Ann. Sci. Math. Québec, **16** (1), 1992, 25–33.

DE L'INTERPOLATION À L'AIDE D'UNE FONCTION SPLINE DÉFINIE SUR UNE PARTITION QUELCONQUE

FRANÇOIS DUBEAU ET JEAN SAVOIE

RÉSUMÉ. Nous étudions le problème de l'interpolation de points $\{(t_j, y_j)\}_{j=0}^N$ à l'aide d'une fonction spline $s(\cdot)$ de degré 1 définie sur un intervalle $[a, b]$ à l'aide d'une partition $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^N$. Nous présentons des résultats d'existence et d'unicité, et obtenons des majorations de l'erreur d'interpolation. Ces résultats nous permettent de résoudre un problème d'histospline pour une fonction spline de degré 0. Nous obtenons également les même résultats pour un problème d'histospline périodique.

ABSTRACT. We consider the interpolation of the points $\{(t_j, y_j)\}_{j=0}^N$ using a spline function $s(\cdot)$ of degree 1 defined over an interval $[a, b]$ using a partition $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^N$. Existence and uniqueness results are obtained. Bounds for interpolating errors are presented. Using the result we can solve an histospline problem. We obtain similar results for the periodical cases. See the English extended abstract at the end of the paper.

1. Introduction. On se donne une partition $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^N$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que $a = x_0 < \cdots < x_i < \cdots < x_n = b$ et on définit les sous-intervalles $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ de longueur $h_i = x_i - x_{i-1}$. Le *pas* de la partition est défini par $h = \max_i h_i$ et la *constante de régularité* de la partition est $\gamma(\Delta) = h/\min_i h_i$.

Une *fonction spline* $s(\cdot)$ de degré $n \geq 0$ définie sur $[a, b]$ à l'aide de la partition Δ est une fonction de classe $C^{n-1}[a, b]$ dont la restriction à chacun des sous-intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ est un polynôme de degré au plus n (pour $n = 0$, $C^{-1}[a, b]$ dénote l'ensemble des fonctions bornées sur $[a, b]$). Elle est *périodique* lorsque $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b)$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Pour une suite $\{t_j\}_{j=0}^N$ satisfaisant à la condition

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} a = x_0 \leq t_0 < x_0 + \dfrac{1}{2}h_1, \\ x_j - \dfrac{1}{2}h_j < t_j < x_j + \dfrac{1}{2}h_{j+1} \quad (j = 1, \ldots, N-1), \\ x_N - \dfrac{1}{2}h_N < t_n \leq x_N = b, \end{cases}$$

Reçu le 15 octobre 1990 et, sous forme définitive, le 23 mai 1991.

Cette recherche a été subventionnée par le ministère de la Défense du Canada et le ministère de l'Éducation du Québec.

nous considérons le problème d'interpolation suivant:

(PI) $\begin{cases} \text{(a) pour une suite } \{y_j\}_{j=0}^N \text{ trouver une fonction spline } s(\cdot) \text{ de degré 1 telle que } s(t_j) = y_j \text{ pour } j = 0, \dots, N; \\ \text{(b) si } f(\cdot) \text{ est une fonction de classe } C^2[a,b] \text{ et } y_j = f(t_j) \text{ montrer que l'unique fonction spline } s(\cdot) \text{ de degré 1 telle que } s(t_j) = y_j \\ (j = 0, \dots, N) \text{ vérifie } \|f^{(k)} - s^{(k)}\|_\infty = O(h^{2-k}) \text{ pour } k = 0 \text{ et } 1. \end{cases}$

En observant que la dérivée d'une fonction spline de degré 1 est une fonction spline de degré 0 ou, de façon équivalente, la primitive d'une fonction spline de degré 0 est une fonction spline de degré 1, nous montrons comment le problème d'interpolation (PI) nous amène à considérer le problème d'histospline suivant:

(PH) $\begin{cases} \text{(a) pour une suite } \{y_j\}_{j=0}^N \text{ trouver une fonction spline } s(\cdot) \text{ de degré 0 telle que } \int_{t_{j-1}}^{t_j} s(\xi)\,d\xi = y_j \text{ pour } j = 1, \dots, N; \\ \text{(b) si } f(\cdot) \text{ est une fonction de classe } C^1[a,b] \text{ et } y_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\xi)\,d\xi, \text{ montrer que l'unique fonction spline } s(\cdot) \text{ de degré 0 telle que} \\ \int_{t_{j-1}}^{t_j} s(\xi)\,d\xi = y_j \text{ vérifie } \|f - s\|_\infty = O(h). \end{cases}$

Nous considérons également les problèmes (PI) et (PH) périodiques et obtenons le même genre de résultats.

