Ann. Sci. Math. Québec, **16** (1), 1992, 1–24.

ALGÈBRES DE BOOLE NON COMMUTATIVES

YVES DIERS ET ÉLIE KOUDSI

RÉSUMÉ. Une notion d'algèbre de Boole non commutative est introduite. On montre qu'elles sont représentables par des faisceaux d'ensembles bipointés sur des espaces topologiques booléens. Une notion d'espace booléen non commutatif est introduite et une dualité de Stone est établie. Il est prouvé qu'une telle structure est toujours présente lorsqu'une structure algébrique peut être naturellement représentée par un faisceau booléen d'algèbres simples.

ABSTRACT. A notion of noncommutative Boolean algebra is introduced. It is shown that they can be represented by sheaves of bipointed sets on Boolean spaces. A notion of noncommutative Boolean space is introduced and a Stone duality is stated. It is proved that such a structure always appears whenever an algebraic structure can be naturally represented by a Boolean sheaf of simple algebras. See the English extended abstract at the end of the paper.

Introduction. La théorie des algèbres de Boole est bien connue. Ses applications sont multiples, variées, concrètes, dans de nombreuses disciplines : mathématiques, informatique, électronique, automatique, électrotechnique, gestion, recherche opérationnelle, *etc.* Nous proposons de développer ici la théorie des «algèbres de Boole non commutatives» en présumant qu'elle puisse s'appliquer dans les disciplines précédemment citées. Nous avons effectivement trouvé des applications dans la représentation des algèbres par des faisceaux booléens d'algèbres simples.

Les «algèbres de Boole non commutatives», appelées dans la suite, algèbres booloïdes ou booloïdes, sont définies à partir de deux éléments distingués notés 0 et 1 et trois opérations binaires notées respectivement $\cdot$, $*$, $+$ qui représentent l'«intersection non commutative», la «réunion non commutative», la «différence symétrique» commutative. On peut montrer que cette notion est équivalente à celle d'«algèbre à comparaison» introduite par J.F. Kennison mais définie à l'aide d'une opération de comparaison quaternaire

Une algèbre de Boole est une algèbre booloïde dont les éléments distingués sont 0 et 1, et les opérations sont : $a \cdot b = a \wedge b$, $a * b = a \vee b$, $a + b = (a \wedge b') \vee (a' \wedge b)$. Réciproquement, une algèbre booloïde dont l'opération $\cdot$ est commutative, est une algèbre de Boole pour les opérations : $a \wedge b = a \cdot b$, $a \vee b = a * b$, $a' = 1 + a$. Un élément a d'une algèbre booloïde A est dit symétrique si $a + 0 = a$. L'ensemble $\mathrm{sym}(A)$ des éléments symétriques de A est une algèbre de Boole isomorphe au quotient de A par la relation d'équivalence associée à une relation de préordre sur A. C'est l'algèbre de Boole couniverselle associée à l'algèbre booloïde A.

La théorie des algèbres booloïdes se développe en parallèle avec la théorie classique des algèbres de Boole jusqu'à un analogue de la dualité de Stone.

Reçu le 4 juin 1991 et, sous forme définitive, le 20 décembre 1991.

Les espaces booloïdes sont définis comme étant des espaces topologiques séparés étalés sectionnés sur des espaces topologiques booléens. L'ensemble des sections ouvertes et fermées d'une espace booloïde est une algèbre booloïde. La dualité booloïdienne exprime que toute algèbre booloïde est précisément de cette forme.

Une théorie algébrique booloïde est une théorie algébrique ayant au moins deux constantes notées 0 et 1 et trois opérations binaires notées $\cdot$, $*$, $+$ vérifiant les axiomes de booloïdes et une condition de compatibilité. On montre que les algèbres d'une théorie algébrique booloïde sont naturellement représentables par des faisceaux booléens d'algèbres simples, et réciproquement qu'une théorie algébrique ayant au moins deux constantes séparées et dont les algèbres sont naturellement représentables par des faisceaux booléens d'algèbres simples est nécessairement une théorie algébrique booloïde.

