauts aux extrémités des intervalles. Le résultat suivant montre qu'une combinaison linéaire des sauts des deux cotés d'un noeud permet de regrouper des termes pour gagner une puissance de h .

Lemme 4. *Si $y \in H^{k+2}(\Omega)$ et la partition est uniforme, alors la solution $\{(\bar{u}_i, \bar{U}_i)\}_{i \in I}$ donnée par la méthode de projection satisfait, pour $\beta_i = (-1)^{k+1}$:*

$$\sum_{i=1}^{N-1} |\bar{u}_{i+1}(x_i^+) - \bar{U}_i - \beta_i(\bar{u}_i(x_i^-) - \bar{U}_i)| = O(1)|E_0| + O(h^{k+1}) \|D^{k+2}y\|_{\Omega}.$$

Démonstration. Soient $\bar{e}_i = y - \bar{u}_i$ et $\bar{E} = Y - \bar{U}$. En utilisant (1.1) sur Ω_i et (1.2) sur Ω_{i+1} , tenant compte de la continuité de $y = Y$,

$$\begin{aligned} &|\bar{u}_{i+1}(x_i^+) - \bar{U}_i - \beta_i(\bar{u}_i(x_i^-) - \bar{U}_i)| \\ &= |\bar{e}_{i+1}(x_i^+) - \bar{E}_i - \beta_i(\bar{e}_i(x_i^-) - \bar{E}_i)| \\ &= |(-1)^k \langle D(\bar{e}_{i+1} - \bar{E}), \frac{1}{2}(p_{k+1,i+1} - p_{k,i+1}) \rangle_{\Omega_{i+1}} \\ &\quad - \beta_i \langle D(\bar{e}_i - \bar{E}), \frac{1}{2}(p_{k+1,i} + p_{k,i}) \rangle_{\Omega_i}| \\ &\leq \lambda h_i^{1/2} |\beta_i| \|e_i\|_{\Omega_i} + \lambda h_{i+1}^{1/2} \|e_{i+1}\|_{\Omega_{i+1}} + \frac{\sigma}{2} h_i^{1/2} |\beta_i| \|S_{k,i+1}^{\perp} D y\|_{\Omega_i} \\ &\quad + \frac{\sigma}{2} h_{i+1}^{1/2} \|S_{k,i+1}^{\perp} D y\|_{\Omega_{i+1}} + \frac{|\delta_i|}{2} \end{aligned}$$

avec, par uniformité de la partition,

$$\begin{aligned}\delta_i &= (-1)^{k+1} \langle Dy, p_{k,i+1} \rangle_{\Omega_{i+1}} - \beta_i \langle Dy, p_{k,i} \rangle_{\Omega_i} \\ &= (-1)^{k+1} \int_{\Omega_i} (Dy(x+h_i) - Dy(x)) p_{k,i}(x) dx \\ &= (-1)^{k+1} \int_0^{h_i} \int_{\Omega_i} D^2 y(x+t) p_{k,i}(x) dx dt.\end{aligned}\quad (3.9)$$

En utilisant le polynôme de Taylor $t_{k+1,i}$ de degré $k+1$ basé en x_i ,

$$\begin{aligned}|\delta_i| &\leq \sigma h_i^{3/2} \|D^2(y - t_{k+1,i})\|_{\Omega_i \cup \Omega_{i+1}} \\ &\leq \sigma h_i^{3/2} \frac{(h_i + h_{i+1})^k}{k!} \|D^{k+2}y\|_{\Omega_i \cup \Omega_{i+1}}.\end{aligned}$$

On obtient la conclusion par sommation, en utilisant (3.3). \square

Remarque 1. En sommant seulement sur les noeuds impairs (ou pairs), on obtient la même majoration mais en exigeant seulement $h_i = h_{i+1}$, pour i impair (ou pair).

Remarque 2. Supposons que la partition soit de pas à croissance bornée, telle que $h_i \leq r h_{i-1}$ pour une constante r et $i \in I$. Alors la conclusion reste valide si les paramètres de la méthode des α sont choisis tels que :

$$\beta_i = \left(-\frac{h_{i+1}}{h_i}\right)^{k+1} + O(h_i + h_{i+1}). \quad (3.10)$$