Les résultats présentés ici constituent une extension au cas d'une partition non uniforme et des points de collocation non uniformément translatés des résultats obtenus précédemment pour le cas d'une partition uniforme et de points de collocation uniformément translatés [2, **3**]. Ces résultats peuvent également être considérés comme des résultats de perturbation du cas où $t_j = x_j$ pour $j = 0, \dots N$ (voir par exemple [4]).

Dans la suite nous utiliserons les notations suivantes. L'expression $\|\cdot\|_\infty$ dénote toujours une norme uniforme (vectorielle, matricielle ou fonctionnelle). La fonction $(x)_+^k$ est définie par

$$(x)_+^k = \begin{cases} x^k & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Posons $[v; u]g(u) = g(v)$, et par récurrence on définit pour $k \geq 1$ les différences divisées

$$[v_1, \dots, v_{k+1}; u]g(u) = \frac{[v_2, \dots, v_{k+1}; u]g(u) - [v_1, \dots, v_k; u]g(u)}{v_{k+1} - v_1}.$$

Nous considérons également les espaces de fonctions suivants: $C^k[a,b]$ l'espace des fonctions à dérivées continues jusqu'à l'ordre k et $C_p^k[a,b]$ l'espace des fonctions $f(\cdot) \in C^k[a,b]$ telles que $f^{(l)}(a) = f^{(l)}(b)$ pour $l = 0, \dots, k$.

2. Le problème d'interpolation. Ajoutons deux valeurs arbitraires x_{-1} et x_{N+1} à la partition $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^N$ de telles sorte que

$$x_{-1} < x_0 = a \quad \text{et} \quad b = x_N < x_{N+1},$$

et utilisons les fonctions de base

$$B_i(x) = (x_{i+1} - x_{i-1})[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}; u](x-u)_+^1 \quad (i = 0, \dots, N)$$

définies sur $[a, b]$ à l'aide de la partition Δ. Plus spécifiquement nous avons

$$B_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_{i-1}, \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \geq x_{i+1}. \end{cases}$$

Notons que $B_i(x) \geq 0$, $B_i(x_i) = 1$ et $\sum_{i=0}^{N} B_i(x) = 1$ pour tout $x \in [a, b]$. En particulier

$$B_{i-1}(x) + B_i(x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{2.1}$$

On peut ainsi écrire

$$s(x) = \sum_{i=0}^{N} s_i B_i(x), \tag{2.2}$$

où $s_i = s(x_i)$ pour $i = 0, \dots, N$, et le problème (PI) consiste alors à trouver les $N+1$ inconnues s_i de telle sorte que

$$s(t_j) = y_j \quad (j = 0, \dots, N). \tag{2.3}$$

Définissons

$$\alpha_j = \frac{(x_j - t_j)_+}{h_j} \quad \text{et} \quad \beta_j = \frac{(t_j - x_j)_+}{h_{j+1}}$$

pour $j = 0, \dots, N$, et notons que $\beta_j = 0$ (resp. $\alpha_j = 0$) lorsque $\alpha_j > 0$ (resp. $\beta_j > 0$). Posons $\delta_j = \alpha_j + \beta_j$ $(j = 0, \dots, N)$ et définissons $\delta = \max_j \delta_j$.