De nombreuses preuves sont omises.

1. Algèbres booloïdes.

1.1 Définition. Une *algèbre booloïde* ou *booloïde* est un ensemble A muni de deux éléments distingués, notés 0 et 1, et trois opérations binaires notées respectivement $\cdot$, $*$, $+$ satisfaisant les axiomes suivants :

(1) L'opération $\cdot$ est associative, symétrique (c'est-à-dire vérifiant $a \cdot b \cdot c = b \cdot a \cdot c$), et admet 1 comme unité à gauche.
(2) L'opération $*$ est associative et admet 0 comme unité.
(3) L'opération $+$ est commutative et vérifie $a + a = 0$.
(4) L'opération $\cdot$ est distributive par rapport à $*$ et distributive à gauche par rapport à $+$.
(5) $a \cdot (a * b) = a$.
(6) $(a + b) * 1 = 1$.
(7) $(a + b) * a = (a + b) * b$.

L'opération $+$ est parfois notée $\dashv$.

On note $B\grave{o}\grave{o}l$ la catégorie des booloïdes et morphismes de booloïdes *i.e.* applications préservant les opérations.

2. Exemples de booloïdes.

2.1 Les ensembles bipointés. Un ensemble *bipointé* est un ensemble A ayant deux éléments distingués 0 et 1. C'est un booloïde pour les trois opérations :

$$a \cdot b = \begin{cases} a & \text{si } a = 0 \\ b & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \qquad a * b = \begin{cases} b & \text{si } a = 0 \\ a & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \qquad a + b = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ 1 & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

2.2 Les anneaux fortement réguliers [1, 9]. Un anneau *fortement régulier* est un anneau unitaire vérifiant la propriété suivante : pour tout $a \in A$, il existe $\overline{a} \in A$ tel que $a^2\overline{a} = a$. C'est un booloïde pour les opérations suivantes :

$$a \cdot b = a\overline{a}b, \quad a * b = a + (1 - a\overline{a})b \quad \text{et} \quad a \dashv b = (a - b)(\overline{a - b}).$$

Les anneaux réduits réguliers et les anneaux commutatifs réguliers sont des cas particuliers.

2.3 Les anneaux de Baer commutatifs [5]. Un *anneau de Baer* commutatif est un anneau commutatif unitaire A muni d'une opération unaire e satisfaisant les axiomes suivants :

(1) $e(0) = 0$;
(2) $e(x^2) = e(x)$;
(3) $xe(x) = x$;
(4) $e(xy) = e(x)e(y)$.

Un anneau de Baer commutatif est un booloïde pour les opérations suivantes :

$$x \cdot y = e(x)y, \quad x * y = x + \big(1 - e(x)\big)y \quad \text{et} \quad x \dashv y = e(x - y).$$

2.4 Les E-anneaux [7]. Un *E-anneau* est un anneau unitaire A muni d'une opération unaire e vérifiant les six axiomes suivants :

(E_1) $e(x)$ est idempotent central.
(E_2) $xe(x) = x$
(E_3) $e\big(e(x)\big) = e(x)$
(E_4) $e(-x) = e(x)$
(E_5) $e\big(1 - e(x)\big) = 1 - e(x)$
(E_6) $e(e(x)y) = e(x)e(y)$

D'après [4] les quatre axiomes suivants sont suffisants.

(1) $e(x)$ est un élément central
(2) $e(0) = 0$
(3) $xe(x) = x$
(4) $e\big(ye(x)\big) = e(y)e(x)$

Un E-anneau est un booloïde pour les opérations suivantes :

$$a \cdot b = e(a)b, \quad a * b = a + \big(1 - e(a)\big)b \quad \text{et} \quad a \dashv b = e(a - b).$$

