Ann. Sci. Math. Québec, **16** (1), 1992, 81–94.

PROBLÈME DES DIVISEURS POUR DES VALEURS POLYNÔMIALES II

ARMEL MERCIER ET WERNER GEORG NOWAK

RÉSUMÉ. Dans cet article, on étudie l'ordre moyen de la fonction arithmétique

$$d^*(n) = \#\{(u,v) \in N^2 : p_1(u)p_2(v) = n\}$$

où $p_1(t)$, $p_2(t)$ sont des polynômes dans $Z[t]$, de degrés $k_1 \neq k_2$, qui sont positifs et croissants pour $t \geq 1$. On obtient un comportement asymptotique, avec une bonne précision pour le terme d'erreur, basé sur la méthode moderne pour estimer les sommes exponentielles («méthode discrète de Hardy-Littlewood»).

ABSTRACT. In this article we investigate the average order of the arithmetical function

$$d^*(n) = \#\{(u,v) \in N^2, p_1(u)p_2(v) = n\}$$

where $p_1(t)$, $p_2(t)$ are polynomials in $Z[t]$, of degrees $k_1 \neq k_2$, positive and increasing for $t \geq 1$. We establish an asymptotic result with a fairly sharp error term, on the basis of the modern method for the estimation of exponential sums ("Discrete Hardy-Littlewood Method"). See the English extended abstract at the end of the paper.

1. Introduction. Le problème classique des diviseurs de Dirichlet concerne le nombre de façons d'écrire un entier positif n comme un produit de nombres naturels u_1, v_1. (Pour l'histoire et l'état actuel de ce problème, nous suggérons les livres récents de Fricker [1] et Krätzel [7].)

Il semble naturel de considérer des variantes de ce problème dans le cas où un ou les deux nombres u_1, v_1 sont sujets à certaines contraintes. Par exemple, lorsque u_1, v_1 (ou au moins un des deux) appartiennent à une certaine progression arithmétique, nous trouvons dans [10–13] une discussion détaillée de ce cas.

Dans ce papier, nous considérons le fait que u_1, v_1 sont des valeurs de polynômes de degrés k_1, k_2 (à coefficients entiers), correspondant aux valeurs entières positives u, v. Pour être plus précis, soient p_1, p_2 deux polynômes à coefficients entiers, définis par

$$p_s(t) = a_{k_s}^{(s)} t^{k_s} + \cdots + a_1^{(s)} t + a_0^{(s)}, \qquad (a_{k_s}^{(s)} \neq 0)$$

(dans tout l'article, nous supposons que $s = 1$ ou 2), et nous supposons que les fonctions polynômiales correspondantes sont positives et strictement croissantes sur $[1, \infty)$.

Reçu le 10 avril 1991 et, sous forme définitive, le 24 septembre 1991.

Travail fait dans le cadre de la subvention CRSNG A-3508.

Cet article fait partie du projet de recherche supporté par le fonds autrichien «Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung» (n° P7514-PHY).

Dénotons par $d^*(n)$ le nombre de façons d'écrire le nombre naturel n sous la forme $p_1(u)p_2(v)$ où u, v sont des entiers positifs, *i.e.*

$$d^*(n) = d^*_{p_1,p_2}(n) = \#\{(u,v) \in N^2 : p_1(u)p_2(v) = n\}.$$

Dans cet article, nous étudions l'ordre moyen de cette fonction arithmétique $d^*(n)$, *i.e.* nous considérons la fonction sommatoire

$$D^*(x) = \sum_{n \leq x} d^*(n),$$

où x est une variable réelle assez grande. Il est clair que $D^*(x)$ désigne le nombre de points à coordonnées entières (de l'ensemble des coordonnées entières Z^2) dans le domaine planaire

$$\{(u,v) \in R^2 : u > 0, v > 0, p_1(u)p_2(v) \leq x\}.$$

(Pour avoir un tour d'horizon de la théorie des points à coordonnées entières dans de nombreux domaines, nous référons le lecteur encore aux livres de référence [1] et [7]. Dans ces monographies on peut aussi trouver les définitions des symboles O, o, $\ll$, et $\asymp$ qui sont utilisés par la suite.) Notons, que d'un point de vue purement géométrique, on peut enlever la condition que les coefficients $a_l^{(s)}$ soient entiers. En faisant ceci, il est évident que nous ne perdons pas la généralité du problème si nous supposons que

$$a_{k_1}^{(1)} = a_{k_2}^{(2)} = 1,$$

et c'est ce que nous ferons par la suite.

Dans la partie I de ce travail [8], nous avons considéré le cas spécial $k_1 = k_2 (=: k)$ et nous avons obtenu le résultat

$$D^*(x) = x^{1/k}\log(x^{1/k}) - Cx^{1/k} + O\left(x^{7/22k}(\log x)^{67/22}\right), \qquad ((1.1))$$

où C est une constante effective.

Cet estimé généralise (sans aucune perte de précision) le présent «record» pour le problème des diviseurs de Dirichlet (voir Iwaniec et Mozzochi [6], Huxley [3] et Müller et Nowak [9]).

Dans ce papier, nous supposons cependant que $k_1 \neq k_2$, et ainsi, sans perte de généralité que

$$1 \leq k_1 < k_2. \qquad (1.2)$$

Notre objectif est de démontrer le résultat asymptotique suivant.