Selon l'hypothèse (C) on a $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$ et

$$t_j = x_j - \delta_j h_j \quad \text{lorsque } t_j \leq x_j,$$

ou bien

$$t_j = x_j + \delta_j h_{j+1} \quad \text{lorsque } t_j \geq x_j.$$

Nous pouvons énoncer le résultat suivant:

Théorème 1. *Soit $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ une partition de l'intervalle $[a, b]$ et $\{t_j\}_{j=0}^{N}$ une suite vérifiant la propriété* (C). *Alors*

(a) *existence et unicité: pour toute suite de valeurs $\{y_j\}_{j=0}^{N}$ il existe une et une seule fonction spline $s(\cdot)$ de degré 1 telle que $s(t_j) = y_j$ $(j = 0, \dots, N)$;*

(b) *majorations d'erreur: si $f(\cdot)$ est une fonction de classe $C^2[a, b]$ et $y_j = f(t_j)$ $(j = 0, \dots, N)$, alors l'unique fonction spline $s(\cdot)$ de degré 1 telle que $s(t_j) = y_j$ $(j = 0, \dots, N)$ vérifie*

$$\|f - s\|_\infty \leq \left[\frac{(1-\delta)\delta}{2(1-2\delta)} + \frac{1}{8}\right] h^2 \|f^{(2)}\|_\infty \tag{2.4}$$

et

$$\|f^{(1)} - s^{(1)}\|_\infty \leq \left[\frac{(1-\delta)\delta\gamma(\Delta)}{(1-2\delta)} + \frac{1}{2}\right] h\|f^{(2)}\|_\infty, \tag{2.5}$$

où h est le pas de la partition, $\gamma(\Delta)$ est la constante de régularité de la partition Δ et δ est définie à l'aide de la condition (C).

Démonstration. En utilisant la représentation (2.2) de $s(\cdot)$, les propriétés des fonctions de base $B_i(\cdot)$ et la condition (C), les relations (2.3) deviennent

$$y_j = s_{j-1}B_{j-1}(t_j) + s_jB_j(t_j) + s_{j+1}B_{j+1}(t_j)$$

pour $j = 0, \ldots, N$. Comme $B_{j-1}(t_j) = \alpha_j$ et $B_{j+1}(t_j) = \beta_j$, en utilisant (2.1) nous avons

$$B_j(t_j) = \begin{cases} 1 - B_{j-1}(t_j) & \text{lorsque } t_j \leq x_j, \\ 1 - B_{j+1}(t_j) & \text{lorsque } t_j \geq x_j. \end{cases}$$

Ainsi le problème d'existence et d'unicité revient à étudier un système linéaire tridiagonal de $N+1$ équations à $N+1$ inconnues de la forme $Y = AS$, où

$$Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1-\beta_0 & \beta_0 & & & \\ \alpha_1 & 1-(\alpha_1+\beta_1) & \beta_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{N-1} & 1-(\alpha_{N-1}+\beta_{N-1}) & \beta_{N-1} \\ & & & \alpha_N & 1-\alpha_N \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{N-1} \\ s_N \end{bmatrix}.$$

D'après la condition (C) la matrice A est à dominance diagonale stricte car $1 - 2(\alpha_i + \beta_i) \geq 1 - 2\delta > 0$. Ainsi A est inversible d'où l'existence et l'unicité de la fonction spline $s(\cdot)$. Notons de plus que $S = A^{-1}Y$ et $\|S\|_\infty \leq \|A^{-1}\|_\infty\|Y\|_\infty$ avec $\|A^{-1}\|_\infty \leq 1/(1-2\delta)$.

Pour obtenir les majorations d'erreur d'interpolation on définit la fonction d'écart $e(\cdot)$ par $e(x) = f(x) - s(x)$, et on pose

$$E = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{N-1} \\ e_N \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_1) \\ \vdots \\ f(t_{N-1}) \\ f(t_N) \end{bmatrix},$$

où $e_i = f_i - s_i = f(x_i) - s(x_i)$. Ainsi $E = F - S$ et nous avons $AE = AF - Y$ car $AS = Y$. Mais chaque ligne du membre de droite $AF - Y$ est de la forme

$$L_j(f) = \sum_{i=0}^{N} f_iB_i(t_j) - f(t_j)$$

et on constate que $L_j(f) = 0$ lorsque $f(\cdot)$ est un polynôme de degré 1. Ainsi, du théorème de Peano ou à l'aide d'un développement de Taylor, nous obtenons

$$L_j(f) = \int_a^b K_j(\theta)f^{(2)}(\theta)\,d\theta$$

pour toute fonction $f(\cdot) \in C^2[a,b]$, et

$$K_j(\theta) = L_{j,x}\left[(x-\theta)_+^1\right] = \sum_{i=0}^{N}(x_i-\theta)_+^1 B_i(t_j) - (t_j-\theta)_+^1.$$

