

GÉNÉRALISATIONS DE LA FORMULE D'OTTER

PIERRE LEROUX ET BRAHIM MILOUDI

RÉSUMÉ. R. W. Robinson a montré que la formule d'Otter pour le dénombrement des types d'isomorphie d'arbres, peut être déduite d'une identité entre séries indicatrices. Nous montrons qu'en fait elle provient d'un isomorphisme naturel entre espèces de structures, à savoir $A + E_2(A) = a + A^2$, où a , A et $E_2(A)$ dénotent respectivement les espèces des arbres, arborescences et paires d'arborescences. Sous cette forme, la formule peut être adaptée et généralisée à diverses classes d'arbres et de graphes. Nous traitons par exemple des arbres R -enrichis, incluant les arbres plans ou homéomorphiquement irréductibles, les arbres asymétriques, orientés, signés, avec les feuilles comme ensemble distingué, *etc.*, ainsi que les graphes connexes dont les blocs sont choisis dans un ensemble fixé à l'avance.

ABSTRACT. R. W. Robinson has shown that Otter's formula for the enumeration of unlabelled trees can be deduced from an identity between cycle index series. We show that in fact it can be stated as a natural isomorphism between species of structures, namely $A + E_2(A) = a + A^2$, where a , A , and $E_2(A)$ denote respectively the species of (labelled) trees, rooted trees and unordered pairs of rooted trees. In this form, the formula can be adapted and extended to various classes of trees and graphs. We consider for example trees that are R -enriched, including plane or homeomorphically irreducible trees, asymmetric, oriented, signed, with leaves forming a distinguished set, *etc.*, as well as connected graphs whose blocks are taken from a given set. See the English extended abstract at the end of the paper.

0. Introduction. Nous devons à Otter [Ot] d'avoir résolu en 1948 le problème du dénombrement des types d'isomorphie d'arbres, grâce à sa célèbre formule reliant entre elles les séries génératrices $t(x)$ et $T(x)$ des types d'arbres et d'arborescences, respectivement :

$$t(x) = T(x) + \frac{1}{2}(T(x^2) - T^2(x)). \tag{0.1}$$

Pólya [P6, P6R] avait auparavant, en 1937, montré que les types d'arborescences pouvaient être dénombrés récursivement à l'aide de la relation

$$T(x) = x \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{T(x^k)}{k}\right), \tag{0.2}$$

équivalente à la formule

$$T(x) = x \prod_{m \geq 1} (1 - x^m)^{-T_m} \tag{0.3}$$

Reçu le 25 avril 1991 et, sous forme définitive, le 19 juillet 1991.

Avec l'aide financière du CRSNG (Canada) et du FCAR (Québec).

due à Cayley [Ca], où T_m dénote le nombre de types d'arborescences d'ordre m , *i.e.*

$$T(x) = \sum_{m \geq 1} T_m x^m. \quad (0.4)$$

Les premiers termes de ces séries sont

$$T(x) = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 20x^6 + 48x^7 + 115x^8 + 286x^9 + 719x^{10} \\ + 1842x^{11} + 4766x^{12} + 12486x^{13} + 32973x^{14} + 87811x^{15} + \dots \quad (0.5)$$

$$t(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 11x^7 + 23x^8 + 47x^9 + 106x^{10} \\ + 235x^{11} + 551x^{12} + 1301x^{13} + 3159x^{14} + 7741x^{15} + \dots \quad (0.6)$$

Les formules (0.1) et (0.2) possèdent des analogues au niveau des séries génératrices exponentielles

$$A(x) = \sum_{n \geq 1} A_n \frac{x^n}{n!}, \quad a(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{n} \quad (0.7)$$

des espèces des arborescences et des arbres, respectivement, à savoir

$$a(x) = A(x) - \frac{A^2(x)}{2}, \quad (0.8)$$

$$A(x) = x \exp(A(x)). \quad (0.9)$$

Cette dernière permet d'établir, avec l'aide de l'inversion de Lagrange, les célèbres formules de Cayley

$$A_n = n^{n-1}, \quad a_n = n^{n-2} \quad (0.10)$$

donnant le nombre d'arborescences et d'arbres sur un ensemble de n sommets (dénombrément étiqueté). La formule (0.8) quant à elle est équivalente à la relation bien connue [Mo]

$$2(n-1)n^{n-2} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1} (n-k)^{n-k-1}.$$

Une première explication de cette analogie provient des identités données par R. W. Robinson [Ro], véritable précurseur, avec N. G. de Bruijn [dB], de la théorie des espèces de structures, pour les séries indicatrices de cycles Z_a et Z_A des arbres et arborescences :

$$Z_a(x_1, x_2, \dots) = Z_A(x_1, x_2, \dots) + \frac{1}{2} (Z_A(x_2, x_4, \dots) - Z_A^2(x_1, x_2, \dots)) \quad (0.11)$$

$$Z_A(x_1, x_2, \dots) = x_1 \exp \left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} Z_A(x_k, x_{2k}, \dots) \right) \quad (0.12)$$

En effet, on retrouve (0.1) et (0.2) en posant $x_k \mapsto x^k$, comme il est d'usage pour passer aux séries génératrices des types (ici $\tilde{a}(x) = t(x)$ et $\tilde{A}(x) = T(x)$). De même les

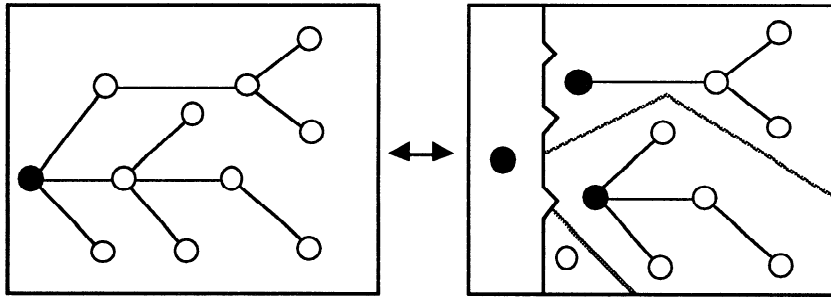


FIGURE 1

substitutions $x_1 \mapsto x, x_k \mapsto 0$ si $k > 1$, dans (0.11) et (0.12) redonnent les formules (0.8) et (0.9) pour le dénombrement étiqueté.

Mais en fait ces formules peuvent être relevées au niveau des espèces de structures elles-mêmes, sous forme d'isomorphismes naturels d'espèces :

$$A + E_2(A) = a + A^2 \tag{0.13}$$

$$A = XE(A) \tag{0.14}$$

où E et E_2 désignent respectivement les espèces «ensembles» et «ensembles à deux éléments». Ce relèvement au niveau des espèces de structures comporte de nombreux avantages en plus de la compacité et de l'élégance des identités :

- Les démonstrations sont souvent plus simples. Par exemple la relation (0.14) exprime le fait qu'une arborescence est constituée d'un sommet, la racine, auquel est attachée une assemblée d'arborescences (voir la figure 1).
- Ces identités sont plus générales : le passage aux différentes séries génératrices et indicatrices (en particulier (0.11) et (0.12)) est automatique, selon la méthodologie des espèces de structures [Jo1]. En plus des séries habituelles déjà vues plus haut, mentionnons la série indicatrice d'asymétrie Γ_F d'une espèce F récemment introduite par G. Labelle [Lag4, Lag5, Lag6] en vue du dénombrement des F -structures asymétriques, c'est-à-dire dont le groupe d'automorphismes est réduit à l'identité.
- Ces identités suggèrent des extensions à diverses familles d'arbres, d'arborescences et de graphes, par exemple aux arbres et arborescences R -enrichies, comme l'a observé G. Labelle, inventeur de ces espèces de structures (Lag1).

Ainsi la formule (0.13), qui peut être réécrite sous la forme

$$a = A + E_2(A) - A^2 \tag{0.15}$$

apparaît comme fondamentale et nous y référerons par la suite sous le nom de *théorème de dissymétrie pour les arbres*. Le but de cet article est donc, après avoir présenté une démonstration de ce théorème, reprise de [Le], de montrer comment cette méthodologie peut être appliquée au dénombrement d'une grande variété d'arbres et d'arborescences (orientés, signés, plans, irréductibles, R -enrichis, asymétriques, avec feuilles, etc.) et

de graphes dont les blocs, c'est-à-dire les composantes 2-connexes maximales, sont déterminés à l'avance, par exemple les cactus triangulaires. Le lecteur pourra comparer cette présentation avec l'approche traditionnelle fondée sur le théorème d'énumération de G. Pólya [Pó] et les travaux de R. W. Robinson [Ro, HnR] et que l'on retrouve en détail dans le livre de F. Harary et E. Palmer sur le dénombrement des graphes [HrPa], en particulier le chapitre 3 qui porte sur les arbres et arborescences et le chapitre 8 sur les blocs.

Nous avons calculé, à l'aide du logiciel de calcul formel Darwin, spécialisé dans les espèces de structures et leurs séries associées [BeC, C], les 15 premiers termes des séries génératrices de quelques exemples.

1. Le théorème de dissymétrie pour les arbres. Notre premier objectif est donc de démontrer le *théorème de dissymétrie pour les arbres*, dont plusieurs variantes seront présentées plus loin. La démonstration, dont l'idée remonte à R. Z. Norman [No], s'appuie sur le concept de centre d'un arbre, c'est-à-dire le sous-graphe engendré par les points d'excentricité minimum. Ici l'excentricité d'un sommet est définie comme étant la distance maximum de ce sommet à tout autre sommet de l'arbre. Le centre d'un arbre est toujours constitué d'un point unique ou d'une paire de points reliés par une arête. Une façon de l'obtenir est d'émonder progressivement ses feuilles (sommets de degré 1). Un concept différent de centre, le centre de masse, où l'excentricité d'un sommet est définie comme le cardinal (nombre de sommets) maximum d'une branche issue de ce sommet, conduit également à une démonstration valide (cf. [Ni]). L'important est que le concept soit canonique, c'est-à-dire préservé par les isomorphismes.

Théorème 1.1 (de dissymétrie pour les arbres) [Ro, Le]. *Les espèces de structures a des arbres et A des arborescences sont reliées par l'isomorphisme naturel*

$$A + E_2(A) = a + A^2 \quad (1.1)$$

où E_2 dénote l'espèce des ensembles de cardinalité 2.

Démonstration. Le premier membre de (1.1) représente les arbres qui sont pointés soit en un sommet (le terme $A = a^\bullet$) soit en une arête, les structures obtenues dans ce cas pouvant être identifiées à des paires d'arborescences, attachées aux extrémités de l'arête distinguée, d'où le terme $E_2(A)$.