En effet, soient $\bar{p}_{k,i}$ le polynôme de Legendre de degré k sur $B_i = (x_{i-1}, x_{i+1})$, $\bar{S}_{k,i}$ la projection orthogonale sur $P_k(B_i)$ et $H_i = h_i + h_{i+1}$. Alors, en décomposant Dy sur les deux intervalles B_i ,

$$\begin{aligned}\delta_i &= (-1)^{k+1} \langle \bar{S}_{k,i}^\perp Dy + a_k \bar{p}_{k,i} + \bar{S}_{k-1,i} Dy, p_{k,i+1} \rangle_{\Omega_{i+1}} \\ &\quad - \beta_i \langle \bar{S}_{k,i}^\perp Dy + a_k \bar{p}_{k,i} + \bar{S}_{k-1,i} Dy, p_{k,i} \rangle_{\Omega_i} \\ &= (-1)^{k+1} \langle \bar{S}_{k,i}^\perp Dy, p_{k,i+1} \rangle_{\Omega_{i+1}} - \beta_i \langle \bar{S}_{k,i}^\perp Dy, p_{k,i} \rangle_{\Omega_i} \\ &\quad + a_k ((-1)^{k+1} \langle \bar{p}_{k,i+1}, p_{k,i} \rangle_{\Omega_{i+1}} - \beta_i \langle \bar{p}_{k,i}, p_{k,i} \rangle_{\Omega_i})\end{aligned}$$

où

$$a_k = \langle \bar{S}_{k-1}^\perp Dy, \frac{\bar{p}_{k,i}}{\sigma^2 H_i} \rangle_{B_i}.$$

Il est facile de montrer, en se ramenant à l'élément fini de référence, que

$$\langle p_{k,i}, \bar{p}_{k,i} \rangle_{\Omega_i} = \sigma^2 h_i \left(\frac{h_i}{H_i}\right)^k, \quad \text{et} \quad \langle p_{k,i+1}, \bar{p}_{k,i} \rangle_{\Omega_{i+1}} = \sigma^2 h_{i+1} \left(\frac{h_{i+1}}{H_i}\right)^k.$$

On en déduit

$$|\delta_i| \leq \frac{\sigma H_i^{k+1}}{k!} \left\{ \frac{H_i}{k+1} \max(1, |\beta_i|) + \left| \beta_i - \left(-\frac{h_{i+1}}{h_i}\right)^{k+1} \right| \left(\frac{h_i}{H_i}\right)^{k+1} \right\} \|D^{k+1}y\|_{B_i}.$$

Quand les paramètres β_i satisfont (3.10), la somme des δ_i est d'ordre h^{k+1} . Ceci permet de généraliser le résultat de convergence suivant concernant la méthode des α à une partition quelconque, en choisissant les paramètres β_i , par exemple de façon adaptative en variant le pas d'intégration.

Théorème 3. *Si $y \in H^{k+2}(\Omega)$, f satisfait (2.1), et la partition satisfait $h_{2j-1} = h_{2j}$ ou $h_{2j} = h_{2j+1}$ pour $1 \leq j \leq [N/2]$, alors l'approximation donnée par la méthode des α de paramètres $\beta_i = (-1)^{k+1}$ satisfait, pour h assez petit :*

$$\left(\sum_{i \in I} \|y - u_i\|_{\Omega_i}^2 \right)^{1/2} + \max_{i \in I} (|Y_i - U_i| + |u(x_i^-) - U_i|) \leq O(1)|y_0 - u_0| + O(h^{k+1})\|D^{k+2}y\|_{\Omega}.$$

Démonstration. Il suffit de le montrer pour le cas explicite car, selon un résultat de Dubeau [9] exploitant un théorème de stabilité de Carathéodory, les ordres de convergence sont les mêmes dans les deux cas explicite et implicite quand on choisit les β_i de façon symétrique. Considérons la différence (e_i, E) entre la solution (\bar{u}_i, \bar{U}) de la méthode de projection et celle de la méthode des α explicite, en supposant $F_0 = 0$. On utilise $w_i = e_i - E$, $w_i^+ = w_{i+1}(x_i^+)$, $w_i^- = w_i(x_i^-)$, pour $i \in I$. La représentation de l'erreur (1.29) qui reste valide ici, devient

$$e_i = S_{k,i}E + \{(-1)^k w_{i-1}^+ - \langle Dw_i, \frac{1}{2}(p_{k+1,i} - p_{k,i}) \rangle_{\Omega_i}\} p_{k,i}$$

et donne, en notant $\theta_i = 1/(1 - \lambda h_i(1 + \sigma)) = 1 + \lambda h_i(1 + \sigma)\theta_i$,

$$\|e_i\|_{\Omega_i} \leq \theta_i h_i^{1/2} (|E_{i-1}| + \sigma |w_{i-1}^+|), \quad (3.11)$$

ce qui implique

$$\left(\sum_{i \in I} \|e_i\|_{\Omega_i}^2 \right)^{1/2} \leq \max_{i \in I} \theta_i \{ |E_i| + \sigma |w_i^+| \}. \quad (3.12)$$