Théorème. *Pour* $x \to \infty$, k_1,k_2 *des nombres fixes satisfaisant* (1.2), *et des coefficients fixés* $a_l^{(s)}$ ($s = 1, 2$, $l = 0, \ldots, k_s - 1$), *nous avons*

$$D^*(x) = C^{(1)}x^{1/k_1} + C^{(2)}x^{1/k_2} + E(x)$$

où

$$C^{(s)} = \frac{1}{2}\big(p_{3-s}(1)\big)^{-1/k_s} + C_0^{(s)} + C_1^{(s)},$$

$$C_0^{(s)} = -\frac{1}{k_s}\int_1^\infty \psi(w)\frac{p'_{3-s}(w)}{\big(p_{3-s}(w)\big)^{1+1/k_s}}\,dw,$$

$$C_1^{(s)} = \frac{k_s}{k_{3-s}-k_s}\left(\big(p_{3-s}(1)\big)^{-1/k_s} - \int_1^\infty w^{1-k_{3-s}/k_s}\frac{d}{dw}\left(w^{k_{3-s}/k_s}\big(p_{3-s}(w)\big)^{-1/k_s}\right)dw\right)$$

($s = 1, 2$, $\psi(w) = w - [w] - \frac{1}{2}$ dans tout ce texte), et le terme d'erreur $E(x)$ peut être estimé de la façon suivante: pour toute paire d'exposants (de dimension un) (α,β), posons

$$\Theta_1(k_1,k_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{7}{22}\frac{1}{k_1} - \frac{7}{22}\gamma(k_1,k_2)\left(\frac{k_2}{k_1}-1\right), \tag{1.3}$$

avec

$$\gamma(k_1,k_2) \stackrel{\text{def}}{=} \left(k_2 - k_1 + \frac{k_1(\beta-\alpha)}{\frac{7}{22}-\frac{15}{22}\alpha}\right)^{-1}, \tag{1.4}$$

$$\Theta_2(k_1,k_2) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+1}\frac{1}{k_1+k_2}, \frac{\alpha}{\alpha k_2 + k_1(1+\alpha-\beta)}\right\}, \tag{1.5}$$

et

$$\Theta(k_1,k_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Theta_1(k_1,k_2) & \textit{si } 4\alpha + 11\beta \geq 7 \textit{ et } \frac{\beta}{\alpha} \geq \frac{k_2}{k_1} \\ \Theta_2(k_1,k_2) & \textit{autrement.} \end{cases}$$

Alors

$$E(x) \ll x^{\Theta(k_1,k_2)+\varepsilon}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, où le symbole constant $\ll$ peut dépendre de ε, des polynômes p_1, p_2 et de la paire d'exposants (α,β).

Pour obtenir de bonnes valeurs numériques pour $\Theta(k_1,k_2)$, nous pouvons, par des calculs faits par ordinateur, chercher le meilleur choix de (α,β) en commençant par la paire d'exposants[1] $(89/560, 369/560)$ (qui était obtenue récemment par N. Watt [14], en raffinant son travail écrit conjointement avec M. Huxley [4]) et en appliquant les procédés A et B habituels (voir Krätzel [7, p. 52 s]). Comme exemple, nous donnons des valeurs de $\Theta(k_1,k_2)$ obtenues de cette façon, pour $1 \leq k_1 < k_2 \leq 5$:

$\Theta(1,2) = \frac{369}{1667}$	(BA)
$\Theta(1,3) = \frac{2036}{11847}$	$(BABA^2BA)$
$\Theta(1,4) = \frac{392}{2783}$	(identité)
$\Theta(1,5) = \frac{14875}{122386}$	(ABA^2)
$\Theta(2,3) = \frac{2583}{19787}$	(BA)

[1] Nous ignorons les ε dans toute paire d'exposants, étant donné que l'exposant de x dans le résultat final de l'estimé pour $E(x)$ contient de toute façon un ε.

$$\begin{array}{ll}\Theta(2,4)=\frac{369}{3334} & (BA)\\ \Theta(2,5)=\frac{25921}{268487} & (BABABABA)\\ \Theta(3,4)=\frac{2583}{27905} & (BA)\\ \Theta(3,5)=\frac{2583}{31456} & (BA)\\ \Theta(4,5)=\frac{2583}{36023} & (BA)\end{array}$$

Les lettres dans les parenthèses indiquent la suite d'étapes de A et B qui a été appliquée à la paire d'exposants $\left(\frac{89}{560}, \frac{369}{560}\right)$; *e.g.*, la première ligne de la table signifie que la valeur $\Theta(1,2)$ est obtenue de $(\alpha, \beta) = BA\left(\frac{89}{560}, \frac{369}{560}\right)$.

Remarques.

(1) Le comportement asymptotique que nous avons obtenu est basé sur une technique entièrement moderne pour l'estimation de sommes exponentielles que l'on appelle «méthode discrète de Hardy-Littlewood»: voir Iwaniec et Mozzochi [6], Huxley [3], Huxley et Watt [4], Watt [14] et W. Müller et Nowak [9]. Dans notre preuve, nous utiliserons ces nouveaux outils d'une double manière; la version de Huxley [3] qui est spécialisée pour obtenir des estimations de sommes de parties fractionnaires, et la forme de Watt [14], pour son résultat sur la paire d'exposants mentionnée plus tôt.