Dans le second membre, le terme a peut être identifié aux arbres qui ont été pointés de manière canonique, en leur centre, que ce soit un sommet ou une arête. Il reste donc à trouver un isomorphisme naturel entre l'espèce des arbres pointés en un sommet ou en une arête, distincts du centre, et les couples ordonnés (gauche, droite) d'arborescences, représentés par A^2 .

1^{er} cas : L'arbre est pointé en un sommet s , distinct du centre. Soit p le sommet adjacent à s , en direction du centre (si le centre est une arête à laquelle s appartient, soit p l'autre sommet de cette arête). En coupant l'arête joignant s et p , on obtient deux arborescences, une de racine s , que l'on place à gauche, et l'autre de racine p , à droite, et donc une A^2 -structure. Voir la figure 2.

2^e cas : L'arbre est pointé en une arête, distincte du centre. Dans ce cas soit p le sommet de l'arête distinguée situé du côté du centre. Alors on découpe l'arête distinguée et on place à gauche l'arborescence de racine p et à droite, l'autre partie. Voir la figure 3.

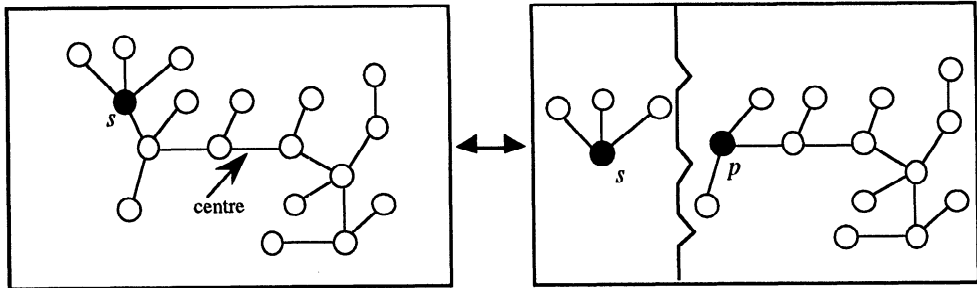


FIGURE 2

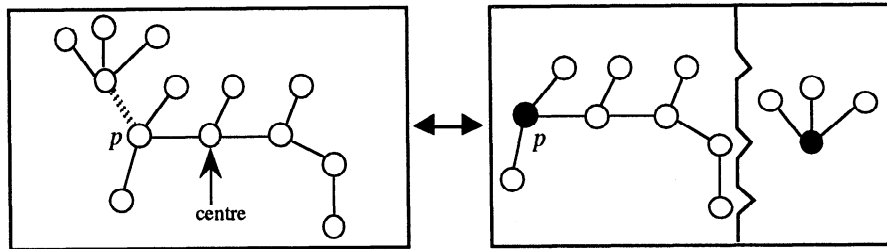


FIGURE 3

Pour faire le chemin inverse, étant donnée une A^2 -structure, on joint par une arête les deux racines des arborescences et on identifie le centre de l'arbre ainsi obtenu. Si le centre provient de l'arborescence droite (ou si le centre est précisément l'arête ajoutée) alors on est dans le 1^{er} cas et on distingue la racine de l'arborescence gauche. Si le centre provient de l'arborescence gauche, alors on est dans le 2^e cas et on distingue l'arête ajoutée. Finalement, il est évident que cette bijection est un isomorphisme naturel d'espèces, c'est-à-dire qui commute avec les transports de structures. \square

En fait, dans le contexte des espèces virtuelles [Jo2, Jo3, Lag3, Ye], on peut réécrire le théorème de dissymétrie sous la forme

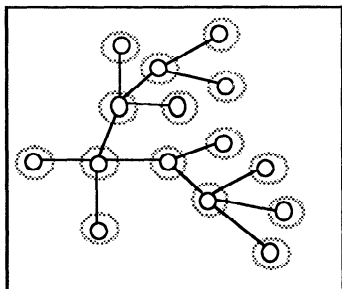
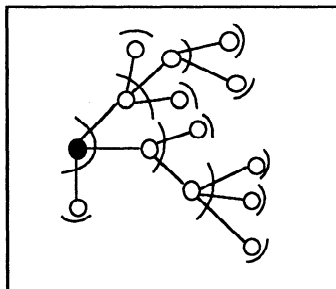
$$a = A + E_2(A) - A^2 = (X + E_2 - X^2) \circ A \tag{1.2}$$

Le passage, automatique, aux séries indicatrices de cycles donne alors, sachant que $Z_{E_2}(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$,

$$\begin{aligned} Z_a(x_1, x_2, \dots) &= \left(x_1 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2) - x_1^2 \right) \circ Z_A(x_1, x_2, \dots) \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_1^2) \right) \circ Z_A(x_1, x_2, \dots), \end{aligned} \tag{1.3}$$

formule équivalente à (0.11). Notons que cette identité permet d'exprimer les coefficients $|\text{Fix } a[\sigma]|$ de la série indicatrice Z_a , donnant le nombre d'arbres laissés fixes par une permutation σ , en termes de ceux de Z_A . Posons pour simplifier l'écriture,

$$a_\sigma = |\text{Fix } a[\sigma]|, \quad A_\sigma = |\text{Fix } A[\sigma]|$$

FIGURE 4. Un arbre R -enrichi.FIGURE 5. Une arborescence R -enrichie.

et $\sigma_j =$ nombre de cycles de longueur j de σ . On trouve alors, compte-tenu de l'équation $A = a^\bullet = X a'$, cf. [CoL2, Lag5].

$$a_\sigma = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_1} A_\sigma & \text{si } \sigma_1 > 0 \\ \frac{1}{2} 2^{\sigma_2 + \sigma_4 + \dots} A_{(\sigma_2, \sigma_4, \dots)} & \text{si } \sigma_1 = \sigma_3 = \dots = 0 \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases} \quad (1.4)$$

Rappelons que les coefficients A_σ ont été calculés explicitement par G. Labelle [Lag2] à partir de (0.12) et de l'inversion de Lagrange multidimensionnelle; voir également [CoL1] pour une preuve combinatoire directe :

$$A_\sigma = \sigma_1^{\sigma_1 - 1} \prod_{k \geq 2} \left(\sum_{d|k} d \sigma_d \right)^{\sigma_k - 1} \sum_{\substack{d|k \\ d \neq k}} d \sigma_d \quad (1.5)$$

où on a supposé que $\sigma_1 \neq 0$. Évidemment $A_\sigma = 0$ si $\sigma_1 = 0$.

2. Arbres et arborescences enrichis. Soit R une espèce de structure donnée. Les concepts d'arbres et d'arborescences R -enrichis, introduits par G. Labelle [Lag1], sont définis de la façon suivante : un arbre R -enrichi est un arbre dans lequel l'ensemble des sommets voisins est muni d'une R -structure.

La figure 4, où les cercles représentent les R -structures sur les voisins de chaque sommet illustre ce concept. Notons a_R , l'espèce des arbres R -enrichis. Notre but ici est de montrer comment on peut énumérer, en général, les types d'arbres R -enrichis. Deux exemples seront traités plus en détail par la suite, soit les arbres plans (*i.e.* plongés dans le plan), où $R = 1 + C$ est l'espèce des permutations circulaires, et les arbres homéomorphiquement irréductibles, ou arbres topologiques, où les sommets de degré 2 sont exclus, *i.e.* $R = E_{\neq 2}$, l'espèce des ensembles de cardinalités différentes de 2.

Dans une arborescence on peut considérer que les arêtes sont toutes orientées en direction de la racine. La fibre d'un sommet est alors l'ensemble des prédécesseurs de ce sommet. Une arborescence R -enrichie est une arborescence dans laquelle la fibre de chaque sommet (même si elle est vide) est munie d'une R -structure. Voir la figure 5, où

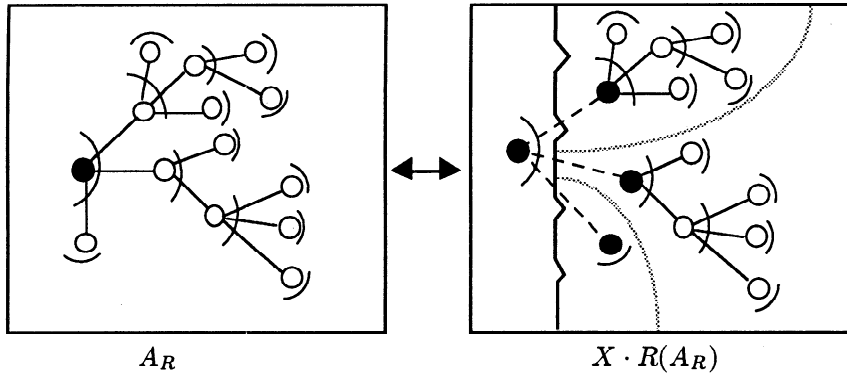


FIGURE 6

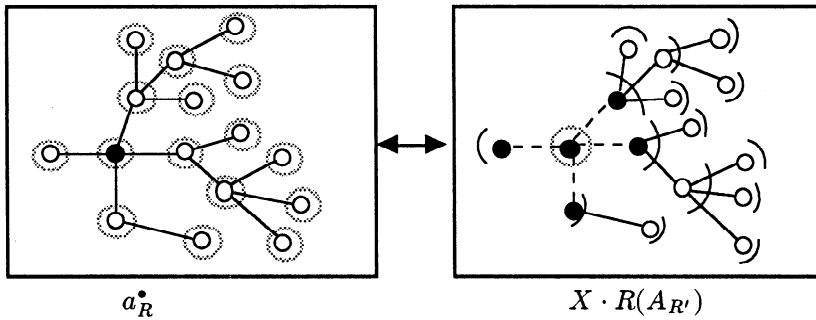


FIGURE 7

cette fois les R -structures sont représentées par des arcs de cercles. L'espèce des arborescences R -enrichies est notée A_R . Elle satisfait évidemment l'équation fonctionnelle

$$A_R = X R(A_R) \tag{2.1}$$

comme le montre la figure 6.

Notons que $a_R^\bullet \neq A_R$, en général, et que pour l'étude de a_R^\bullet ainsi que de $a_R^{\bullet\bullet}$, l'espèce des arbres R -enrichis avec une arête distinguée, ce sont plutôt les arborescences R' -enrichies qu'il faut considérer. En effet, on a les identités suivantes [Lag1, Lag5] (voir les figures 7 et 8, où les arcs de cercles représentent des R' -structures) :

$$a_R^\bullet = X R(A_{R'}), \quad a_R^{\bullet\bullet} = E_2(A_{R'}). \tag{2.2}$$

Compte-tenu de ces observations, le théorème de dissymétrie prend la forme suivante et sa démonstration demeure essentiellement la même.