Puisque $w_i \perp P_{k-1}(\Omega_i)$ et $e_i \in P_k(\Omega_i)$, par (1.4) où $w_i = S_{k-1}^+ w_i$,

$$\begin{aligned} |E_i - E_{i-1}| + \sigma |w_i^- - (-1)^k w_{i-1}^+ - \langle De_i, p_{k,i} \rangle_{\Omega_i}| \\ = |\langle DE, 1 \rangle_{\Omega_i}| + \sigma |\langle DE, p_k \rangle_{\Omega_i}| \\ \leq (1 + \sigma) \|DE\|_{1, \Omega_i} \\ \leq (1 + \sigma) \lambda h_i^{1/2} \|e_i\|_{\Omega_i} \\ \leq (\theta_i - 1) (|E_{i-1}| + \sigma |w_{i-1}^+|) \end{aligned} \quad (3.13)$$

On a, si $|\beta_{i-1}| \leq 1$, et $\Delta_{i-1} = w_{i-1}^+ - \beta_{i-1} w_{i-1}^- = \bar{u}_i(x_{i-1}^+) - \bar{U}_{i-1} - \beta_{i-1} (\bar{u}_{i-1}(x_{i-1}^-) - \bar{U})$,

$$|E_i| + \sigma |w_i^-| \leq \theta_i (|E_{i-1}| + \sigma |w_{i-1}^-|) + \sigma |\Delta_{i-1}|. \quad (3.14)$$

D'où, par sommation, puisque $E_0 = 0$,

$$|E_i| + \sigma |w_i^-| \leq \sigma \left(\prod_{j=1}^i \theta_j \right) \left(|w_0^+| + \sum_{j=1}^{i-1} |\Delta_j| \right).$$

Enfin

$$w_i^+ - \beta_i w_i^- = \bar{u}_{i+1}(x_i^+) - \bar{U}_i - \beta_i (\bar{u}_i(x_i^-) - \bar{U}_i).$$

En tenant compte de (3.12), on est donc ramené à l'étude de la méthode de projection. On obtient la conclusion, quand la partition est uniforme, en utilisant (3.8) pour borner $w_0^+ = \bar{u}(0^+) - \bar{U}_0$, le lemme 4 pour la somme des Δ_i , et (3.3), (3.4) pour remplacer $(\{\bar{u}_i\}_{i \in I}, \bar{U})$ par $(\{y_i\}_{i \in I}, Y)$ dans l'inégalité du triangle.

Afin d'affaiblir la condition d'uniformité imposée à la partition, on peut utiliser directement la solution $(\{y_i\}_{i \in I}, Y)$ de (1.6), ce qui ajoute des termes à chaque inégalité mais permet de tirer partie de la continuité de Y aux noeuds. Redéfinissons (e_i, E) comme la différence entre (y_i, Y) et (u_i, U) , ainsi que w_i . En remplaçant i par $i + 1$ dans (3.13), puis en utilisant (3.14), et de nouveau (3.13), on obtient, après de fastidieux calculs, une relation de récurrence à deux pas :

$$\begin{aligned} |E_{i+1}| + \sigma |w_{i+1}^+| &\leq \theta_{i+1} \theta_i (|E_{i-1}| + \sigma |w_{i-1}^+|) \\ &\quad + (\theta_{i+1} \theta_i - 1) \sigma \frac{(h_i + h_{i+1})^{k+1/2}}{k!} \|D^{k+1}y\|_{\Omega_i \cup \Omega_{i+1}} + \sigma |\delta_i| \end{aligned}$$

où δ_i est défini par (3.9) dans le lemme 4, et est d'ordre h^{k+1} après sommation si $h_i = h_{i+1}$. Ceci permet de relier tous les noeuds pairs à x_0 ou tous les noeuds impairs à x_1 . Le résultat local correspondant à (3.14)

$$|E_{i+1}| + \sigma |w_{i+1}^+| \leq (|E_{i-1}| + \sigma |w_{i-1}^+|)(1 + O(h_i)) + O(h^{k+1}) \|D^{k+2}y\|_{\Omega},$$

permet de borner l'erreur et les sauts aux autres noeuds, et on majore facilement l'erreur en norme L^2 comme en (3.12). \square

Remarque 3. La conclusion reste valide pour une partition de pas à croissance faible, satisfaisant $h_i \leq (1 + O(h))h_{i-1}$ pour $i \in I$, si les paramètres de la méthode des α sont tels que :

$$\beta_i = \left(-\frac{h_{i+1}}{h_i} \right)^{k+1} + O(h_i + h_{i+1}).$$

C'est ce qui explique que l'ordre de convergence semble 2 pour $h \approx 0.1$ dans la figure 1, quand $\beta_i = -0.9 = (-1)^{k+1} + 0.1$.