Mais $K_j(\theta)$ est non nul sur un intervalle de longueur au plus h. En effet nous avons pour $t_j = x_j - \delta_j h_j$ $(0 \le \delta_j < \frac{1}{2})$:

$$K_j(\theta) = \begin{cases} \dfrac{(x_j-t_j)(\theta-x_{j-1})}{h_j} & \text{lorsque } x_{j-1} \le \theta \le t_j, \\ \dfrac{(x_j-\theta)(t_j-x_{j-1})}{h_j} & \text{lorsque } t_j \le \theta \le x_j, \\ 0 & \text{ailleurs;} \end{cases}$$

et pour $t_j = x_j + \delta_j h_{j+1}$ $(0 \le \delta_j < \frac{1}{2})$:

$$K_j(\theta) = \begin{cases} \dfrac{(x_{j+1}-t_j)(\theta-x_j)}{h_{j+1}} & \text{lorsque } x_j \le \theta \le t_j, \\ \dfrac{(x_{j+1}-\theta)(t_j-x_j)}{h_{j+1}} & \text{lorsque } t_j \le \theta \le x_{j+1}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Alors

$$\int_a^b |K_j(\theta)|\, d\theta \le \frac{(1-\delta_j)\delta_j}{2}h^2 \le \frac{(1-\delta)\delta}{2}h^2,$$

d'où

$$|L_j(f) \le \frac{(1-\delta)\delta}{2}h^2 \|f^{(2)}\|_\infty$$

et la majoration d'erreur aux nœuds de la partition est

$$\|E\|_\infty \le \frac{(1-\delta)\delta}{2(1-2\delta)}h^2\|f^{(2)}\|_\infty. \tag{2.6}$$

Par interpolation linéaire de la fonction d'écart $e(x)$ sur l'intervalle $[x_{i-1},x_i]$ on a que pour chaque $x \in [x_{i-1},x_i]$ il existe $\xi_x \in [x_{i-1},x_i]$ tel que

$$e(x) = \frac{1}{h_i}\left[(x_i-x)e_{i-1} + (x-x_{i-1})e_i\right] + \frac{1}{2}f^{(2)}(\xi_x)(x-x_{i-1})(x-x_i) \tag{2.7}$$

puisque $e^{(2)}(x) = f^{(2)}(x)$ (voir [1, p. 52]). Cette dernière équation combinée à (2.6) nous donne la borne (2.4).

Finalement, pour obtenir la borne (2.5), on peut écrire pour chaque $x \in [x_{i-1},x_i]$

$$e^{(1)}(x) = f^{(1)}(x) - s^{(1)}(x) = f^{(1)}(x) - \frac{s_i - s_{i-1}}{h_i} = f^{(1)}(x) - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{e_i - e_{i-1}}{h_i}.$$

Mais l'expression

$$L_x(f) = f^{(1)}(x) - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

est une fonctionnelle linéaire qui s'annule lorsque $f(\cdot)$ est un polynôme de degré 1 et pour chaque x fixé dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, d'où

$$L_x(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} K_x(\theta) f^{(2)}(\theta)\, d\theta$$

avec

$$K_x(\theta) = L_x\left[(x-\theta)_+^1\right] = (x-\theta)_+^0 - \left[\frac{(x_i-\theta)_+^1 - (x_{i-1}-\theta)_+^1}{h_i}\right].$$

Mais

$$K_x(\theta) = \begin{cases} \frac{(\theta - x_{i-1})}{h_i} & \text{pour } x_{i-1} < \theta < x, \\ -\frac{(x_i-\theta)}{h_i} & \text{pour } x < \theta < x_i; \end{cases}$$

ainsi

$$\int_a^b |K_x(\theta)|\, d\theta = \frac{(x - x_{i-1})^2 + (x_i - x)^2}{2h_i} \leq \frac{h_i}{2}.$$