Théorème (de dissymétrie pour les arbres R -enrichis [Lag5]). *Étant donnée une espèce R telle que $R'(0) \neq 0$, alors*

$$a_R = X R(A_{R'}) + E_2(A_{R'}) - A_{R'}^2. \tag{2.3}$$

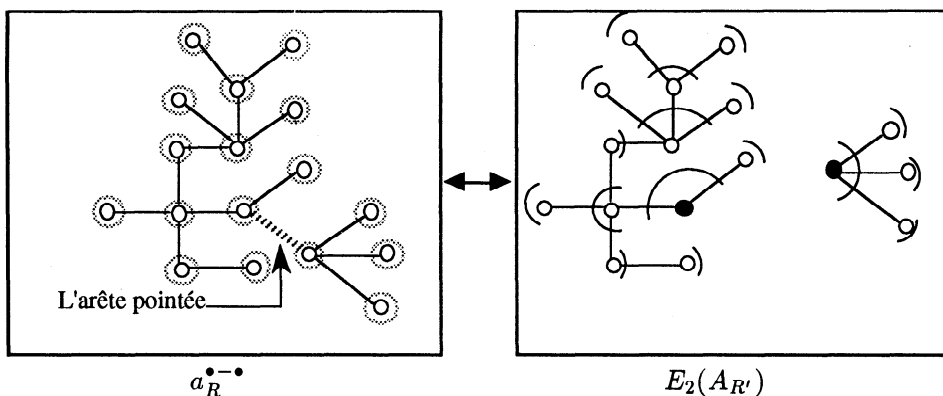


FIGURE 8

Jumelée à l'équation $A_{R'} = XR'(A_{R'})$ ce théorème permet le calcul de toutes les séries génératrices ou indicatrices associées à a_R (cf. [Lag5, Lag6]). On trouve, par exemple, pour les types de structures, les équations

$$\tilde{A}_{R'}(x) = xZ_{R'}(\tilde{A}_{R'}(x), \tilde{A}_{R'}(x^2), \dots) \quad (2.4)$$

$$\tilde{a}_R(x) = xZ_R(\tilde{A}_{R'}(x), \tilde{A}_{R'}(x^2), \dots) + \frac{1}{2}(\tilde{A}_{R'}(x^2) - \tilde{A}_{R'}^2(x)). \quad (2.5)$$

Exemple 1. Désignons par h l'espèce des arbres homéomorphiquement irréductibles, c'est-à-dire sans sommet de degré 2. Il s'agit donc des arbres R -enrichis, avec $R = E_{\neq 2} = E - E_2$. Soit $H = A_{R'}$, où $R' = E_{\neq 1} = E - X$, l'espèce des arborescences R' -enrichis, c'est-à-dire sans fibres de cardinalité 1. L'équation (2.3) donne alors

$$h = XE_{\neq 2}(H) + E_2(H) - H^2. \quad (2.6)$$

De plus on peut regrouper, dans toute arborescence, les chaînes de sommets dont les fibres sont de cardinalité 1 (voir Fig. 9), de sorte que l'on a l'identité

$$A = H\left(\frac{X}{1-X}\right). \quad (2.7)$$

On en déduit l'équation

$$H = A\left(\frac{X}{1+X}\right). \quad (2.8)$$

et, tenant compte de l'observation que $XE_{\neq 2}(H) = h^* = H + XH - XE_2(H)$ et de (1.2), l'expression [Lag5]

$$h = a\left(\frac{X}{1+X}\right) + XA\left(\frac{X}{1+X}\right) - XE_2\left(A\left(\frac{X}{1-X}\right)\right). \quad (2.10)$$

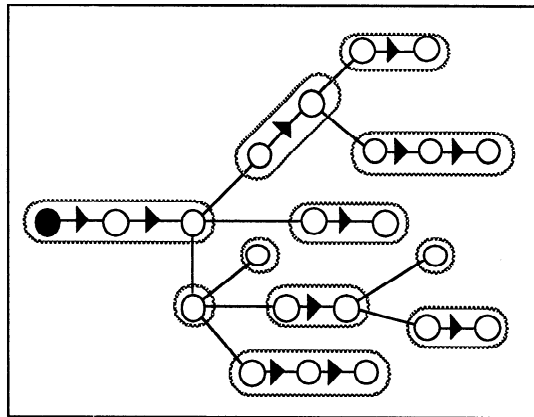


FIGURE 9

On trouve, après calculs (voir également [MeM] ou [Mo, p. 78], pour une formule explicite),

$$\begin{aligned}
 h(x) = & x + \frac{x^2}{2!} + 4\frac{x^4}{4!} + 5\frac{x^5}{5!} + 96\frac{x^6}{6!} + 427\frac{x^7}{7!} + 6448\frac{x^8}{8!} + 56961\frac{x^9}{9!} \\
 & + 892720\frac{x^{10}}{10!} + 11905091\frac{x^{11}}{11!} + 211153944\frac{x^{12}}{12!} + 3692964145\frac{x^{13}}{13!} \\
 & + 75701219608\frac{x^{14}}{14!} + 1613086090995\frac{x^{15}}{15!} + \dots \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

et, (cf. [HrPa, p. 62], [HrPr])

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}(x) = & x + x^2 + x^4 + x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 4x^8 + 5x^9 + 10x^{10} \\
 & + 14x^{11} + 26x^{12} + 42x^{13} + 78x^{14} + 132x^{15} + \dots \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Exemple 2. Désignons par p , l'espèce des arbres plans, c'est-à-dire des arbres plongés topologiquement dans le plan. Après avoir choisi une orientation du plan, on voit que l'ensemble des voisins de tout sommet d'un arbre plan est muni d'une structure de permutation circulaire et que ceci caractérise le plongement de l'arbre dans le plan. En d'autres termes, on a $p = A_R$ avec $R = 1 + C$, où C dénote l'espèce des permutations circulaires. Notons qu'alors $R' = L$, l'espèce des ordres linéaires, et rappelons que les séries indicatrices de ces espèces sont données par

$$Z_C(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{n} \log \frac{1}{1 - x_n} \quad (2.13)$$

$$Z_L(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{1 - x_1} \quad (2.14)$$

Désignons par P l'espèce des arborescences ordonnées (appelées parfois abusivement arbres planaires), qui satisfait l'équation fonctionnelle

$$P = XL(P) \quad (2.15)$$

Ces structures sont asymétriques (*i.e.* le groupe d'automorphisme de toute arborescence ordonnée est réduit à l'identité) et on déduit de (2.15) que la série $y = P(x) = \tilde{P}(x)$ satisfait l'équation quadratique $y^2 - y + x = 0$ d'où l'on tire

$$P(x) = \tilde{P}(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n. \quad (2.16)$$

Par ailleurs le théorème de dissymétrie donne l'identité

$$p = X + XC(P) + E_2(P) - P^2 \quad (2.17)$$

dont on déduit

$$p(x) = x + x \log \frac{1}{1 - P(x)} - \frac{1}{2} P^2(x) \quad (2.18)$$

$$\tilde{p}(x) = x + x \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{n} \log \frac{1}{1 - \tilde{P}(x^n)} + \frac{1}{2} (\tilde{P}(x^2) - \tilde{P}^2(x)) \quad (2.19)$$

et, après calculs

$$\begin{aligned} p(x) = x &+ \frac{x^2}{2!} + 3 \frac{x^3}{3!} + 20 \frac{x^4}{4!} + 210 \frac{x^5}{5!} + 3024 \frac{x^6}{6!} + 55440 \frac{x^7}{7!} + 1235520 \frac{x^8}{8!} \\ &+ 32432400 \frac{x^9}{9!} + 980179200 \frac{x^{10}}{10!} + 33522128640 \frac{x^{11}}{11!} \\ &+ 1279935820800 \frac{x^{12}}{12!} + 53970627110400 \frac{x^{13}}{13!} \\ &+ 2490952020480000 \frac{x^{14}}{14!} + 124903451312640000 \frac{x^{15}}{15!} + \dots \quad (2.20) \end{aligned}$$

ainsi que (*cf.* [HrPa, p. 62] et [HrPr])

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x) = x &+ x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 14x^7 + 34x^8 + 95x^9 + 280x^{10} \\ &+ 854x^{11} + 2694x^{12} + 8714x^{13} + 28640x^{14} + 95640x^{15} + \dots \quad (2.21) \end{aligned}$$

3. Arbres orientés, mixtes, signés et marqués. Dans cette section nous étudions quatre familles d'arbres et d'arborescences qui n'entrent pas dans le contexte des arbres R -enrichis et où des variantes du théorème de dissymétrie sont utilisées. Seront traités dans l'ordre, les arbres et arborescences orientés, mixtes, signés et marqués (*cf.* [HrPr]).

3.1 Arbres orientés. Un arbre orienté est un arbre dans lequel chaque arête pq est munie d'une des deux orientations \overrightarrow{pq} ou \overleftarrow{pq} . Désignons par o , l'espèce des arbres orientés et par $O = o^\bullet$, l'espèce des arborescences orientées. On a évidemment l'équation fonctionnelle (*cf.* Fig. 10)

$$O = XE^2(O) \quad (3.1)$$

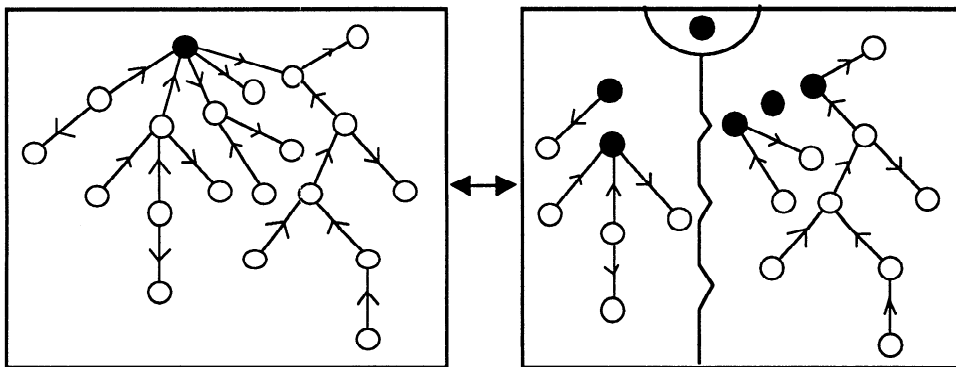


FIGURE 10

de laquelle on déduit

$$O(x) = x \exp(2O(x)) \tag{3.2}$$

$$\tilde{O}(x) = x \exp\left(2 \sum_{k \geq 1} \frac{\tilde{O}(x^k)}{k}\right). \tag{3.3}$$

Le dénombrement étiqueté de ces structures est assez simple. En effet, à partir de (3.2) ou encore par un raisonnement direct, puisque chacune des $n - 1$ arêtes peut être orientée de deux façons différentes, on voit que

$$|O[n]| = (2n)^{n-1} \quad \text{et} \quad |o[n]| = 2(2n)^{n-2}. \tag{3.4}$$

Par ailleurs, de (3.3) on tire, après calculs,

$$\begin{aligned} \tilde{O}(x) = & x + 2x^2 + 7x^3 + 26x^4 + 107x^5 + 458x^6 + 2058x^7 + 9498x^8 + 44947x^9 \\ & + 216598x^{10} + 1059952x^{11} + 5251806x^{12} + 26297238x^{13} \\ & + 132856766x^{14} + 676398395x^{15} + \dots \end{aligned} \tag{3.5}$$

Pour les arbres orientés, le théorème de dissymétrie prend une forme particulièrement simple :

Proposition 3.1. *Les espèces o et O des arbres orientés et des arborescences orientées, respectivement, sont liées par la relation*

$$O = o + O^2. \tag{3.6}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que l'espèce O^2 peut être identifiée à celle des arbres orientés dont une arête (orientée) a été distinguée. Redéfinissons ensuite le centre d'un arbre orienté comme étant le sommet s qui est soit le centre de l'arbre sous-jacent si c'est un sommet, soit, si c'est une arête, l'origine de cette arête orientée.