4. Superconvergence aux noeuds de la méthode des α . On dira que la fonction f est linéarisable, si pour la différence e_i entre la solution y de (1.5) et toute approximation par morceaux $\{u_i\}_{i \in I}$ assez près de y dans $L^2(\Omega)$:

$$f(y) - f(u_i) = a e_i + b(\cdot, y, u_i) e_i^2, \quad (4.1)$$

où $a \in H^{k+1}(\Omega)$ et $b \in L^\infty(\Omega)$. Les résultats de convergence précédents montrent que lorsque h est assez petit, les solutions obtenues par la méthode de projection et

par la méthode des α , sont assez près de y , sauf pour l'approximation continue par des constantes par morceaux, $\beta_i = 1$ et $k = 0$, utilisée dans le contre-exemple suivant le théorème 1.

Delfour et Dubeau [3] ont pu montrer la superconvergence aux noeuds d'ordre $2k+2$ de la méthode de projection en utilisant comme fonction test la solution approchée d'un problème dual.

Si $v \in P_{k+1}(\Omega_i)$ est une approximation de la solution $z_i \in H^{k+2}(\Omega_i)$ du problème $Dz_i + az_i = 0$, $z_i(x_i) = 1$, définie par $v(x_i) = 1$ et

$$Dv(x) + S_k(az_i) = 0, \quad (4.2)$$

alors

$$\begin{aligned} \|Dv + av\|_{\Omega_i} &= \|D(v - z_i) + a(v - z_i)\|_{\Omega_i} \\ &= \|S_{k,i}^\perp az_i + a(v - z_i)\|_{\Omega_i} \\ &\leq \|S_{k,i}^\perp az_i\|_{\Omega_i} + \|a\|_{\Omega_i} \|S_{k,i}^\perp az_i\|_{\Omega_i} h_i = O(h_i^{k+3/2}) \end{aligned}$$

et

$$\|v\|_{\infty, \Omega_i} \leq 1 + h_i^{1/2} \|az_i\|_{\Omega_i} = 1 + O(h_i).$$

Soient $(\{\bar{u}_i\}_{i \in I}, \bar{U})$ la solution de la méthode de projection (1.12)–(1.13). Substituant v dans (1.8) et (1.11), on obtient avec $\bar{E} = Y - \bar{U}$ et $\bar{E}_i = \bar{E}(x_i)$,

$$\bar{E}_i = \bar{E}_{i-1} v(x_{i-1}^+) + \langle \bar{e}_i, Dv + av \rangle_{\Omega_i} + \langle b\bar{e}_i^2, v \rangle_{\Omega_i}, \quad (4.3)$$

ce qui implique

$$|\bar{E}_i| \leq (1 + O(h_i)) |\bar{E}_{i-1}| + O(h_i^{k+3/2}) \|\bar{e}_i\|_{\Omega_i} + O(1) \|\bar{e}_i\|_{\Omega_i}^2. \quad (4.4)$$

En sommant, on obtient :

$$|\bar{E}_i| = O(1) \left\{ |\bar{E}_0| + O(h^{k+1}) \left(\sum_{i \in I} \|\bar{e}_i\|_{\Omega_i}^2 \right)^{1/2} + \sum_{i \in I} \|\bar{e}_i\|_{\Omega_i}^2 \right\}. \quad (4.5)$$

En supposant y et a dans $H^{k+1}(\Omega)$ et $|y_0 - \bar{u}_0| < 1$, ceci montre que, pour h assez petit,

$$|Y_i - \bar{U}_i| = O(1) |y_0 - \bar{u}_0| + O(h^{2k+2}). \quad (4.6)$$

Pour prouver la superconvergence aux noeuds de la méthode des α lorsque la fonction f est linéarisable, la preuve précédente doit être modifiée parce que seuls les polynômes de degré k sont admissibles comme fonction test dans (1.11) quand on suppose (1.18). On peut poser, au lieu de (4.2),

$$Dv(x) + S_{k-1}(az_i) = 0, \quad (4.7)$$

ce qui fait perdre une puissance de h_i dans les bornes pour $D(v - z_i)$ et $v - z_i$ mais donne immédiatement, avec les hypothèses du théorème 3 et en supposant que (4.1) est vérifiée, un meilleur résultat que celui prouvé dans [9] pour $\beta_i = (-1)^{k+1}$:

$$|Y_i - U_i| = O(1) |y_0 - u_0| + O(h^{2k+1}) \quad (4.8)$$

Le résultat local suivant est plus précis.