Nous avons donc

$$|\epsilon^{(1)}(x)| \leq \frac{h_i}{2} \|f^{(2)}\|_\infty + \frac{2}{h_i}\|E\|_\infty$$

et en utilisant (2.6) nous obtenons (2.5). □

3. Le problème d'histospline. Pour une fonction spline de degré 0 définie sur $[a, b]$ à l'aide de la partition $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^N$ nous avons

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N} s_{i-1/2}\chi_{(x_{i-1}, x_i]}(x)$$

où $\chi(\cdot)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle I, et les conditions sont

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} s(x)\, dx = y_j \quad \text{pour } j = 1, \ldots, N.$$

Observons qu'à partir de la suite $\{y_j\}_{j=1}^N$ on peut construire la suite $\{Y_j\}_{j=0}^N$ telle que Y_0 est arbitraire et

$$Y_j = Y_0 + \sum_{k=1}^{j} y_k \quad (j = 1, \ldots, N),$$

et résoudre le problème (PI) suivant : «trouver une fonction spline $S(\cdot)$ de degré 1 telle que $S(t_j) = y_j$ $(j = 0, \ldots, N)$». Ainsi $s(x) = S^{(1)}(x)$ est une fonction spline de degré 0 solution de la partie (a) de (PH). De plus si les y_j vérifient

$$y_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\xi)\, d\xi$$

pour une fonction $f \in C^1[a, b]$, la solution $S(\cdot)$ du problème (PI) précédent vérifie $\|F^{(k)} - S^{(k)}\| = O(h^{2-k})$ pour $k = 0$ et 1 où $F(x) = Y_0 + \int_{t_0}^x f(\xi)\, d\xi$, et alors $\|f - s\|_\infty = O(h)$.

En résumé nous avons le résultat suivant:

Théorème 2. *Soit* $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^{N}$ *une partition de l'intervalle* $[a, b]$ *et* $\{t_j\}_{j=0}^{N}$ *une suite vérifiant la propriété* (C). *Alors*

(a) *existence et unicité: Pour toute suite de valeurs* $\{y_j\}_{j=0}^{N}$ *il existe une et une seule fonction spline* $s(\cdot)$ *de degré* 0 *telle que*

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} s(\xi)\, d\xi = y_j \quad (j = 1, \ldots N);$$

(b) *majoration d'erreur: si* $f(\cdot)$ *est une fonction de classe* $C^1[a, b]$ *et*

$$y_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\xi)\, d\xi \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

vérifie

$$\|f - s\|_\infty \leq \left[\frac{(1-\delta)\delta\gamma(\Delta)}{(1-2\delta)} + \frac{1}{2}\right] h \|f^{(1)}\|_\infty$$

où h *est le pas de la partition,* $\gamma(\Delta)$ *est la constante de régularité de la partition* Δ *et* δ *est définie à l'aide de la condition* (C).

4. Les problèmes d'interpolation et d'histospline périodiques. Pour présenter et traiter les problèmes périodiques on construit les extensions périodiques infinies des suites $\{x_j\}_{j=0}^{N}$, $\{t_j\}_{j=0}^{N}$ et $\{y_j\}_{j=0}^{N}$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} &\{x_j\}_{j\in Z} \quad \text{où } x_{j+lN} = x_j + l(b-a), \\ &\{t_j\}_{j\in Z} \quad \text{où } t_{j+lN} = t_j + l(b-a), \\ &\{y_j\}_{j\in Z} \quad \text{où } y_{j+lN} = y_j. \end{aligned}$$

pour tout $j = 0, \ldots, N-1$ et $l \in Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Notons que dans le cas périodique $t_N = t_0 + (b-a)$ et $y_0 = y_N$ (ce qui n'est pas nécessaire dans le cas non périodique). Nous dirons que les suites infinies $\{x_j\}_{j\in Z}$, $\{t_j\}_{j\in Z}$ et $\{y_j\}_{j\in Z}$ sont des suites infinies périodiques.