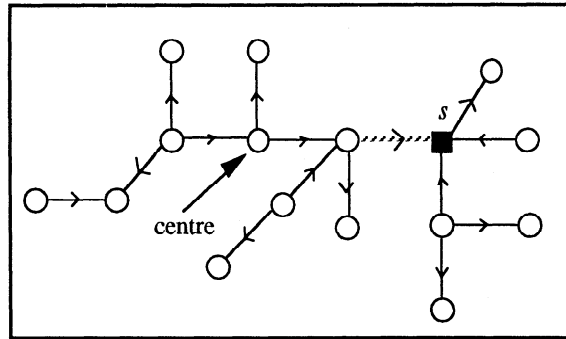


FIGURE 11



FIGURE 12

Pour démontrer (3.6), considérons une arborescence orientée, de racine s . Si ce point distingué est le centre, on obtient une o -structure tout simplement. Sinon on distingue l'arête issue de s et menant au centre de l'arbre orienté, ce qui donne, comme on l'a dit, une O^2 -structure (voir la figure 11). Il est facile de se convaincre que cette correspondance est inversible et naturelle. \square

De (3.6) on déduit immédiatement

$$\tilde{o}(x) = \tilde{O}(x) - \tilde{O}^2(x) \quad (3.7)$$

et, après calculs

$$\begin{aligned} \tilde{o}(x) = & x + x^2 + 3x^3 + 8x^4 + 27x^5 + 91x^6 + 350x^7 + 1376x^8 \\ & + 5743x^9 + 24635x^{10} + 108968x^{11} + 492180x^{12} \\ & + 2266502x^{13} + 10598452x^{14} + 50235931x^{15} + \dots \quad (3.8) \end{aligned}$$

3.2 Arbres mixtes. Une variante des arbres orientés est obtenue en considérant, comme dans les graphes orientés, qu'une arête peut donner lieu à un arc dans une des deux directions ou encore à deux arcs dans des directions opposées que l'on remplacera ici par une arête (voir figure 12). Appelons arbres *mixtes* ou *dirigés* («directed» dans [HrPa]) ces arbres où chaque arête donne lieu à trois orientations possibles et désignons par d cette espèce d'arbres et par $D = d^*$, l'espèce des arborescences mixtes. On a immédiatement

$$D = XE^3(D) \quad (3.9)$$

et en réunissant les démonstrations des théorèmes de dissymétrie pour les arbres et pour les arbres orientés on obtient le résultat mixte suivant. Les détails sont laissés au lecteur.

Proposition 3.2. *Les espèces d et D des arbres mixtes et des arborescences mixtes respectivement sont liées par la relation*

$$D + E_2(D) = d + 2D^2. \quad (3.10)$$

On trouve, après calculs,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(x) = & x + 3x^2 + 15x^3 + 82x^4 + 495x^5 + 3144x^6 + 20875x^7 + 142773x^8 + 1000131x^9 \\ & + 7136812x^{10} + 51702231x^{11} + 379234623x^{12} + 2810874950x^{13} \\ & + 21020047557x^{14} + 158398829121x^{15} + \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}(x) = & x + 2x^2 + 6x^3 + 25x^4 + 114x^5 + 591x^6 + 3298x^7 + 19532x^8 + 120687x^9 \\ & + 771373x^{10} + 5061741x^{11} + 33943662x^{12} + 231751331x^{13} \\ & + 1606587482x^{14} + 11283944502x^{15} + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.3 Arbres signés et arbres marqués. Un arbre *signé* est un arbre dans lequel chaque arête est munie d'un signe «+» ou d'un signe «-». Désignons par s , l'espèce des arbres signés et par S , l'espèce des arborescences signées, i.e. $S = s^\bullet$.

Proposition 3.3. *On a*

$$S = O \quad (3.13)$$

$$S + 2E_2(S) = s + 2S^2. \quad (3.14)$$

Démonstration. Pour (3.13), il suffit de considérer, par exemple, que dans une arborescence signée, une arête munie d'un signe «+» sera une arête convergeant vers la racine alors qu'une arête munie d'un signe «-» sera une arête divergente, et inversement.

Pour (3.14), on fait exactement le même raisonnement que pour le théorème de dissymétrie des arbres, à l'exception qu'ici dans le cas où une arête doit être distinguée ou coupée, il faut tenir compte de son signe, d'où le terme $2E_2(S)$ à gauche et également $2S^2$ à droite. \square

De (3.14), on tire, pour le dénombrement des types,

$$\tilde{s}(x) = \tilde{S}(x) + \tilde{S}(x^2) - \tilde{S}^2(x) \quad (3.15)$$

et, après calculs,

$$\begin{aligned} \tilde{s}(x) = & x + 2x^2 + 3x^3 + 10x^4 + 27x^5 + 98x^6 + 350x^7 + 1402x^8 \\ & + 5743x^9 + 24742x^{10} + 108968x^{11} + 492638x^{12} + 2266502x^{13} \\ & + 10600510x^{14} + 50235931x^{15} + \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

On observe à partir de (3.7), (3.13) et (3.15) ou de (3.8) et (3.16) que les types d'arbres orientés d'ordre impair sont en même nombre que les types d'arbres signés. En fait ces deux espèces, restreintes aux ensembles de cardinalité impaire, sont isomorphes :

$$s_{\text{imp}} = o_{\text{imp}}. \quad (3.17)$$

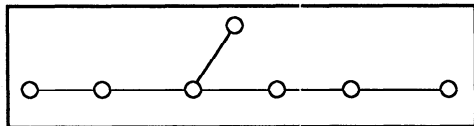


FIGURE 13.

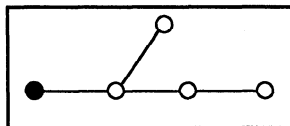


FIGURE 14.

Cela tient au fait que dans le cas impair on peut définir un centre canonique qui est un sommet et appliquer ensuite la technique de démonstration de (3.13), avec ce centre comme racine. Le centre canonique d'un arbre d'ordre impair est le sommet s obtenu de la façon suivante : si le centre habituel de l'arbre est un sommet alors s est ce sommet; si le centre de l'arbre est une arête, on prend pour s le sommet de l'arête qui est situé du côté le plus lourd, *i.e.* contenant le plus grand nombre de points, de l'arbre, qui existe toujours dans le cas impair.

Signalons en terminant cette partie l'espèce m des arbres marqués, *i.e.* dans lesquels chaque arête et chaque sommet sont munis soit d'un signe «+», soit d'un signe «-», et l'espèce $M = m^\bullet$ des arborescences marquées. On a alors les équations

$$M = 2XE^2(M) \quad (3.18)$$

$$M + 2E_2(M) = m + 2M^2. \quad (3.19)$$

4. Arbres asymétriques. Une structure f appartenant à une espèce F est dite *asymétrique* si le groupe d'automorphismes de f est réduit à l'identité. Par exemple la figure 13 représente le plus petit arbre asymétrique non trivial. On désigne par \bar{F} la partie plate de F , c'est-à-dire la sous-espèce de F obtenue en ne prenant que les F -structures asymétriques. La théorie générale des F -structures asymétriques a récemment été entreprise par G. Labelle [Lag4]. Celui-ci a introduit en particulier une série formelle en une infinité de variables $\Gamma_F = \Gamma_F(x_1, x_2, \dots)$ appelée la série indicatrice d'asymétrie de F et ayant les propriétés suivantes, analogues à celles de la série indicatrice de cycles Z_F :

$$\Gamma_{F+G} = \Gamma_F + \Gamma_G, \quad \Gamma_{FG} = \Gamma_F \Gamma_G, \quad \Gamma_{F \circ G} = \Gamma_F \circ \Gamma_G, \quad \Gamma'_F = \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_F \quad (4.1)$$

$$\bar{F}(x) = \Gamma_F(x, x^2, x^3, \dots) \quad (4.2)$$

Désignons par u et U les espèces des arbres et des arborescences asymétriques, respectivement. En d'autres termes $u = \bar{a}$ et $U = \bar{A}$. Notons toutefois que $u^\bullet \neq U$; en fait $u^\bullet \subseteq U$ mais il existe des arborescences asymétriques qui ne sont pas des arbres asymétriques dont on a pointé un sommet. Voir par exemple la figure 14.

Il est donc possible, comme G. Labelle l'a fait [Lag5] d'appliquer la théorie générale pour dénombrer les diverses familles d'arbres et d'arborescences asymétriques. Nous allons plutôt ici décrire directement des équations permettant le calcul de $\tilde{u}(x)$ et de $\tilde{U}(x)$. Il est à noter qu'en fait $u(x) = \tilde{u}(x)$ et $U(x) = \tilde{U}(x)$. Nous introduisons pour cela le concept d'*assemblée injective de F-structures*. Il s'agit d'assemblées de F -structures deux à deux non isomorphes. Dénotons par $E_{\text{inj}}(F)$, $E_{n \text{ inj}}(F)$, et plus généralement pour toute espèce G , $G_{\text{inj}}(F)$, les espèces des assemblées injectives, des assemblées injectives de

n membres et des G -assemblées, *i.e.* des assemblées munies de G -structures, injectives, de F -structures, respectivement. En fait il ne s'agit pas de substitutions d'espèces à proprement parler puisque G_{inj} n'est pas défini en tant qu'espèce mais en tant qu'opérateur sur les espèces.