Lemme 5. *Si en plus des hypothèses du théorème 3, on suppose que f est linéarisable selon (4.1), alors la solution $(\{u_i\}_{i \in I}, U)$ fournie par la méthode des α explicite avec paramètres $\beta_i = (-1)^{k+1}$ et $u_0 = y_0$ satisfait, pour h assez petit :*

$$|Y_i - U_i| \leq |Y_{i-1} - U_{i-1}|(1 + O(h_i)) + h_i O(h^{2k+1}).$$

Démonstration. Considérons, comme dans le théorème 3, la différence (e_i, E) entre la solution (\bar{u}_i, \bar{U}) de la méthode de projection et celle de la méthode des α explicite (u_i, U) ; en supposant $E_0 = 0$. La conclusion du théorème 3 et (3.11) donnent la majoration locale suivante :

$$\|e_i\|_{\Omega_i} \leq \theta_i h_i^{1/2} (O(1)|0| + O(h^{k+1}) \|D^{k+2}y\|_{\Omega}). \quad (4.9)$$

En utilisant la fonction test v définie en (4.7), la majoration (4.4) devient :

$$|E_i| \leq |E_{i-1}|(1 + O(h_i)) + O(h_i^{k+1/2}) \|e_i\|_{\Omega_i} + O(1) \|e_i\|_{\Omega_i}^2. \quad (4.10)$$

Après avoir appliqué l'inégalité du triangle à

$$Y_i - U_i = Y_i - \bar{U}_i + \bar{U}_i - U_i,$$

la conclusion découle de (4.10), (4.9) et de (4.6). \square

Théorème 4. *Si $y \in H^{k+2}(\Omega)$, f satisfait (2.1)–(4.1), $\beta_i = (-1)^{k+1}$ et la partition est telle que $h_{2j-1} = h_{2j}$ ou $h_{2j} = h_{2j+1}$ pour $1 \leq j \leq [N/2]$, alors l'approximation $\{(u_i, U_i)\}_{i \in I}$ donnée par la méthode des α satisfait, pour h assez petit :*

$$|Y_i - U_i| \leq O(1)|y_0 - u_0| + O(h^{2k+2}).$$

Démonstration. Il suffit de le montrer pour le cas explicite, en récupérant la puissance de h perdue plus haut. De plus, à cause de (4.6), il suffit de considérer, comme dans le théorème 3, la différence (e_i, E) entre la solution (\bar{u}_i, \bar{U}) de la méthode de projection et celle de la méthode des α explicite (u_i, U) , en supposant $E_0 = 0$. Enfin, d'après le lemme 5, il suffit de le montrer pour tous les noeuds pairs, ou bien tous les noeuds impairs. Soient $e \in L^2(\Omega)$ dont la restriction à Ω_i est e_i et notons $B_i = \Omega_i \cup \Omega_{i+1}$, de longueur H_i , pour $i \leq N-1$. Considérons E_{i+1} , pour $i \leq N-1$, et utilisons deux intervalles à la fois, pour relier E_{i+1} à E_{i-1} . Correspondant à (4.3), on a

$$E_{i+1} - E_{i-1}v(x_{i-1}^+) = \langle e, Dv + av \rangle_{B_i} + \langle be^2, v \rangle_{B_i}$$

si $v|_{\Omega_i} \in P_k(\Omega_i)$, $v|_{\Omega_{i+1}} \in P_k(\Omega_{i+1})$, $v(x_i^-) = v(x_i^+)$ et $v(x_{i+1}^-) = 1$. On choisit v telle que $v \in P_k(B_i)$,

$$Dv = -\bar{S}_{k-1,i}(az_i) \quad \text{et} \quad v(x_{i+1}^-) = 1,$$

où $\bar{S}_{k,i}$ est la projection sur $P_k(B_i)$ et z_i est la solution de $Dz_i + az_i = 0$, $z(x_{i+1}) = 1$. Alors, $(v - z_i)(x_{i+1}^-) = 0$, $Dv + av = D(v - z_i) + a(v - z_i)$,

$$D(v - z_i) = \bar{S}_{k-1,i}^\perp(az_i)$$

$$\|v\|_{\infty, B_i} \leq 1 + H_i^{1/2} \|az_i\|_{B_i} = 1 + O(H_i)$$

$$v - z_i = \langle \bar{S}_{k-1,i}^\perp(az_i), 1 \rangle_{(x_{i+1}, x)}$$

$$\|a(v - z_i)\|_{B_i} \leq \|a\|_{B_i} \|\bar{S}_{k-1,i}^\perp az_i\|_{B_i} h_i = O(H_i^{k+3/2})$$

ce qui donne, avec $\bar{p}_{k,i}$ polynôme de Legendre sur B_i ,

$$\begin{aligned} |E_{i+1}| \leq & (|E_{i-1}| + O(1)\|e\|_{B_i}^2)(1 + O(H_i)) + \|e\|_{B_i} O(H_i^{k+3/2}) \\ & + \left| \langle e, \bar{S}_{k,i}^\perp(az) \rangle_{B_i} \right| + \left| \langle \bar{S}_{k-1}^\perp(az), \bar{p}_{k,i}/\sigma^2 H_i \rangle_{B_i} \langle e, \bar{p}_{k,i} \rangle_{B_i} \right| \end{aligned} \quad (4.11)$$