La «nouvelle» méthode (pour un bon nombre de problèmes en théorie des nombres) conduit non seulement à de meilleurs résultats, mais simplifie considérablement le traitement. Ce dernier fait nous incite à l'utiliser pour résoudre le problème d'aujourd'hui. Bien que Dirichlet aurait pu établir notre théorème avec le terme d'erreur $O\left(x^{1/(k_1+k_2)}\right)$, la plupart des méthodes développées dans les dernières décennies, pour améliorer les estimés du problème des diviseurs, étaient techniquement trop compliquées pour permettre une extension «facile» à notre situation générale.

(2) Pour certaines valeurs de k_1, k_2, notre théorème améliore les résultats connus pour le cas spécial $p_1(u) = u^{k_1}$, $p_2(v) = v^{k_2}$ qui est discuté en détail dans le livre de Krätzel [7]. Il était déjà observé par Krätzel et Menzer (communications personnelles, où le second auteur veut exprimer sa plus sincère gratitude) que la nouvelle approche pourrait être utilisée pour améliorer les estimés de ce cas particulier.

(3) De plus, de légères améliorations de l'exposant dans le terme d'erreur sont certainement possibles. D'une part, ceci pourrait être réalisé par un meilleur choix de la paire d'exposants, en utilisant *e.g.*, un algorithme développé récemment par Graham [2]. D'autre part, on pourrait appliquer des versions plus sophistiquées de la «méthode discrète de Hardy-Littlewood», telle que présentée, *e.g.*, dans Huxley et Watt [4], ou les estimés de dimension deux pour les sommes exponentielles (*cf.* encore le texte [7]).

2. Préliminaires.

Lemme 1. *Soit q_s la fonction inverse de p_s, définie sur $[p_s(1), \infty)$, alors pour w suffisamment grand, nous avons le développement en série*

$$q_s(w) = w^{1/k_s} + b_0^{(s)} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{(s)} w^{-j/k_s},$$

qui peut être dérivée terme à terme jusqu'à un ordre arbitraire. En particulier,

$$b_0^{(s)} = -\frac{1}{k_s} a_{k_s-1}^{(s)}. \tag{2.1}$$

Démonstration. Ceci est un exercice facile de l'analyse classique.

La déduction de notre théorème est basée sur un moyen élémentaire («méthode de l'hyperbole») qui donne

$$\begin{aligned} D^*(x) &= \sum_{s=1,2} \left(\sum_{n \le q_s(T_s)} \left[q_{3-s}\left(\frac{x}{p_s(n)}\right) \right] \right) - [q_1(T_1)][q_2(T_2)] \\ &= \sum_{s=1,2} (H_s(x) - R_s(x)) - \frac{1}{2}(q_1(T_1) + q_2(T_2)) - [q_1(T_1)][q_2(T_2)] + O(1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

où $T_s = x^{k_s/(k_1+k_2)}$, $s = 1, 2$, et

$$H_s(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \le q_s(T_s)} q_{3-s}\left(\frac{x}{p_s(n)}\right), \quad R_s(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \le q_s(T_s)} \psi\left(q_{3-s}\left(\frac{x}{p_s(n)}\right)\right). \quad \Box$$

3. Estimation de $R_s(x)$: La «méthode discrète de Hardy-Littlewood».

Lemme 2. *Soit $M_x \ge 1$, $V_x > 0$, $f_x(u)$ une fonction à valeurs réelles différentiable jusqu'à un ordre arbitraire sur $M_x \le u \le 2M_x$. (L'indice x indique la dépendance pour un paramètre réel x grand.) Supposons que, pour un $\sigma > 0$, et pour tout $m \in N$,*

$$f_x^{(m)}(u) = (1 + o(1)) \left(\frac{d^m}{du^m}(V_x u^{-\sigma}) \right) \tag{3.1}$$

où $o(1)$ se réfère à $x \to \infty$ et est uniforme dans $M_x \le u \le 2M_x$ (mais pas nécessairement pour $m \in N$). Supposons de plus que

$$V_x \gg M_x^{1+\sigma}.$$

Alors il s'ensuit que

$$\sum_{M_x < n \le 2M_x} \psi(f_x(n)) \ll (V_x M_x^{1-\sigma})^{7/22} \left(\log(2V_x M_x^{1-\sigma})\right)^{45/22}. \tag{3.2}$$

De plus, pour toute paire d'exposants (α, β), nous avons

$$\sum_{M_x < n \le 2M_x} \psi(f_x(n)) \ll M_x^{(\alpha+\beta)/(\alpha+1)} (V_x M_x^{-\sigma-1})^{\alpha(\alpha+1)}. \tag{3.3}$$

Démonstration. (3.2) est un cas spécial du résultat principal de Huxley [3](amélioré légèrement par W. Müller et Nowak [9]. Dans notre présent énoncé nous avons formulé explicitement une condition suffisante pour la fonction $f_x(u)$ sur $[M_x, 2M_x]$, pour nous permettre d'utiliser les paires d'exposants (de dimension un) (*cf.* Krätzel [7, p. 52])

(3.3) est un résultat classique (voir Krätzel [7, p. 56]).