Le dénombrement des types d'assemblées injectives de F -structures a été essentiellement résolu par G. Pólya dans [Pó] (voir également [HrPa, § 2.6]). Formulé en termes d'espèces de structures, cela donne le lemme 4.1 et la proposition 4.2 ci-bas :

Lemme 4.1. *Pour les types d'assemblées injectives de F -structures, on a*

$$E_{\text{inj}}(F) \sim(x) = E^{\pm}(F) \sim(x) - E(F) \sim(x) \tag{4.3}$$

$$E_{n \text{ inj}}(F) \sim(x) = E_n^{\pm}(F) \sim(x) - E_n(F) \sim(x), \quad n \geq 0 \tag{4.4}$$

$$G_{\text{inj}}(F) \sim(x) = \sum_{n \geq 0} |G[n]| E_{n \text{ inj}}(F) \sim(x) \tag{4.5}$$

Rappelons que pour $n \geq 0$, E_n^{\pm} dénote l'espèce des ensembles orientés de cardinal n . Techniquement pour $n \geq 2$ E_n^{\pm} est l'espèce moléculaire X^n/A_n , où A_n dénote le sous-groupe alterné du groupe symétrique S_n . En pratique, cela signifie que pour un ensemble U avec $|U| = n$,

$$E_n^{\pm}[U] = \{+, -\} \quad (\text{les deux orientations de } U)$$

et pour une permutation σ de U , le transport de structure se fait de la façon suivante :

- si σ est une permutation paire, $E_n^{\pm}[\sigma]$ est l'identité;
- si σ est une permutation impaire, $E_n^{\pm}[\sigma]$ interchange les deux orientations.

Par convention, on pose $E^{\pm} = \sum_{n \geq 1} E_n^{\pm}$. Notons au passage que la série indicatrice de E_n^{\pm} est égale au polynôme indicateur de cycle du groupe A_n (pour $n \geq 2$) :

$$\begin{aligned} Z_{E_n^{\pm}}(x_1, x_2, \dots) &= \frac{2}{n!} \sum_{\sigma \in A_n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (1 + (-1)^{\sigma_2 + \sigma_4 + \dots}) x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots \\ &= Z_{E_n}(x_1, x_2, \dots) + Z_{E_n}(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Démonstration du Lemme 4.1. Pour (4.3) ou (4.4), il suffit d'observer que $E^{\pm}(F) \sim(x)$ compte deux fois les types d'assemblées injectives de F -structures et une seule fois les assemblées non injectives. En effet si deux membres de l'assemblées sont isomorphes, il y aura un automorphisme de l'assemblée de F -structures induisant une transposition de l'assemblée et identifiant ainsi les deux orientations. Faisant la différence $E^{\pm}(F) \sim(x) - E(F) \sim(x)$, on obtient un compte de 1 pour les assemblées injectives et de 0 pour les non injectives, comme désiré.

Pour (4.5), remarquons qu'une G -assemblée injective de F -structures est d'abord une assemblée injective de F -structures, munie d'une G -structure. Comme l'assemblée est injective, aucun automorphisme de la G -assemblée, sauf l'identité, n'est possible. En d'autres termes, un type de G_n -assemblées injectives de F -structures n'est rien d'autre qu'une G_n -structure étiquetée par (*i.e.* construite sur) un ensemble de n types distincts de F -structures. \square

Proposition 4.2. *Les types d'assemblées injectives de F -structures sont dénombrés par*

$$E_n \text{ inj}(F)^\sim(x) = Z_{E_n}(\tilde{F}(x), -\tilde{F}(x^2), \tilde{F}(x^3), -\tilde{F}(x^4), \dots) \quad (4.7)$$

$$E_{\text{inj}}(F)^\sim(x) = \exp\left(\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\tilde{F}(x^n)}{n}\right). \quad (4.8)$$

Démonstration. Pour (4.7), il suffit de jumeler le lemme précédent avec le calcul de donné par (4.6).

En sommant sur n , on trouve

$$\begin{aligned} E_{\text{inj}}(F)^\sim(x) &= Z_E(\tilde{F}(x), -\tilde{F}(x^2), \tilde{F}(x^3), -\tilde{F}(x^4), \dots) \\ &= \exp\left(\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\tilde{F}(x^n)}{n}\right). \quad \square \end{aligned}$$

Notons au passage que notre calcul montre également que (cf. [Lag4])

$$\Gamma_E(x_1, x_2, \dots) = \exp\left(\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x_n}{n}\right).$$

Nous pouvons maintenant passer à l'étude des arbres et des arborescences asymétriques. Le théorème de dissymétrie pour les arbres asymétriques prendra la forme particulière (4.11).

Proposition 4.3. *Les espèces u et U des arbres et des arborescences asymétriques respectivement satisfont les relations suivantes :*

$$U = X E_{\text{inj}}(U) \quad (4.10)$$

$$U + E_2 \text{ inj}(U) = u + U^2. \quad (4.11)$$

Démonstration. Il est clair que les arborescences attachées à la racine d'une arborescence asymétrique sont elles-mêmes asymétriques et deux à deux non isomorphes, on a donc (4.10).

Pour (4.11), il suffit d'adapter la démonstration du théorème de dissymétrie pour les arbres en observant que les deux arborescences obtenues en supprimant une arête distinguée d'un arbre asymétrique sont elles-mêmes asymétriques et non isomorphes, d'où le terme $E_2 \text{ inj}(U)$. \square

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des deux propositions précédentes.

Corollaire 4.4 [HrPr]. *Pour le dénombrement des types d'arbres et d'arborescences asymétriques, on a*

$$\tilde{U}(x) = x \exp\left(\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{\tilde{U}(x^n)}{n}\right) \quad (4.12)$$

$$\tilde{u}(x) = \tilde{U}(x) - \frac{1}{2}(\tilde{U}(x^2) + \tilde{U}^2(x)). \quad (4.13)$$

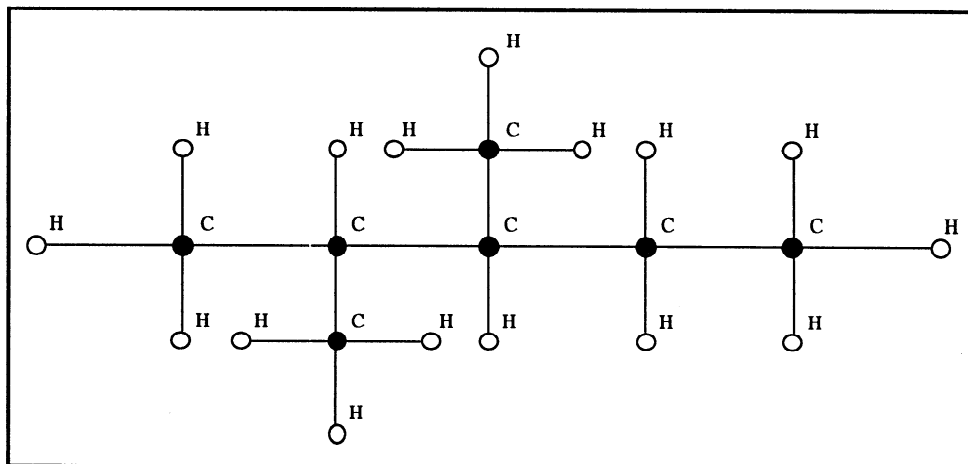


FIGURE 15

On obtient, après calculs, (voir également [Lag5]) :

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) = & x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 12x^7 + 25x^8 + 52x^9 + 113x^{10} \\ & + 247x^{11} + 548x^{12} + 1226x^{13} + 2770x^{14} + 6299x^{15} + \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\tilde{u}(x) = x + x^7 + x^8 + 3x^9 + 6x^{10} + 15x^{11} + 29x^{12} + 67x^{13} + 139x^{14} + 310x^{15} + \dots \quad (4.15)$$

5. Arbres avec feuilles. Il est souvent utile de considérer les feuilles des arbres et des arborescences comme des sommets d'une sorte différente. C'est le cas par exemple en chimie où les structures moléculaires des alcanes (paraffines), des alcools et de leurs isomères sont déterminés par des arbres et arborescences dont les sommets internes correspondent aux atomes de carbone, de valence (degré) 4, et les feuilles, aux atomes d'hydrogènes, de valence 1. Voir la figure 15 représentant un isomère d'alcane de formule moléculaire C_7H_{16} . D'autres exemples proviennent des structures de données arborescentes, en informatique, où les données sont souvent emmagasinées aux feuilles.

Considérons l'espèce à deux sortes $b_R(X, Y)$ des arbres R -enrichis dont les sommets internes sont de sorte X et les feuilles, de sorte Y . Nous supposons ici que $R(0) = 0$, i.e. que l'arbre réduit à un sommet est exclu, et que $|R[1]| = 1$, (ou encore $R'(0) = 1$), c'est-à-dire que l'enrichissement ne se fait véritablement que sur les sommets internes.

De même nous désignerons par $B_R(X, Y)$ l'espèce des arborescences R -enrichies avec sommets internes de sorte X et autres sommets de sorte Y . L'hypothèse sur R est ici que $R(0) = 1$ et on pose $R^* = R - 1$. Cette espèce satisfait l'équation fonctionnelle.

$$B_R(X, Y) = Y + XR^*(B_R(X, Y)) \quad (5.1)$$

qui généralise l'équation (2.1) puisque pour $X = Y$, on a $B_R(X, Y) = A_R$ et (5.1) se ramène à (2.1). De plus si on désigne par $b_R^{\bullet X}(X, Y)$ l'espèce des arbres R -enrichis avec feuilles, pointés en un point interne, on a la relation

$$b_R^{\bullet X}(X, Y) = XR^*(B_{R'}(X, Y)), \quad (5.2)$$

où $R^\wedge = R - X$. Enfin le théorème de dissymétrie pour les arbres R -enrichis se généralise alors de la façon suivante :

Théorème 5.1. *Soit R une espèce telle que $R(0) = 0$ et $R'(0) = 1$ et soit $R^\wedge = R - X$. Alors l'espèce $b_R(X, Y)$ des arbres R -enrichis avec feuilles s'exprime en fonction de celle des arborescences R' -enrichies avec feuilles $B_{R'}(X, Y)$ de la façon suivante :*

$$b_R(X, Y) = XR^\wedge(B_{R'}(X, Y)) + E_2(B_{R'}(X, Y)) - (B_{R'}(X, Y) - Y)B_{R'}(X, Y) \quad (5.3)$$

Démonstration. L'équation (5.3) peut s'écrire sous la forme

$$XR^\wedge(B_{R'}) + E_2(B_{R'}) = b_R + (B_{R'} - Y)B_{R'} \quad (5.4)$$

et se démontre essentiellement de la même façon que les théorèmes de dissymétrie précédents. Il s'agit de considérer les arbres R -enrichis avec feuilles qui sont pointés soit en un sommet interne, soit en une arête, et de situer ce pointage par rapport au centre. \square

Exemple 5.2. Molécules d'alcane (paraffines) et d'alcool.