On utilise maintenant dans le dernier terme du membre de droite la représentation (1.27) pour l'erreur e_i et (1.30) pour l'erreur e_{i+1} , qui sont valides ici.

$$\begin{aligned} \langle e, \bar{p}_{k,i} \rangle_{B_i} = & \langle S_{k,i} E, \bar{p}_{k,i} \rangle_{\Omega_i} + \langle S_{k,i+1} E, \bar{p}_{k,i} \rangle_{\Omega_{i+1}} \\ & + \langle f(\bar{u}_i) - f(u_i), \frac{1}{2}(p_{k+1,i} + p_{k,i}) \rangle_{\Omega_i} \langle p_{k,i}, \bar{p}_{k,i} \rangle_{\Omega_i} \\ & + \langle f(\bar{u}_{i+1}) - f(u_{i+1}), \frac{1}{2}(p_{k+1,i+1} - p_{k,i+1}) \rangle_{\Omega_{i+1}} \\ & \times \langle p_{k,i+1}, \bar{p}_{k,i} \rangle_{\Omega_{i+1}} \\ & + (e_i(x_i^-) - E_i) \langle p_{k,i}, \bar{p}_{k,i} \rangle_{\Omega_i} \\ & + (e_{i+1}(x_i^+) - E_i) (-1)^k \langle p_{k,i+1}, \bar{p}_{k,i} \rangle_{\Omega_{i+1}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Tous les termes du membre de droite de (4.12), sauf le dernier, sont au plus d'ordre $|E_{i-1}|(1 + O(H_i))$ ou seront d'ordre h^{2k+2} après sommation et, lorsque multipliés par

$$\left\langle \bar{S}_{k-1}^\perp(az), \bar{p}_{k,i}/\sigma^2 H_i \right\rangle_{B_i},$$

qui est d'ordre H_i^k , tous les termes de (4.12), sauf les deux derniers, sont d'ordre $|E_{i-1}|O(H_i)$ ou seront d'ordre h^{2k+2} après sommation.

Soient, en tenant compte de la condition d'interpolation de la méthode des α ,

$$\Delta_i = e_{i+1}(x_i^+) - E_i - \beta_i(e_i(x_i^-) - E_i) = \bar{u}_{i+1}(x_i^+) - \bar{U}_i - \beta_i(\bar{u}_i(x_i^-) - \bar{U}_i).$$

En exploitant l'uniformité locale de la partition et la condition d'interpolation, les deux derniers termes de (4.11) ont pour somme

$$\Delta_i (-1)^k \langle p_{k,i+1}, \bar{p}_{k,i} \rangle_{\Omega_{i+1}} = \Delta_i \frac{(-1)^k \sigma^2 h_{i+1}^{k+1}}{H_i^k}.$$

Selon la remarque 1, la somme des $|\Delta_i|$, pour i impair (ou pour i pair), est ici d'ordre h^{k+1} , de sorte que la somme des deux derniers termes de (4.12) est d'ordre h^{2k+2} . En fait, on a montré que

$$|E_{i+1}| \leq (1 + O(H_i))|E_{i-1}| + O(H_i^{k+3/2})\|e\|_{B_i} + O(1)\|e\|_{B_i}^2 + |\Delta_i|O(H_i^{k+1}),$$

et par sommation, en exigeant $h_i = h_{i+1}$ seulement pour les noeuds impairs (ou pour les noeuds pairs), on en déduit par le théorème 3 :

$$|E_{i+1}| = O(1)|E_0| + O(h^{2k+2}).$$

Ceci complète la preuve de la conjecture de Delfour, Hager et Trochu [4]. \square

5. Conclusion. En plus de démontrer, sous une condition faible de régularité de la partition, deux conjectures concernant l'ordre de convergence plus élevé observé numériquement pour certaines valeurs spéciales du paramètre dans la méthode des α , nous avons prouvé l'existence de la solution numérique dans le cas implicite; un contre-exemple simple a montré qu'il fallait alors imposer des conditions sur le problème à résoudre dans certains cas limites, mais on peut croire que, pour les valeurs du paramètre assurant un ordre élevé de convergence, la solution existe si la partition est assez fine. On a suggéré — sans plus — une nouvelle façon de mettre en oeuvre la méthode des α en utilisant une équation du point fixe. Une généralisation de la méthode des α implicite a été proposée, et on en a étudié l'existence et l'ordre de convergence. On a montré théoriquement et pratiquement que les valeurs limites $(-1)^{k+1}$ assurant un ordre supérieur de convergence pouvaient être modifiées à ordre de h près et une formule adaptée à des partitions quelconque a été découverte. Enfin, une nouvelle présentation de la méthode des α a été explorée, exploitant systématiquement la relation étroite avec une méthode de projection plus simple; pour les valeurs spéciales du paramètre α , les deux méthodes ont le même ordre de convergence, mais leurs propriétés de stabilité seront différentes.