Nous allons maintenant appliquer ce profond estimé à la fonction

$$f(u) = q_{3-s}\left(\frac{x}{p_s(u)}\right) \tag{3.4}$$

apparaissant dans $R_s(x)$. Les premiers termes s'évaluent facilement, nous pouvons supposer que

$$x^\delta \ll u \ll x^{1/(k_1+k_2)} \tag{3.5}$$

où δ est une petite constante positive appropriée, et alors

$$x^{k_{3-s}/(k_1+k_2)} \ll \frac{x}{p_s(u)} \ll x^{1-k_s\delta}. \tag{3.6}$$

Il suffit de montrer que, dans cet intervalle, $f(u)$ satisfait l'exigence (3.1) du lemme 2. □

Lemme 3. *La fonction* $f(u)$ *définie dans* (3.4) *satisfait (pour tout* $m \in N$*)*

$$f^{(m)}(u) = \big(1 + o(1)\big)\frac{d^m}{du^m}(x^{1/k_{3-s}}u^{-k_s/k_{3-s}}),$$

lorsque $x \to \infty$*, uniformément dans* $x^\delta \ll u \ll x^{1/(k_1+k_2)}$.

Démonstration. Sans perdre la généralité du problème et aussi pour simplifier, nous supposerons que $s = 1$. D'après (3.4) et le lemme 1, nous avons

$$f(u) = \left(\frac{x}{p_1(u)}\right)^{1/k_2} + b_0^{(2)} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j^{(2)}\left(\frac{p_1(u)}{x}\right)^{j/k_2}. \tag{3.7}$$

Maintenant, il est clair que

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{p_1(u)}\right)^{1/k_2} &= x^{1/k_2}u^{-k_1/k_2}\left(1 + \cdots + \frac{a_0^{(1)}}{u^{k_1}}\right)^{-1/k_2}\\ &= x^{1/k_2}\left(u^{-k_1/k_2} + \sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r u^{-k_1/k_2-r}\right),\end{aligned}$$

pour x suffisamment grand. De même, pour tout $j \in N$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{p_1(u)}{x}\right)^{j/k_2} &= x^{-j/k_2}\,u^{jk_1/k_2}\left(1 + \cdots + \frac{a_0^{(1)}}{u^{k_1}}\right)^{j/k_2}\\ &= x^{-j/k_2}\left(u^{jk_1/k_2} + \sum_{l=1}^{\infty}\beta_{l,j}u^{jk_1/k_2-l}\right).\end{aligned}$$

En insérant ceci dans (3.7) et en différentiant terme à terme (ce qui est permis, par la convergence absolue et uniforme des séries en présences), nous obtenons

$$\begin{aligned} f^{(m)}(u) = x^{1/k_2}\Bigg(&\left(1-\frac{k_1}{k_2}-m\right)_m u^{-k_1/k_2-m} \\ &+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r\left(1-\frac{k_1}{k_2}-r-m\right)_m u^{-k_1/k_2-m-r}\Bigg) \\ &+\sum_{j=1}^{\infty} b_j^{(2)} x^{-j/k_2}\Bigg(\left(1+\frac{jk_1}{k_2}-m\right)_m u^{jk_1/k_2-m} \\ &\qquad +\sum_{l=1}^{\infty}\beta_{l,j}\left(1+\frac{jk_1}{k_2}-l-m\right)_m u^{jk_1/k_2-l-m}\Bigg) \\ = &\left(\frac{d^m}{du^m}(x^{1/k_2}u^{-k_1/k_2})\right)(1+o(1)) + O(x^{-1/k_2}u^{k_1/k_2-m}) \\ = &\left(\frac{d^m}{du^m}(x^{1/k_2}u^{-k_1/k_2})\right)(1+o(1)), \end{aligned}$$

étant donné les bornes de u ($(\cdot)_m$ est le symbole de Pochhammer). Ceci établit le lemme 3. □

Nous sommes maintenant prêts pour estimer les sommes $R_s(x)$. En tout premier, nous considérons $R_2(x)$ qui contient quelques difficultés. Divisons la portée de la sommation en une suite géométrique

$$M_x^{(j)} = 2^{-j} q_2(T_2) \qquad (j = 0, 1, \dots, J, \dots, K)$$

avec $J = J(x)$, $K = K(x)$ tel que $M_x^{(K)} \asymp x^{\delta}$ et $M_x^{(J)} \asymp x^{\lambda}$, $\lambda > 0$ est une constante que nous choisirons plus tard. Nous appliquons le lemme 2 à chaque intervalle $I_j = (M_x^{(j)}, 2M_x^{(j)}]$, $j \geq 1$, puisque la validité de (3.1) est assurée par le lemme 3, avec $V_x = x^{1/k_1}$, $\sigma = k_2/k_1$. De plus,

$$(M_x^{(j)})^{1+\sigma} \ll \big(q_2(T_2)\big)^{1+k_2/k_1} \ll x^{1/k_1} = V_x.$$

Ainsi nous déduisons de (3.2) que

$$\begin{aligned} \sum_{n\in I_j}\psi\left(q_1\left(\frac{x}{p_2(n)}\right)\right) &\ll \left(x^{1/k_1}(M_x^{(j)})^{1-k_2/k_1}\right)^{7/22}(\log x)^{45/22} \\ &= x^{7/22k_1}(M_x^{(j)})^{7/22\,(1-k_2/k_1)}(\log x)^{45/22}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

et de (3.3) que

$$\begin{aligned} \sum_{n\in I_j}\psi\left(q_1\left(\frac{x}{p_2(n)}\right)\right) &\ll (M_x^{(j)})^{(\alpha+\beta)/(\alpha+1)}\left(x^{1/k_1}\left((M_x^{(j)})\right)^{-k_2/k_1-1}\right)^{\alpha/(\alpha+1)} \\ &= x^{(1/k_1)(\alpha/(\alpha+1))}\left(M_x^{(j)}\right)^{(\beta-\alpha k_2/k_1)/(\alpha+1)}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

pour toute paire d'exposants (α, β).