Dénotons par E_4 , C_4 et E_4^\pm , les espèces des ensembles, des permutations circulaires et des ensembles orientés, respectivement, restreintes à la cardinalité 4. Pour $R = X + E_4$, $X + C_4$ et $X + E_4^\pm$ respectivement, les arbres R -enrichis avec feuilles correspondent aux isomères de molécules de paraffines, aux isomères plans, et aux stéréoisomères, c'est-à-dire aux isomères plongés dans l'espace à trois dimensions, respectivement, de formule moléculaire C_nH_{2n+2} , $n \geq 0$. Désignons par $\varphi(X, Y)$, $\gamma(X, Y)$ et $\eta(X, Y)$, respectivement, ces espèces d'arbres R -enrichis et par $F(X, Y)$, $G(X, Y)$ et $H(X, Y)$ les espèces d'arborescences R' -enrichies correspondantes, où $R' = 1 + E_3$, $1 + X_3$, et $1 + E_3^\pm$, respectivement. Ces arborescences correspondent à des isomères (resp. isomères plans et stéréoisomères) de molécules d'alcool de formule $C_nH_{2n+1}OH$, $n \geq 0$. Ces dernières espèces satisfont alors les équations :

$$F(X, Y) = Y + XE_3(F(X, Y)) \quad (5.5)$$

$$G(X, Y) = Y + XG^3(X, Y) \quad (5.6)$$

$$H(X, Y) = Y + XE_3^\pm(H(X, Y)) \quad (5.7)$$

Sachant que

$$Z_{E_3} = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3),$$

$$Z_{X^3} = x_1^3, \quad (5.8)$$

$$Z_{E_3^\pm} = \frac{1}{3}(x_1^3 + 2x_3),$$

on déduit immédiatement les équations

$$F(x, y) = y + \frac{x}{6}F^3(x, y) \quad (5.9)$$

$$G(x, x) = y + xG^3(x, x) \quad (5.10)$$

$$H(x, y) = y + \frac{x}{3}H^3(x, y) \quad (5.11)$$

ainsi que les suivantes, pour les types d'arborescences, qui sont dues à Pólya (cf. [P6] ou [P6R, (2.13)–(2.15)])

$$\tilde{F}(x, y) = y + \frac{x}{6}(\tilde{F}^3(x, y) + 3\tilde{F}(x, y)\tilde{F}(x^2, y^2) + 2\tilde{F}(x^3, y^3)) \quad (5.12)$$

$$\tilde{G}(x, y) = y + x\tilde{G}^3(x, y) \quad (5.13)$$

$$\tilde{H}(x, y) = y + \frac{x}{3}(\tilde{H}^3(x, y) + 2\tilde{H}(x^3, y^3)). \quad (5.14)$$

Pour des raisons d'homogénéité, la variable y peut être éliminée de ces six fonctions $f(x, y)$ en posant $f(x) = f(x, 1)$ et on retrouve $f(x, y) = yf(xy^2)$, ce qui signifie qu'à n sommets internes sont toujours attachées $2n + 1$ feuilles, d'où la formule moléculaire $C_nH_{2n+1}OH$, la liaison supplémentaire OH étant attachée automatiquement à la racine. Pour (5.10) et (5.13), on a l'équation cubique

$$g(x) = 1 + xg^3(x) \quad (5.15)$$

qui se résout explicitement, par inversion de Lagrange ou encore par un raisonnement combinatoire direct :

$$g(x) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \binom{3n}{n-1} x^n = 1 + x + 3x^2 + 12x^3 + 55x^4 + \dots \quad (5.16)$$

On en déduit par la suite que

$$\begin{aligned} F(x, y) &= yg\left(\frac{xy^2}{6}\right) \\ &= y + x\frac{y^3}{3!} + 20\frac{x^2 y^5}{2! 5!} + 1680\frac{x^3 y^7}{3! 7!} + \dots \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$G(x, y) = \tilde{G}(x, y) = yg(xy^2) \quad (5.18)$$

et

$$H(x, y) = yg\left(\frac{xy^2}{2}\right). \quad (5.19)$$

Les séries $\tilde{F}(x, y)$ et $\tilde{H}(x, y)$ s'obtiennent en résolvant d'abord les équations fonctionnelles

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \frac{x}{6}(f^3(x) + 3f(x)f(x^2) + 2f(x^3)) \\ &= 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 8x^5 + 17x^6 + 39x^7 + 89x^8 \\ &\quad + 211x^9 + 507x^{10} + 1238x^{11} + 3057x^{12} + 7639x^{13} \\ &\quad + 19241x^{14} + 48865x^{15} + \dots \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 + \frac{x}{3}(h^3(x) + 2h(x^3)) \\ &= 1 + x + x^2 + 2x^3 + 5x^4 + 11x^5 + 28x^6 + 74x^7 + 199x^8 \\ &\quad + 551x^9 + 1553x^{10} + 4436x^{11} + 12832x^{12} \\ &\quad + 37496x^{13} + 110500x^{14} + 328092x^{15} + \dots \end{aligned} \quad (5.21)$$

et en posant $\tilde{F}(x, y) = yf(xy^2)$ et $\tilde{H}(x, y) = yh(xy^2)$.

Il est maintenant possible, à l'aide du théorème de dissymétrie, de dénombrer les familles d'arbres correspondantes, dénotées $\varphi(X, Y)$ pour les isomères de paraffine, $\gamma(X, Y)$ pour les isomères plans et $\eta(X, Y)$ pour les stéréoisomères. En utilisant (5.3), avec $R^{\wedge} = E_4, C_4$ et E_4^{\pm} successivement, ainsi que les séries indicatrices

$$Z_{E_4} = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 3x_2^2 + 8x_1x_3 + 6x_4) \quad (5.22)$$

$$Z_{C_4} = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^2 + 2x_4) \quad (5.23)$$

$$Z_{E_4^{\pm}} = \frac{1}{12}(x_1^4 + 3x_2^2 + 8x_1x_3) \quad (5.24)$$

on trouve, par exemple, les formules d'Otter généralisées suivantes, où on a posé

$$\tilde{\varphi}(x, y) = y^2\varphi(xy^2), \quad \tilde{\gamma}(x, y) = y^2\gamma(xy^2), \quad \tilde{\eta}(x, y) = y^2\eta(xy^2), \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \frac{x}{24}(f^4(x) + 6f^2(x)f(x^2) + 3f^2(x^2) + 8f(x)f(x^3) + 6f(x^4)) \\ + \frac{1}{2}(f(x^2) - f^2(x)) + f(x) \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\gamma(x) = \frac{x}{4}(g^4(x) + g^2(x^2) + 2g(x^4)) + \frac{1}{2}(g(x^2) - g^2(x)) + g(x) \quad (5.27)$$

et

$$\begin{aligned} \eta(x) = \frac{x}{12}(h^4(x) + 3h^2(x^2) + 8h(x)h(x^3)) \\ + \frac{1}{2}(h(x^2) - h^2(x)) + h(x). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Après calcul, on trouve

$$\begin{aligned} \varphi(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + 9x^7 + 18x^8 + 35x^9 + 75x^{10} \\ + 159x^{11} + 355x^{12} + 802x^{13} + 1858x^{14} + 4347x^{15} + \dots \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \gamma(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 7x^4 + 25x^5 + 108x^6 + 492x^7 + 2431x^8 + 12371x^9 \\ + 65169x^{10} + 350792x^{11} + 1926372x^{12} + 10744924x^{13} \\ + 60762760x^{14} + 347653944x^{15} + \dots \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \eta(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + 11x^7 + 24x^8 + 55x^9 + 136x^{10} \\ + 345x^{11} + 900x^{12} + 2412x^{13} + 6563x^{14} + 18127x^{15} + \dots \end{aligned} \quad (5.31)$$

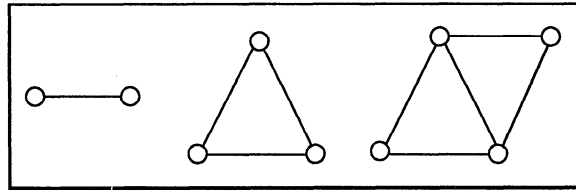
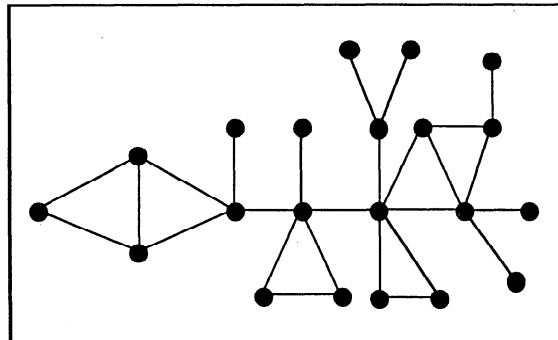


FIGURE 16. Trois graphes non séparables

FIGURE 17. Un graphe g

6. Graphes et blocs. Un point d'articulation d'un graphe connexe est un sommet du graphe dont l'extraction fait perdre la connexité. Un graphe non séparable (ou encore 2-connexe) est un graphe connexe sans point d'articulation (ce qui exclut le graphe réduit à un point). Voir la figure 16. Un bloc d'un graphe est un sous-graphe non séparable maximal.

On définit le bc-arbre $bc(g)$ d'un graphe connexe g comme le graphe ayant comme sommets les blocs et les points d'articulation de g , deux sommets étant adjacents si l'un est un bloc et l'autre est un point d'articulation appartenant à ce bloc. Voir les figures 17 et 18. Les lettres bc viennent de l'anglais «block-cutpoint tree» (cf. [Tu, chap. 9]). Le bc-arbre d'un graphe connexe est un arbre qui est naturellement bicoloré : blanc pour les blocs et noir pour les points d'articulation. Il s'ensuit que son centre est toujours un sommet et cela permet de définir le concept de bc-centre d'un graphe connexe quelconque : il s'agit du bloc ou du point d'articulation de g correspondant au centre du bc-arbre $bc(g)$. Ce concept permet d'étendre le théorème de dissymétrie aux graphes connexes, comme nous allons le voir.