English extended abstract. In [4], Delfour, Hager and Trochu present a variational method using piecewise discontinuous polynomials to solve a linear system of differential equations, extending a method proposed by Lesaint and Raviart [11]. Dubeau [8, 9] applied to non-linear systems this method involving a real parameter α .

In this article, we complete the results obtained by Dubeau [9], proving two conjectures related to the existence of the approximate solution in the implicit case (B in [9]) and to the higher order of convergence for certain values of the parameter α .

The techniques used here are elementary, and can almost all be found, with different notations, in [3], [4] or [9]. The only exceptions are the reduction to a one step method in the existence proof, the merging of two intervals in the proof of the superconvergence for limiting values of α , and the systematic use of a projection method to study the convergence of other approximation methods. Relations (1.1)–(1.4), which follow from the properties of the Legendre polynomial of degree k on $[0, 1]$, normalized by $p_k(1) = 1$, relate the projection error at a point to a scalar product involving the derivative and combinations of Legendre polynomials.

The continuous differential problem (1.5) can be transformed into a weaker form (1.8), given a partition of $\Omega = (0, 1)$ into N subintervals $\Omega_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i \in I = \{1, \dots, N\}$, and into the projection problem (1.9)–(1.10). Numerical methods are obtained by replacing the Sobolev spaces $L^2(\Omega_i)$ and $H^1(\Omega)$ by subspaces $P_k(\Omega_i)$ of piecewise polynomials of degree k or less on Ω_i . This leads to the projection method (1.12)–(1.13) where the $u_i \in P_k(\Omega_i)$ are used to obtain, via integration, the values U_i at the nodes. In the α -method (1.17)–(1.18) and (1.19) or (1.20), one orthogonality condition in (1.13) is replaced by a linear relation between the jumps on both sides of a node via (1.19) in the explicit case, or (1.20) in the implicit case. If (e_i, E) is the error between the true solution (y_i, Y) from (1.17)–(1.18) and the solution of the α -method, the key characterizations equation are (1.27) in the implicit case, and (1.29) in the explicit case.

If the function f satisfies the Lipschitz condition (2.1) with constant λ and λh is small enough, the existence of the approximate solution in the projection method is proven by using the fixed-point operator (2.2), a particular case of a general result shown in [3]. Likewise, the existence of the solution in the explicit case of the α -method is proven via the operator (2.4), for any $\alpha_{i-1} \neq 1$. This result was shown in [9], but our proof uses the equation (1.2) relating the value at an endpoint of the orthogonal component of the projection on $P_k(\Omega)$ to a scalar product between the derivative and Legendre polynomials. When $k \rightarrow \infty$, the importance of the interpolation condition (1.21) diminishes relatively to the orthogonality conditions (1.18).

The existence of the solution in the implicit case of the α -method is a new result. We generalize the condition (1.23) by considering a real function G_i for each node in (2.6). Lemma 1 shows that if the functions f and G_i satisfy Lipschitz conditions and if λh is small enough, there exists a unique solution to the equations of this generalized implicit α -method, (1.17), (1.18) and (2.6). The method proposed by Lesaint and Raviart [11] corresponds to the choice $G_i(U_i) = U_i$, with Lipschitz constant 1. In Theorem 1, we prove that the functions G_i from (2.7) involved in the implicit α -method have bounded Lipschitz constants if λh is small enough when the β_i from (1.24) are in $(-1, 1)$ or if λ is small enough when the β_i are in $[-1, 1]$. Lemma 1, used recursively starting with the last interval, implies the existence of the approximate solution under these conditions.

In the explicit case of the α -method, replacing the right side of (1.21) by a function $G_{i-1}(U_{i-1})$ will involve known values from the previous subinterval and G_i can be considered as having null Lipschitz constant; we obtain the existence of the approximate solution in a new generalization of the explicit α -method.

In a certain sense, these are the best results that can be proven since a counterexample is given by a linear differential equation $y' = \lambda y$ and piecewise constants leading to a singular matrix when all β_i are 1 on a uniform partition, independently of h . A more direct proof of some of the results in this section can be obtained via iterations of the fixed-point operator (2.9).