En tout premier, nous considérons le cas

$$4\alpha + 11\beta \geq 7 \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\alpha} \geq \frac{k_2}{k_1}. \tag{3.10}$$

En utilisant (3.8) pour $j \leq J$ et (3.9) pour $J < j \leq K$, nous obtenons finalement

$$R_2(x) \ll x^{7/22\, k_1} (x^\lambda)^{-7/22\,(k_2/k_1 - 1)} (\log x)^{45/22} + x^{(1/k_1)\left(\alpha/(\alpha+1)\right)} \left(x^\lambda\right)^{(\beta - \alpha k_2/k_1)/(\alpha+1)}.$$

Il est optimal de choisir $\lambda = \gamma(k_1, k_2)$ comme défini dans (1.4). (Le premier terme de (3.10) nous assure que $\gamma(k_1, k_2) \leq 1/(k_1 + k_2)$.) Nous avons ainsi

$$R_2(x) \ll x^{\Theta_1(k_1,k_2)+\varepsilon}, \tag{3.11}$$

(revoir la définition (1.3)), pourvu que (3.10) est satisfait. Nous déduisons facilement l'analogue de (3.8) en permutant tous les indices 1 et 2. En additionnant cet estimé pour tout $j \leq K$, nous obtenons

$$R_1(x) \ll x^{(7/11)\left(1/(k_1+k_2)\right)} (\log x)^{45/22},$$

où l'exposant de x est plus petit que $\Theta_1(k_1, k_2)$, et alors

$$R_1(x) + R_2(x) \ll x^{\Theta_1(k_1,k_2)+\varepsilon}, \tag{3.12}$$

tant que l'équation (3.10) soit vraie.

Si la condition (3.10) n'est pas vérifiée, nous pouvons suivre l'argument classique effectué par Krätzel [7, p. 223], dans le cas spécial $p_1(u) = u^{k_1}$, $p_2(v) = v^{k_2}$, pour conclure que

$$R_1(x) + R_2(x) \ll x^{\Theta_2(k_1,k_2)+\varepsilon}. \tag{3.13}$$

4. Évaluation asymptotique de $H_s(x)$. Par la formule sommatoire d'Euler,

$$H_s(x) = \int_1^{q_s(T_s)} q_{3-s}\left(\frac{x}{p_s(u)}\right) du - \psi(q_s(T_s)) q_{3-s}(T_{3-s}) + \frac{1}{2} q_{3-s}\left(\frac{x}{p_s(1)}\right) + \int_1^{q_s(T_s)} \psi(u) \frac{d}{du}\left(q_{3-s}\left(\frac{x}{p_s(u)}\right)\right) du. \tag{4.1}$$

étant donné le lemme 1,

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}\left(q_{3-s}\left(\frac{x}{p_s(u)}\right)\right) &= -\frac{1}{k_{3-s}} x^{1/k_{3-s}} \frac{p_s'(u)}{\left(p_s(u)\right)^{1+1/k_{3-s}}} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{k_{3-s}} b_j^{(3-s)} x^{-j/k_{3-s}} \left(p_s(u)\right)^{j/k_{3-s}-1} p_s'(u) \\ &= -\frac{1}{k_{3-s}} x^{1/k_{3-s}} \frac{p_s'(u)}{\left(p_s(u)\right)^{1+1/k_{3-s}}} + O(x^{-1/k_{3-s}} u^{-1+k_s/k_{3-s}}), \end{aligned} \tag{4.2}$$

uniformément pour u dans l'intervalle d'intégration donné dans (4.1). La contribution du terme d'erreur est, dans la dernière intégrale de (4.1), $O(x^{-1/(k_1+k_2)})$, tandis que le terme principal de (4.2), on observe que, pour $y \geq 1$,

$$\int_y^\infty \psi(u) \frac{p_s'(u)}{\left(p_s(u)\right)^{1+1/k_{3-s}}}\, du \ll \max_{u \geq y} \left| \frac{p_s'(u)}{\left(p_s(u)\right)^{1+1/k_{3-s}}} \right| \ll y^{-1-k_s/k_{3-s}}, \tag{4.3}$$

d'après le deuxième théorème de la moyenne. Alors, si nous définissons $C_0^{(s)}$ comme énoncé dans notre théorème, il s'ensuit de (4.1)–(4.3) que

$$\int_1^{q_s(T_s)} \psi(u) \frac{d}{du} \left(q_{3-s}\left(\frac{x}{p_s(u)} \right) \right) du = C_0^{(3-s)} x^{1/k_{3-s}} + O(1), \tag{4.4}$$

en rappelant que $q_s(T_s) \asymp x^{1/(k_1+k_2)}$. Pour résoudre la première intégrale dans (4.1), nous utilisons le lemme 1 sous la forme faible

$$q_{3-s}\left(\frac{x}{p_s(u)} \right) = x^{1/k_{3-s}} \left(p_s(u)\right)^{-1/k_{3-s}} + b_0^{(3-s)} + O\left(x^{-1/(k_1+k_2)} \right),$$

uniforme pour $1 \leq u \ll x^{1/(k_1+k_2)}$. Ceci implique

$$\int_1^{q_s(T_s)} q_{3-s}\left(\frac{x}{p_s(u)} \right) du = x^{1/k_{3-s}} F_s(q_s(T_s)) + b_0^{(3-s)} x^{1/(k_1+k_2)} + O(1) \tag{4.5}$$

avec

$$F_s(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^y \left(p_s(u)\right)^{-1/k_{3-s}} du \qquad (y \geq 1). \tag{4.6}$$