Si B dénote une famille de classes d'isomorphie de graphes non séparables, par exemple ceux de la figure 16, nous désignerons également par B l'espèce des graphes isomorphes à un élément de B et par C_B l'espèce des graphes connexes dont tous les blocs sont dans B . Voici quelques exemples :

- Si $B = B_a$, la famille de tous les blocs, alors $C_B = C$, l'espèce de tous les graphes connexes.
- Si $B = \{K_2\}$, alors $C_B = a$, l'espèce des arbres.

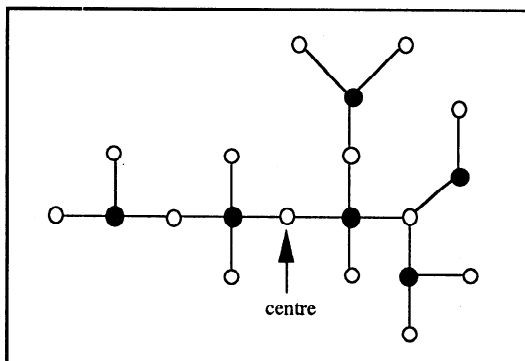
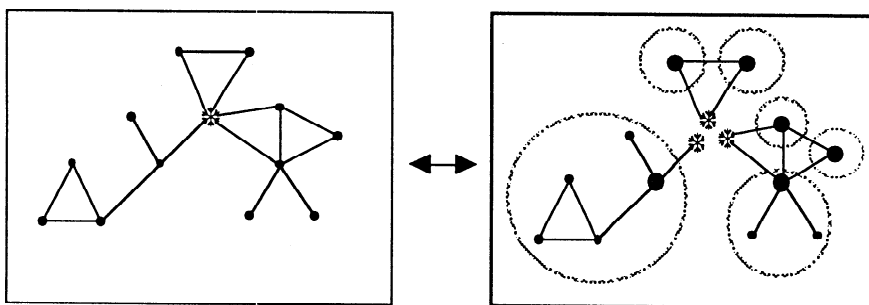
FIGURE 18. Le bc-arbre $bc(g)$ 

FIGURE 19

- Si $B = \{K_3\}$, le graphe complet à trois sommets, alors C_B est l'espèce des cactus triangulaires (voir plus loin).
- Si $B = \{P_n \mid n \geq 3\}$, la famille des polygones, alors C_B est l'espèce des cactus ou encore des graphes Husimi (cf. [HrPa, p.71], [HrN], [HrU]).
- Si $B = B_u - \{K_2\}$, alors C_B est l'espèce des graphes 2-arêtes-connexes, *i.e.* des graphes connexes sans pont, *i.e.* sans arête dont l'extraction séparerait le graphe en deux composantes connexes.

La relation suivante est bien connue (cf. [HrPa,(1.33) et (8.71)], [Ro, Th. 4], [Laj, § 2.10]). Elle est illustrée par la figure 19.

$$C_{B'} = E(B'(C_B^*)) \quad (6.1)$$

Théorème 6.1 (de dissymétrie pour les graphes). *Si B est une espèce de graphes inséparables et si C_B dénote l'espèce des graphes dont tous les blocs sont dans B alors on a*

$$C_B = C_B^* + B(C_B^*) - C_B^* B'(C_B^*). \quad (6.2)$$

Démonstration. Écrit sous la forme

$$C_B^* + B(C_B^*) = C_B + C_B^* B'(C_B^*). \quad (6.3)$$

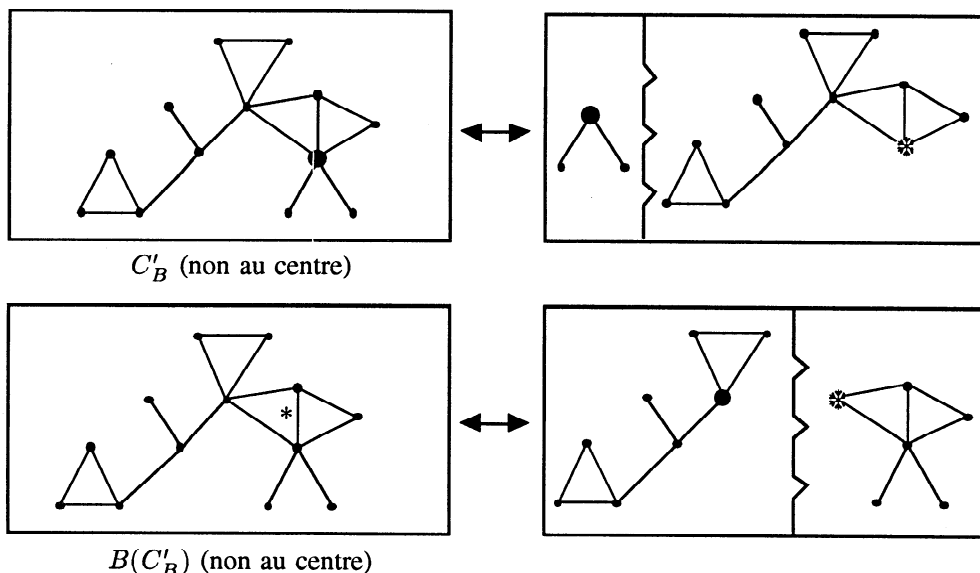


FIGURE 20

ce résultat généralise la formule (1.1) de dissymétrie pour les arbres et la démonstration est semblable. Le premier membre de (6.3) représente les graphes dans C_B qui sont pointés soit en un sommet (C_B^\bullet), soit en un bloc ($B(C_B^\bullet)$). Dans le second membre, le terme C_B correspond au cas où le pointage a été fait de façon canonique, dans le bc-centre du graphe. Dans les autres cas, une décomposition naturelle, illustrée par la figure 20, permet d'obtenir de façon bijective une $C_B^\bullet B'(C_B^\bullet)$ -structure. \square

Il existe une autre identité remarquable dans ce contexte, à savoir

$$C = C_B + N_B(C_B^\bullet) \tag{6.4}$$

où N_B dénote l'espèce des graphes connexes contenant au moins deux points et dont aucun bloc pendent (*i.e.* de degré 0 ou 1 dans le bc-arbre) n'appartient à B . Le lecteur est référé à [Le], en particulier la figure 5.6, pour plus de détails. Il est à noter que les formules (6.1)–(6.4) ont d'abord été données par R. W. Robinson au niveau des séries indicatrices (*cf.* [Hn, HnR, Ro]) dans le but de dénombrer les graphes non séparables, 2-arêtes-connexes, sans points simples, *etc.* Les méthodes de calcul utilisées pour déterminer C_B^\bullet , C_B , N_B et leurs séries associées lorsque B est connue, ou pour B , lorsque C_B est connue, s'expriment de manière élégante en termes d'espèces virtuelles (*cf.* [Le]).

Par exemple, si $B = \{K_2\}$ alors $C_B = a$, l'espèce des arbres et $C_B^\bullet = A$, celle des arborescences, et les identités (6.1) et (6.3) se ramènent à (0.14) et (0.13) puisqu'alors $B' = X$. De plus N_B est l'espèce des graphes connexes non réduits à un point et sans sommet pendent (*i.e.* de degré 1). Désignons par $W = E(X + N_B)$, l'espèce de tous les graphes sans sommet pendent. L'identité (6.4) donne alors

$$N_B(A) = C - a \tag{6.5}$$

et pour isoler N_B , il suffit de substituer l'espèce virtuelle $A^{(-1)}$, inverse de A sous la composition, qui en vertu de (0.14) satisfait l'équation $X = A^{(-1)}E$ d'où l'on tire

$$A^{(-1)} = XE^{-1} \quad (6.6)$$

En substituant $A^{(-1)}$ dans l'équation (0.13), on obtient alors

$$N_B = C(A^{(-1)}) - a(A^{(-1)}) = C(A^{(-1)}) - (X + E_2 - X^2) \quad (6.7)$$

et finalement,

$$W = E(X + N_B) = E(C(A^{(-1)}) + X^2 - E_2) = G(A^{(-1)})E(X^2 - E_2) \quad (6.8)$$

où $G = E(C)$ est l'espèce de tous les graphes. Compte tenu que

$$(A^{(-1)}) \sim(x) = x\tilde{E}^{-1}(x) = x(1-x) = x - x^2 \quad (6.9)$$

en vertu de (6.6) et que $(X^2 - E_2) \sim(x) = 0$, la série génératrice des types de graphes sans sommet pendant peut être exprimée sous la forme particulièrement simple suivante, due à Robinson (cf. [Hn, cor. 4.1]) :

$$\tilde{W}(x) = Z_G(x - x^2, x^2 - x^4, x^3 - x^6, \dots) \quad (6.10)$$

Un autre exemple est donné par la famille $B = \{K_3\}$, pour laquelle $B = E_3$, comme espèce, $B' = E_2$, et $C_B = \delta$, l'espèce des cactus triangulaires, c'est-à-dire des graphes connexes dont tous les blocs sont des triangles, et $C_B^\bullet = \Delta$, l'espèce des cactus triangulaires pointés. L'application de (6.1) et (6.2) donne immédiatement

$$D = XE(E_2(\Delta)) \quad (6.11)$$

et la formule de dissymétrie

$$\delta = \Delta + E_3(\Delta) - \Delta E_2(\Delta). \quad (6.12)$$

Ces équations se résolvent comme précédemment et on trouve, par exemple,

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(x) &= x \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\tilde{\Delta}^2(x^n) + \tilde{\Delta}(x^{2n})}{2n}\right) \\ &= x + x^3 + 2x^5 + 5x^7 + 13x^9 + 37x^{11} + 111x^{13} \\ &\quad + 345x^{15} + \dots \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(x) &= \tilde{D}(x) + \frac{1}{3}(\tilde{\Delta}(x^3) - \tilde{D}^3(x)) \\ &= x + x^3 + x^5 + 2x^7 + 4x^9 + 8x^{11} + 19x^{13} \\ &\quad + 48x^{15} + \dots \end{aligned} \quad (6.14)$$

On remarque que si un tel cactus comporte n triangles, il a alors $2n + 1$ points. Il y aura donc une économie d'échelle si on considère plutôt les cactus comme étant étiquetée

aux triangles plutôt qu'aux sommets, ce qui donne les espèces k des cactus triangulaires construits sur des ensembles de triangles, et K , de ces cactus triangulaires pointés en un sommet quelconque. Il est à noter que $K \neq k^\bullet = Xk'$. On a alors le résultat suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur.