D'après les définitions précédentes, on obtient

$$h_{j+lN} = h_j, \quad \alpha_{j+lN} = \alpha_j \quad \text{et} \quad \beta_{j+lN} = \beta_j$$

pour tout $j = 0, 1, \ldots, N-1$ et $l \in Z$. On peut également définir les fonctions de base $B_i(x)$ pour tout $i \in Z$ et $x \in R$, et nous avons

$$B_{i+lN}(x) = B_i\big(x - l(b-a)\big).$$

La condition sur la suite $\{t_j\}_{j\in Z}$, dans le cas périodique, est

$$(\mathrm{C_p}) \qquad x_j - \frac{1}{2}h_j < t_j < x_j + \frac{1}{2}h_{j+1} \quad \text{pour tout } j \in Z.$$

Pour le problème d'interpolation périodique, la fonction spline périodique de degré 1 peut s'écrire

$$s(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i B_i(x)$$

avec $s_i = s_{i+lN}$ pour $i = 0, \dots, N-1$ et $l \in Z$.

De façon plus générale on peut étendre une fonction $f(\cdot) \in C_p^k[a,b]$ en une fonction $f(\cdot) \in C^k(R)$ de période $b-a$ en posant $f(\xi) = f(x)$ lorsque $\xi = x + l(b-a)$ pour un certain $x \in [a,b]$ et $l \in Z$. Dans ce qui suit on identifie $f(\cdot) \in C_p^k[a,b]$ et son extension périodique $f(\cdot) \in C^k(R)$ de période $b-a$.

le problème d'interpolation périodique s'énonce alors

$$(\mathrm{PI_p}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(a)} & \text{pour une suite périodique } \{y_j\}_{j\in Z} \text{ trouver une fonction spline} \\ & \text{périodique } s(\cdot) \text{ de degré 1 telle que } s(t_j) = y_j \text{ pour tout } j \in Z; \\ \text{(b)} & \text{si } f(\cdot) \text{ est une fonction de classe } C_p^2[a,b] \text{ et } y_j = f(t_j) \text{ montrer} \\ & \text{que l'unique fonction spline périodique de degré 1 telle que} \\ & s(t_j) = y_j \ (j \in Z) \text{ vérifie } \|f^{(k)} - s^{(k)}\|_\infty = O(h^{2-k}) \text{ pour} \\ & k = 0 \text{ et } 1. \end{array} \right.$$

Ce problème est résolu de façon identique au problème (PI) non périodique et le théorème 1, interprété en considérant la périodicité, donne le résultat.

Notons cependant que le système à résoudre afin d'obtenir les s_i est un système quasi tridiagonal de N équations à N inconnues de la forme $Y = A_p S$ où

$$Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}, A_p = \begin{bmatrix} 1-(\alpha_0+\beta_0) & \beta_0 & & & \alpha_N \\ \alpha_1 & 1-(\alpha_1+\beta_1) & \beta_1 & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & \alpha_{N-2} & 1-(\alpha_{N-2}+\beta_{N-2}) & \beta_{N-2} & \\ \beta_{N-1} & & \alpha_{N-1} & 1-(\alpha_{N-1}+\beta_{N-1}) & \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{N-1} \end{bmatrix}.$$

De même le problème d'histospline périodique s'énonce

$$(\mathrm{PH_p}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{(a)} & \text{pour une suite périodique } \{y_j\}_{j\in Z} \text{ trouver une fonction spline} \\ & \text{périodique } s(\cdot) \text{ de degré 0 telle que } \int_{t_{j-1}}^{t_j} s(\xi)\,d\xi = y_j \text{ pour} \\ & j \in Z; \\ \text{(b)} & \text{si } f(\cdot) \text{ est une fonction de classe } C_p^1[a,b] \text{ et } y_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\xi)\,d\xi, \\ & \text{montrer que l'unique fonction spline périodique } s(\cdot) \text{ de degré 0} \\ & \text{telle que } \int_{t_{j-1}}^{t_j} s(\xi)\,d\xi = y_j \text{ vérifie } \|f - s\|_\infty = O(h). \end{array} \right.$$

Comme pour le résultat précédent, ce problème est résolu de façon identique au problème (PH) non périodique et le théorème 2, interprété en considérant la périodicité, donne le résultat.