Lemme 4. *La fonction $F_s(y)$ définie par* (4.6) *possède le développement asymptotique* (*lorsque $y \to \infty$*)

$$F_s(y) = \frac{k_{3-s}}{k_{3-s} - k_s} y^{1-k_s/k_{3-s}} + C_1^{(3-s)} - b_0^{(s)} y^{-k_s/k_{3-s}} + O(y^{-1-k_s/k_{3-s}}),$$

avec $C_1^{(3-s)}$, définie dans le théorème principal.

Démonstration. Notons que

$$\begin{aligned} g_s(u) &\stackrel{\text{def}}{=} u^{k_s/k_{3-s}} \left(p_s(u)\right)^{-1/k_{3-s}} \\ &= \left(1 + a_{k_1-1}^{(s)} \frac{1}{u} + \cdots + \frac{a_0^{(s)}}{u^{k_s}} \right)^{-1/k_{3-s}} = 1 + \sum_{j=1}^\infty \gamma_j^{(s)} \frac{1}{u^j}, \end{aligned}$$

(la dernière équation étant vraie pour u suffisamment grand). Alors, pour $u \geq 1$,

$$g_s(u) = 1 + \gamma_1^{(s)} \frac{1}{u} + O\left(\frac{1}{u^2} \right), \quad g'(u) = -\gamma_1^{(s)} \frac{1}{u^2} + O\left(\frac{1}{u^3} \right),$$

où

$$\gamma_1^{(s)} = -\frac{1}{k_{3-s}} a_{k_s-1}^{(s)}. \tag{4.7}$$

En utilisant l'intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
F_s(y) &= \int_1^y u^{-k_s/k_{3-s}} \, g_s(u)\, du \\
&= \frac{k_{3-s}}{k_{3-s}-k_s}\left(y^{1-k_s/k_{3-s}} g_s(y) - g_s(1)\right) - \frac{k_{3-s}}{k_{3-s}-k_s}\int_1^y u^{1-k_s/k_{3-s}} \, g_s'(u)\, du \\
&= \frac{k_{3-s}}{k_{3-s}-k_s} y^{1-k_s/k_{3-s}} \left(1 + \gamma_1^{(s)}\frac{1}{y} + O\Big(\frac{1}{y^2}\Big)\right) + C_1^{(3-s)} \\
&\quad - \frac{k_{3-s}}{k_{3-s}-k_s}\int_y^\infty \left(\gamma_1^{(s)} u^{-1-k_s/k_{3-s}} + O(u^{-2-k_s/k_{3-s}})\right) du \\
&= \frac{k_{3-s}}{k_{3-s}-k_s} y^{1-k_s/k_{3-s}} + C_1^{(3-s)} - \frac{k_{3-s}}{k_s}\gamma_1^{(s)}\, y^{-k_s/k_{3-s}} + O(y^{-1-k_s/k_{3-s}}),
\end{aligned}$$

ce qui est justement l'assertion du lemme 4, étant donné (2.1) et (4.7) □

Pour utiliser ce résultat dans (4.5), nous faisons encore appel au lemme 1 pour déduire que

$$\begin{aligned}
\big(q_s(T_s)\big)^{1-k_s/k_{3-s}} &= \left(T_s^{1/k_s} + b_0^{(s)} + O(T_s^{-1/k_s})\right)^{1-k_s/k_{3-s}} \\
&= T_s^{1/k_s-1/k_{3-s}} + b_0^{(s)}\left(1 - \frac{k_s}{k_{3-s}}\right) T_s^{-1/k_{3-s}} + O(T_s^{-1/k_s-1/k_{3-s}}),
\end{aligned}$$

et

$$-b_0^{(s)}\big(q_s(T_s)\big)^{-k_s/k_{3-s}} = -b_0^{(s)} T_s^{-1/k_{3-s}} + O(T_s^{-1/k_s-1/k_{3-s}}),$$

ainsi

$$F_s\big(q_s(T_s)\big) = \frac{k_{3-s}}{k_{3-s}-k_s} T_s^{1/k_s-1/k_{3-s}} + C_1^{(3-s)} + O(x^{-1/k_{3-s}}).$$

Nous insérons ce dernier résultat dans (4.5), et nous retournons à (4.4) et (4.1) pour obtenir

$$\begin{aligned}
H_s(x) = \frac{k_{3-s}}{k_{3-s}-k_s} x^{2/(k_1+k_2)} &+ C^{(3-s)} x^{1/k_{3-s}} \\
&+ b_0^{(3-s)} x^{1/(k_1+k_2)} - \psi(q_s(T_s)) q_{3-s}(T_{3-s}) + O(1). \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Considérant les derniers termes de (2.2), nous voyons facilement que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\big(q_1(T_1)) + q_2(T_2)\big) + \big[q_1(T_1)\big]\big[q_2(T_2)\big] \\
&\quad = x^{2/(k_1+k_2)} + (b_0^{(1)} + b_0^{(2)}) x^{1/(k_1+k_2)} - \sum_{s=1,2} \psi(q_s(T_s)) q_{3-s}(T_{3-s}) + O(1).
\end{aligned}$$

En combinant ceci avec (4.8) et (2.2), nous obtenons

$$D^*(x) = C^{(1)}\, x^{1/k_1} + C^{(2)}\, x^{1/k_2} - R_1(x) - R_2(x) + O(1).$$

Finalement avec (3.12) et (3.13), on obtient notre théorème.