Théorème. Les espèces k et K satisfont les identités suivantes :

$$K = E(XE_2(K)) \tag{6.15}$$

$$k = K + XE_3(K) - KXE_2(K) \tag{6.16}$$

En passant aux types, on trouve (cf. [HrPa, p.73]).

$$\begin{aligned} \tilde{K}(x) &= \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{2n} (\tilde{K}^2(x^n) + \tilde{K}(x^{2n}))\right) \\ &= 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 13x^4 + 37x^5 + 111x^6 + 345x^7 + 1105x^8 \\ &\quad + 3624x^9 + 12099x^{10} + 41000x^{11} + 140647x^{12} + 487440x^{13} \\ &\quad + 1704115x^{14} + 6002600x^{15} + \dots \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned} \tilde{k}(x) &= \tilde{K}(x) + \frac{x}{3}(\tilde{K}(x^3) - \tilde{K}^3(x)) \\ &= 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 8x^5 + 19x^6 + 48x^7 + 126x^8 + 355x^9 \\ &\quad + 1037x^{10} + 3124x^{11} + 9676x^{12} + 30604x^{13} + 98473x^{14} \\ &\quad + 321572x^{15} + \dots \end{aligned} \tag{6.18}$$

et on constate, comme prévu, que

$$\tilde{\Delta}(x) = x\tilde{K}(x^2) \quad \text{et} \quad \tilde{\delta}(x) = x\tilde{k}(x^2). \tag{6.19}$$

De nombreux autres problèmes de dénombrement se prêtent à cette méthodologie. Mentionnons en terminant ceux des bc-arbres et des arbres bidimensionnels, traités dans [HrPa]. Dans ces cas comme dans d'autres, nous invitons le lecteur à définir les espèces appropriées et à écrire à ce niveau les équations fonctionnelles permettant leur dénombrement.

English extended abstract. The key to the enumeration of (unlabelled) trees is the formula (0.1) given by Otter in 1948 which relates the enumeration of trees to that of rooted trees. For rooted trees, the recursive formulas (0.2) of Pólya or (0.3) due to Cayley are used. There are analogous relations for labelled trees and rooted trees, (0.8) and (0.9), and for the cycle index series of these species, (0.11) and (0.12) due to Robinson. In fact these formulas can all be lifted to the level of species of structures in the sense of Joyal, as natural isomorphisms, in the form of (0.15) which we call the *dissymmetry theorem for trees* and of (0.14).

The advantages of this lifting are manifold:

- The formulas are compact and elegant and the proofs are often simpler.
- These identities are more general. They automatically give the corresponding formulas for the various generating functions and index series, according to the theory of species of structures.
- Extensions are naturally suggested, for various families of trees and graphs, for example for R -enriched trees and rooted trees [Lag1].

The purpose of this paper, after giving the proof of the dissymmetry theorem for trees, based on the concept of center of a tree and taken from [Le], is to show how this methodology can be applied to the enumeration of a large variety of trees and rooted trees and of graphs whose blocks are taken from a given set. In each case a functional equation similar to $Y = XF(Y)$ characterizes recursively the species Y of rooted structures and an appropriate dissymmetry relation between the unrooted and rooted structures is given. The reader is invited to compare this presentation with the traditional approach based on Pólya's Enumeration Theorem [Pó] and the work of Robinson [Ro, HnR] as found in Chapters 3 and 8 of [HrPa].

We have computed the first 15 terms of some of the generating series, using Darwin, a computer algebra software specialized in the manipulation of species and their associated series [BeC, C].

The cases that are explicitly treated are the following:

- Ordinary trees and rooted trees, (0.14) and (1.1). The coefficients of the cycle index series (1.4) and (1.5) are also given.
- R -enriched trees and rooted trees, (2.1) and (2.3). These include the homeomorphically irreducible trees, which can be expressed in terms of ordinary trees (see (2.10)), and also the plane embedded trees, (2.15) and (2.17).
- Other species of trees which do not enter in the class of R -enriched trees but which can nevertheless be treated in a similar manner. In particular: oriented trees, (3.1) and (3.6); mixed trees (called directed in [HrPa]), (3.9) and (3.10); signed trees, (3.14); marked trees, (3.18) and (3.19).
- The asymmetric (or identity trees), whose treatment differs from that of [Lag4]. In order to enumerate them we analyse the species of injective assemblies of F -structures and give a formula, (4.8), which extends a classical result of Pólya. The fundamental relations are then expressed as (4.10) and (4.11).
- R -enriched trees for which the leaves constitute a separate sort of vertices, (5.1) and (5.3). As an illustration, the enumeration of various types of isomers of paraffine and alcohol molecules (*cf.* [Pó] or [PóR]) is reviewed.
- The block-cutpoint decomposition of a connected graph [Tu, chap. 9] induces a tree structure and hence analogous functional equations can be written for the species of connected graphs whose blocks are taken from a given set, (6.1) and (6.2). Special cases include all connected graphs, trees, Husimi graphs, and 2-edge-connected graphs. Using the concept of virtual species, one obtains a simple expression for the species W of graphs without end-points (6.8) from which the enumeration formula (6.10) due to Robinson is easily deduced. The case of triangular cacti is also treated, (6.15) and (6.16).

BIBLIOGRAPHIE

- [BeC] F. Bergeron et G. Cartier, *Darwin: computer algebra and enumerative combinatorics*, STACS-88 5th Annual Symp. On Theor. Aspects of Comp. Science (Bordeaux 1988) (R. Cori et M. Wirsing, eds.), Lecture Notes in Computer Sciences, n° 294,, Springer-Verlag, 1988, pp. 393–394.
- [BLL] F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux, *Computation of the expected number of leaves in a tree having a given automorphism, and related topics*, Discrete Appl. Math. **34** (1991), 49–66.
- [C] G. Cartier, *Darwin, une algèbre fonctionnelle pour la combinatoire énumérative (manuel d'utilisation)*, mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, Montréal, 1989.

- [Ca] A. Cayley, *A theorem on trees*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **23** (1889), 376-378, in "Collected papers" **13**, Cambridge, 1897, pp. 26-28.
- [CoL1] I. Constantineau et J. Labelle, *Calcul combinatoire du nombre d'endofonctions et d'arborescences laissées fixes par l'action d'une permutation*, Ann. Sci. Math. Québec **13** (1989), 33-38.
- [CoL2] ———, *On combinatorial structures kept fixed by the action of a given permutation*, Stud. Appl. Math. **84** (1991), 105-118.
- [dB] N. G. de Bruijn, *Enumerative combinatorial problems concerning structures*, Nieuw Arch. Wisk. **11** (1963), 142-161.
- [Hn] P. Hanlon, *A cycle sum inversion theorem*, J. Combin. Theory Ser. A **30** (1981), 248-269.
- [HnR] P. Hanlon et R. W. Robinson, *Counting bridgeless graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **33** (1982), 276-305.
- [Hr] F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, 1969.
- [HrN] F. Harary et R. Z. Norman, *The dissimilarity characteristic of Husimi trees*, Ann. of Math. **58** (1953), 134-141.
- [HrPa] F. Harary et E. M. Palmer, *Graphical enumeration*, Academic Press, 1973.
- [HrPr] F. Harary et G. Prins, *The number of homeomorphically irreducible trees, and other species*, Acta Math. **101** (1959), 141-159.
- [HrPT] F. Harary, G. Prins et W. T. Tutte, *The number of plane trees*, Indag. Math. **26** (1964), 319-329.
- [HrU] F. Harary et G. E. Uhlenbeck, *On the number of Husimi trees*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39** (1953), 315-322.
- [Jo1] A. Joyal, *Une théorie combinatoire des séries formelles*, Adv. in Math. **42** (1981), 1-82.
- [Jo2] ———, *Règle des signes en algèbre combinatoire*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **7** (1985), 285-290.
- [Jo3] ———, *Foncteurs analytiques et espèces de structures*, Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec, 1985, Lecture Notes in Mathematics n° 1234, 1986, pp. 126-159.
- [Lag1] G. Labelle, *Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange*, Adv. in Math. **42** (1981), 217-247.
- [Lag2] ———, *Some new computational methods in the theory of species*, Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec, 1985, Lecture Notes in Mathematics n° 1234, 1986, pp. 192-210.
- [Lag3] ———, *On the generalized iterates of Yeh's combinatorial K-species*, J. Combin. Theory Ser. A **50** (1989), 235-258.
- [Lag4] ———, *On asymmetric structures*, (à paraître dans Discrete Math.).
- [Lag5] ———, *Counting asymmetric enriched trees*, (à paraître dans J. Symb. Comput.).
- [Lag6] ———, *Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires*, Actes du 3^e Colloque sur les séries formelles et la combinatoire algébrique, Bordeaux, 1991, (à paraître dans Theor. Comp. Science).
- [Laj] J. Labelle, *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures*, Ann. Sci. Math. Québec **7** (1983), 59-94.
- [Le] P. Leroux, *Methoden der Anzahlbestimmung für einige Klassen von Graphen*, Bayreuth. Math. Schr. **26** (1988), 1-36.
- [MeM] A. Meir et J. W. Moon, *On nodes of degree two in random trees*, Matematika **15** (1968), 188-192.
- [Mo] J. W. Moon, *Counting labeled trees*, Canadian Math. Society, Montréal, Ottawa, 1970.
- [Ni] A. Nickel, *Abzählung und Konstruktion diskreter Strukturen und die Theorie des Spezies*, Diplomarbeit, Universität Bayreuth, 1989.
- [No] R. Z. Norman, *On the number of linear graphs with given blocks*, Dissertation, Univ. of Michigan, Ann Arbor, 1954.
- [Ot] R. Otter, *The number of trees*, Ann. of Math. **49** (1948), 583-599.
- [Pó] G. Pólya, *Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, Acta Math. **68** (1937), 145-254.
- [PóR] G. Pólya et R. C. Read, *Combinatorial enumeration of groups, graphs and chemical compounds*, Springer-Verlag, 1987.
- [Ro] R. W. Robinson, *Enumeration of non-separable graphs*, J. Combin. Theory **9** (1970), 327-356.
- [Tu] W. T. Tutte, *Connectivity in graphs*, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1966.

- [Ye] Y. N. Yeh, *The calculus of virtual species and K-species*, Combinatoire énumérative, Proceedings, Montréal, Québec, 1985, Lecture Notes in Mathematics n° 1234, Springer-Verlag, 1986, pp. 351–369.

PIERRE LEROUX ET BRAHIM MILOUDI
LACIM, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
C. P. 8888, SUCCURSALE A
MONTRÉAL (QUÉBEC) CANADA H3C 3P8