The L^2 norm (3.3) of the error $y_i - \bar{u}_i$ between the true solution y_i and the piecewise polynomials u_i computed by the projection method (1.12)–(1.13) is of order h^{k+1} ; the errors $Y_i - \bar{Y}_i$ at the nodes (3.4) and the jumps (3.8) have at least the same order of convergence; these results were proven in [3]. In Lemma 2, we show that the error of the generalized implicit α -method is related to the error of the projection method at the nodes, and in Lemma 3 these errors are estimated when the true solution satisfies $y_i(x_i^-) = Y_i = G_i(Y_i)$. Theorem 2 proves that under regularity conditions, the convergence rate of the generalized implicit α -method is the same as the rate of the projection method. Lemma 4 studies how well the projection method satisfies the equations of the α -method: it turns out that in the special case of $\beta_i = (-1)^{k+1}$, the sum of the discrepancies is of order h^{k+1} for uniform partitions. In Remark 2, we extend this to partitions with bounded step ratios, when the parameters β_i are chosen as in (3.10). Theorem 3 proves that the order of convergence of the explicit α -method, under the conditions of Theorem 1, is not worse than for the projection method, if the partition is uniform or an odd interval has the same length as the next even interval. Dubeau [9] had proven this result under the condition $\beta_i \in (-1, 1)$; we have extended this condition, proving the convergence rate $k + 1$ observed numerically in [2] when

$\beta_i = (-1)^{k+1}$. According to a theorem of Caratheodory, it is known (see [9]) that the orders of convergence of both cases of the α -method are equal, and in Remark 3, we state that the parameters β_i can be adapted to a partition with slowly increasing step, in order to preserve this convergence rate.

When the function f is almost linear in the sense of condition (4.1), we present a brief proof of a result in [3] stating that the convergence rate at the nodes is $2k + 2$ for smooth y in the projection method, (4.6). This uses as test function in the variational equation (1.8) a polynomial $v \in P_{k+1}(\Omega_i)$ approximating, according to (4.2), the solution z_i of a dual problem. However, in the α -method, only polynomials of degree k or less are allowed as test functions and we can only conclude as in [9] that the error at the nodes is of order h^{2k+1} , while numerical results in [2] indicate that it is h^{2k+2} when $\beta_i = (-1)^{k+1}$. We show in Theorem 4 that the extra power of h can be regained by considering two intervals at a time, whereby the lower order terms involving Dy_i in (1.30), cancel out when $\beta_i = (-1)^{k+1}$; this proves the conjecture which was left open in [4].

BIBLIOGRAPHIE

1. P. Arminjon et C. Beauchamp, *Continuous and discontinuous finite element methods for Burger's equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **25** (1981), 65–84.
2. A. Chalifour, *Analyse d'une méthode d'éléments finis discontinus pour les équations différentielles linéaires*, mémoire de maîtrise, Département de mathématiques et de statistique, Université de Montréal, 1976.
3. M. C. Delfour et F. Dubeau, *Discontinuous polynomial approximations in the theory of one-step, hybrid and multistep methods for nonlinear ordinary differential equations*, Math. Comp. **47** (1986), 169–189.
4. M. C. Delfour, W. Hager et F. Trochu, *Discontinuous piecewise polynomial Galerkin methods for ordinary differential equations*, Math. Comp. **36** (1981), 455–473.
5. M. C. Delfour et A. Ouansafi, *Noniterative approximations to the solution of the matrix Riccati differential equation*, SIAM J. Numer. Anal. **29**, (1992), 1648–1693.
6. M. C. Delfour et F. Trochu, *Discontinuous approximation of ordinary differential equations and application to optimal control problems*, Rapport CRMA-751, Centre de recherche de mathématiques appliquées, Université de Montréal, 1977.
7. M. C. Delfour et F. Trochu, *Discontinuous finite element methods for the approximation of optimal control problems governed by hereditary differential systems*, Distributed Parameter Systems : Modelling and Identification (A. Ruberti, éd.), Springer Verlag, New York, 1978, 256–271.
8. F. Dubeau, *Approximations polynômiales par morceaux des équations différentielles*, thèse de doctorat, Université de Montréal, 1981.
9. F. Dubeau, *Approximation discontinue des équations différentielles ordinaires : la méthode des α* , Ann. Sci. Math. Québec **10** (1986), 153–179.
10. K. Erikson, G. Johnson et V. Thomée, *Time discretization of parabolic problems by the discontinuous Galerkin method*, M²AN, **19** (1985), 611–643.
11. P. Lesaint et P. A. Raviart, *On a finite element method for solving the neutron transport equation*, Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations (C. de Boor, éd.), Academic Press, New York, 1974, 89–124.