English extended abstract. The classical Dirichlet divisor problem concerns the number of ways to write a positive integer n as a product of two natural numbers u_1, v_1. (for its history and the present "state of art", see the recent textbooks of Fricker [1] and Krätzel [7].)

It seems natural to consider variants of this problem where one or both of u_1, v_1 are subject to certain restrictions. For instance, the case that u_1, v_1 (or at least one of them) lie in a given arithmetic progression has been discussed at length in the recent litterature: see [10–13].

In this paper, we consider the situation that u_1, v_1 are values of given polynomials of degrees k_1, k_2 (with integer coefficients), corresponding to positive integer argument u, v. To be precise, let p_1, p_2 be two polynomials with integer coefficients,

$$p_s(t) = a_{k_s}^{(s)} t^{k_s} + \cdots + a_1^{(s)} t + a_0^{(s)}, \qquad (a_{k_s}^{(s)} \neq 0)$$

($s = 1$ or 2, throughout the paper), and suppose that the corresponding polynomial functions are positive and strictly monotonic increasing on $[0, \infty)$. Denote by $d^*(n)$ the number of ways to write the natural number n in the form $p_1(u)p_2(v)$ with positive integer u, v, *i.e.*

$$d^*(n) = d^*_{p_1,p_2}(n) = \#\{(u,v) \in N^2 : p_1(u)p_2(v) = n\}.$$

In this article we study the "average order" of this arithmetic function $d^*(n)$, *i.e.* we consider the summatory function

$$D^*(x) = \sum_{n \leq x} d^*(n),$$

where x is a large real variable. It is clear that $D^*(x)$ is the number of lattice points (of the standard lattice Z^2) in the planar domain

$$\{(u,v) \in R^2 : u > 0, v > 0, p_1(u)p_2(v) \leq x\}.$$

(for enlightening surveys of this theory of lattice points in large domains, the reader is referred again to the textbooks [1, 7]. In these monographs one can also find the definitions of the order symbols O, o, $\ll$ and $\asymp$ which are used in the sequel.) We note that from this purely geometric viewpoint, one can drop the requirement that the coefficients $a_l^{(s)}$ be integers. Doing so, it obviously is no loss of generality to assume that

$$a_{k_1}^{(1)} = a_{k_2}^{(2)} = 1,$$

as we shall do in what follows.

In Part I of this work [8], we have considered the special case that $k_1 = k_2 (=: k)$. We obtained the result

$$D^*(x) = x^{1/k} \log(x^{1/k}) - Cx^{1/k} + O\left(x^{7/22k} (\log x)^{67/22}\right), \tag{1.1}$$

with an effective constant C.

This estimate generalizes (without loss of accuracy) the present "record" for the classic Dirichlet divisor problem (see Iwaniec and Mozzochi [6], Huxley [3], and Müller and Nowak [9]).

In this paper, we therefore suppose that $k_1 \neq k_2$, and thus, w.l.o.g., that

$$1 \leq k_1 < k_2. \tag{1.2}$$

Our objective is a proof of the following asymptotic result.

Theorem. *For $x \to \infty$, fixed k_1, k_2 satisfying* (1.2), *and fixed coefficients $a_l^{(s)}$ ($s = 1$,2, $l = 0, \ldots, k_s - 1$), we have*

$$D^*(x) = C^{(1)} x^{1/k_1} + C^{(2)} x^{1/k_2} + E(x)$$

où

$$C^{(s)} = \frac{1}{2}\left(p_{3-s}(1)\right)^{-1/k_s} + C_0^{(s)} + C_1^{(s)},$$

$$C_0^{(s)} = -\frac{1}{k_s}\int_1^\infty \psi(w)\frac{p'_{3-s}(w)}{\left(p_{3-s}(w)\right)^{1+1/k_s}}\,dw,$$

$$C_1^{(s)} = \frac{k_s}{k_{3-s}-k_s}\left(\left(p_{3-s}(1)\right)^{-1/k_s} - \int_1^\infty w^{1-k_{3-s}/k_s}\frac{d}{dw}\left(w^{k_{3-s}/k_s}\left(p_{3-s}(w)\right)^{-1/k_s}\right)dw\right)$$