English extended abstract. Let $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^N$ be a partition of $[a,b]$ such that $a = x_0 < x_1 \cdots < x_i < \cdots < x_N = b$. If $h_i = x_i - x_{i-1}$ is the length of the interval $[x_i, x_{i-1}]$, the mesh size of the partition is $h = \max_i h_i$ and the mesh ratio is $\gamma(\Delta) = h/\min_i h_i$.

A function $s(\cdot)$ is a spline of degree n defined on $[a,b]$ for the partition Δ if $s(\cdot) \in C^{n-1}[a,b]$ and, on each interval (x_i, x_{i-1}), $s(\cdot)$ is represented by a polynomial of degree at most n (for $n = 0$, $C^{-1}[a, b]$ denotes the set of bounded functions on $[a, b]$. The spline is periodic if $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b)$ for $k = 0, \dots, n-1$.

Let $\{t_j\}_{j=0}^N$ be a sequence such that

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} a = x_0 \le t_0 < x_0 + \frac{1}{2}h_1, \\ x_j - \frac{1}{2}h_j < t_j < x_j + \frac{1}{2}h_{j+1} \quad (j = 1, \dots, N-1), \\ x_N - \frac{1}{2}h_N < t_n \le x_N = b, \end{cases}$$

We define $\delta = \max_j \delta_j$ where

$$\delta_j = \frac{(x_j - t_j)_+}{h_j} + \frac{(t_j - x_j)_+}{h_{j+1}}$$

for $j = 0, \dots, N$ and $(x)_+$ is 0 if $x \le 0$ or x if $x \ge 0$. Under (C) we have $0 \le \delta < \frac{1}{2}$.

For any sequence of data $\{y_j\}_{j=0}^N$, we show that the interpolating spline $s(\cdot)$ of degree 1 such that $s(t_j) = y_j$ $(j = 0, \dots, N)$ exists, and if $f(\cdot) \in C^2[a, b]$ and $y_j = f(t_j)$ $(j = 0, \dots, N)$ then

$$\|f - s\|_\infty \le \left[\frac{(1-\delta)\delta}{2(1-2\delta)} + \frac{1}{8}\right] h^2 \|f^{(2)}\|_\infty$$

and

$$\|f^{(1)} - s^{(1)}\|_\infty \le \left[\frac{(1-\delta)\delta\gamma(\Delta)}{(1-2\delta)} + \frac{1}{2}\right] h \|f^{(2)}\|_\infty.$$

We extend this result to histosplines. We consider any sequence of data $\{y_j\}_{j=1}^N$, we show that a spline $s(\cdot)$ of degree 0 such that

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} s(\xi)\, d\xi = y_i \quad (j = 1, \dots, N)$$

exists, and if $f(\cdot) \in C^1[a, b]$ and $y_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\xi)\, d\xi$ $(j = 1, \dots, N)$ then

$$\|f - s\|_\infty \le \left[\frac{(1-\delta)\delta\gamma(\Delta)}{(1-2\delta)} + \frac{1}{2}\right] h \|f^{(1)}\|_\infty.$$

The proofs of these results are based on the diagonal dominance property of a tridiagonal matrix, and on the Peano Kernel Theorem.

We also present similar results for the periodic cases.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. D. Conte et C. de Boor, *Elementary Numerical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1980.
2. F. Dubeau et J. Savoie, *Splines périodiques avec partage uniforme de la droite réelle*, Utilitas Math. **32** (1987), 111–120.
3. ———, *Développements asymptotiques de fonctions splines avec partage uniforme de la droite réelle*, SIAM J. Numer. Anal. **26** (1989), 468–479.
4. M. H. Schultz, *Spline Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973.

FRANÇOIS DUBEAU ET JEAN SAVOIE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
COLLÈGE MILITAIRE ROYAL DE SAINT-JEAN
SAINT-JEAN-SUR-RICHELIEU (QUÉBEC) CANADA J0J 1R0