($s = 1$, 2, $\psi(w) = w - [w] - \frac{1}{2}$ throughout), and the error term $E(x)$ can be estimated as follows: for any (one-dimensional) exponent pair (α, β), put

$$\Theta_1(k_1,k_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{7}{22}\frac{1}{k_1} - \frac{7}{22}\gamma(k_1,k_2)\left(\frac{k_2}{k_1} - 1\right), \tag{1.3}$$

with

$$\gamma(k_1,k_2) \stackrel{\text{def}}{=} \left(k_2 - k_1 + \frac{k_1(\beta-\alpha)}{\frac{7}{22} - \frac{15}{22}\alpha}\right)^{-1}, \tag{1.4}$$

$$\Theta_2(k_1,k_2) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left\{\frac{\alpha+\beta}{\alpha+1}\frac{1}{k_1+k_2}, \frac{\alpha}{\alpha k_2 + k_1(1+\alpha-\beta)}\right\}, \tag{1.5}$$

and

$$\Theta(k_1,k_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Theta_1(k_1,k_2) & \text{if } 4\alpha + 11\beta \geq 7 \text{ and } \frac{\beta}{\alpha} \geq \frac{k_2}{k_1} \\ \Theta_2(k_1,k_2) & \text{else.} \end{cases}$$

Then

$$E(x) \ll x^{\Theta(k_1,k_2)+\varepsilon}$$

for every $\varepsilon > 0$, where the $\ll$-constant may depend on ε, the polynomials p_1, p_2 and the exponent pair (α, β).

To obtain good numerical values for $\Theta(k_1, k_2)$, we may look for an advantageous choice of (α, β) by straightforward computer calculations starting from the exponent pair[2] $(89/560, 369/560)$ (which was discovered recently by N. Watt [14],refining previous joint work with M. Huxley [4]) and applying the usual A- and B-processes (see Krätzel [7,p. 52 f]).

Remarks.

(1) This estimate is based on quite a modern technique for the estimation of exponential sums, the so called "Discrete Hardy-Littlewood Method": see Iwaniec

[2] We ignore the ε's in any exponent pairs, since the exponent of x in the final estimate for $E(x)$ contains an ε anyway.

and Mozzochi [6], Huxley [3], Huxley and Watt [4], Watt [14] and W. Müller and Nowak [9].

The "new method" (for quite a number of problems in number theory) not only leads to somewhat sharper results, but also considerably simplifies the treatment: this very fact provides some motivation for itself to deal with our present topic just nowadays. Although Dirichlet already could have established our Theorem with the elementary error term $O(x^{1/(k_1+k_2)})$, most of the methods developed in the last decades in order to improve the estimates in the classical divisor problems were technically too involved to permit an ("easy") extension to our general situation.

(2) For certain values of k_1, k_2, our Theorem sharpens the known results on the special case $p_1(u) = u^{k_1}$, $p_2(v) = v^{k_2}$ which is discussed in detail in Krätzel's book [7]. It was observed already by Krätzel and Menzer (personnal communications, for which the second named author wants to express his sincere gratitude) that the new approach can be employed to refine the estimates in this special case.

(3) Further slight improvements of the exponent in the error term are certainly possible: On the one hand, this could be achieved by a still more favorable choice of the exponent pair involved, using *e.g.*, an algorithm developed by Graham [2]. On the other hand, one could apply more sophisticated version of the "Discrete Hardy-Littlewood Method", as presented, *e,g.*, in Huxley and Watt [5], or genuine two-dimensional estimates for exponentional sums (*cf.* again the textbook [7]).

BIBLIOGRAPHIE

1. F. Fricker, *Einführung in die Gitterpunktlehre*, Birkhäuser, Basel-Boston-Stuttgart, 1982.
2. S. W. Graham, *An algorithm for computing optimal exponent pairs*, J. London Math. Soc. (3) **33** (1986), 203–218.
3. M. N. Huxley, *Exponential sums and lattice points*, Proc. London Math. Soc. (3) **60** (1990), 471-502.
4. M. N. Huxley et N. Watt, *Exponential sums and the Riemann zeta-function,*, J. London Math. Soc. (3) **57** (1988), 1–24.
5. ———, *Exponential sums with a parameter*, Proc. London Math. Soc. (3) **59** (1989), 233-252.
6. H. Iwaniec et C. J. Mozzochi, *On the divisor and circle problems*, J. Number Theory **29** (1988), 60-93.
7. E. Krätzel, *Lattice points*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London, 1988.
8. A. Mercier et W. G. Nowak, *A divisor problem for values of polynomials*, Canad. Math. Bull., (à paraître).
9. W. Müller et W. G. Nowak, *Lattice points in planar domains: Applications of Huxley's "Discrete Hardy-Littlewood method"*, Number theoretic analysis, Seminar Vienna 1988-89 (E. Hlawka et R. F. Tichy, eds.), Springer Lecture Notes n° 1452, 1990, pp. 139-164.
10. W. G. Nowak, *On a result of Smith and Subbarao concerning a divisor problem*, Canad. Math. Bull. **27** (1984), 501-504.
11. ———, *On a divisor problem in arithmetic progressions*, J. Number Theory **31** (1989), 174-182.
12. R. A. Smith et M. V. Subbarao, *The average number of divisors in an arithmetic progression*, Canad. Math. Bull. **24** (1981), 37-41.
13. P. D. Varbanec et P. Zarzycki, *Divisors of integers in arithmetic progressions*, Canad. Math. Bull. **33** (1990), 129-134.
14. N. Watt, *Exponential sums and the Riemann zeta-function* II, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), 385-404.

Armel Mercier
Département de mathématiques
Université du Québec à Chicoutimi
555 boul. Université
Chicoutimi (Québec) CANADA G7H 2B1

Werner Georg Nowak
Institut für Mathematik
Universität für Bodenkultur
Gregor Mendel-Strasse 33
A-1180 Wien, AUSTRIA