2.5 Ensemble des sections globales d'un espace étalé. Soit E un espace étalé séparé sur un espace booléen X muni de deux sections globales continues notées s_0 et s_1. L'ensemble $\Gamma(E)$ des sections globales continues de E est un booloïde pour les opérations suivantes :

$$(s \cdot t)(x) = \begin{cases} s(x) & \text{si } s(x) = s_0(x) \\ t(x) & \text{si } s(x) \neq s_0(x); \end{cases} \qquad (s * t)(x) = \begin{cases} t(x) & \text{si } s(x) = s_0(x) \\ s(x) & \text{si } s(x) \neq s_0(x); \end{cases}$$

$$(s + t)(x) = \begin{cases} s_0(x) & \text{si } s(x) = t(x) \\ s_1(x) & \text{si } s(x) \neq t(x). \end{cases}$$

2.6 Ensemble des sections ouvertes fermées d'un espace étalé séparé sectionné sur un espace booléen. Soit E un espace étalé séparé sur un espace booléen X muni d'une section globale continue notée σ_1. Une section ouverte fermée de E est un couple (U, s) formé d'un ouvert fermé U de X et d'une section continue s de E au dessus de U. L'ensemble $A(E)$ des sections ouvertes fermées de E est un booloïde dont les opérations sont définies par

– la section nulle est $(\emptyset, \emptyset)$

- la section unité est (X, σ_1)
- $(U,s)\cdot(V,t) = (U\cap V, t|_{U\cap V})$
- $(U,s)*(V,t) = (U\cup V, r)$ où r est la section définie par $r(x) = s(x)$ si $x\in U$ et $r(x) = t(x)$ si $x \in V - U$
- $(U,s)+(V,t) = (W, \sigma_1|_W)$ où $W = \{x \in U\cup V : s(x) \neq t(x)\}$.

2.7 Booloïdes commutatifs et algèbres de Boole. Un booloïde A est dit *commutatif* si l'opération $\cdot$ est commutative. Ce sont exactement les algèbres de Boole. En effet, tout booloïde commutatif A est une algèbre de Boole pour les opérations :

$$a\wedge b = a\cdot b, \quad a\vee b = a*b \quad \text{et} \quad a' = 1+a,$$

et alors l'opération $+$ est la différence symétrique. Inversement, toute algèbre de Boole A est un booloïde commutatif pour les opérations :

$$a\cdot b = a\wedge b, \quad a*b = a\vee b \quad \text{et} \quad a+b = (a\wedge b')\vee(a'\wedge b).$$

2.8 Booloïdes et algèbres à comparaison [3, 6]**.** Une *algèbre à comparaison* est un ensemble A muni de deux éléments distingués notés 0 et 1 et d'une opération quaternaire c vérifiant les six axiomes suivants :

(C1) $c(a,a,x,y) = x$.
(C2) $c(a,b,x,x) = x$.
(C3) $c(a,b,x,y) = c(b,a,x,y)$.
(C4) $c(a,b,a,b) = b$.
(C5) $c(0,1,x,y) = y$.
(C6) $c\big(a,b,c(x_1,x_2,x_3,x_4),c(y_1,y_2,y_3,y_4)\big) =$
$$c\big(c(a,b,x_1,y_1),c(a,b,x_2,y_2),c(a,b,x_3,y_3),c(a,b,x_4,y_4)\big).$$

Une algèbre à comparaison A est un booloïde pour les opérations suivantes :

$$a\cdot b = c(0,a,0,b), \quad a*b = c(0,a,b,a) \quad \text{et} \quad a+b = c(a,b,0,1).$$

Réciproquement, un booloïde A est une algèbre à comparaison dont l'opération quaternaire $c\colon A^4 \to A$ est définie par $c(a,b,x,y) = [1+(a+b)]\cdot x*(a+b)\cdot y$. En fait, il y a une équivalence entre les deux notions.

3. Quelques règles de calcul dans les algèbres booloïdes. Dans tout booloïde, on a les règles de calcul suivantes :

(B1) 1 est un élément absorbant à gauche pour l'opération $*$.
(B2) 0 est un élément absorbant pour l'opération $\cdot$.
(B3) Les deux opérations $\cdot$ et $*$ sont idempotentes.
(B4) $(a+b)\cdot 1 = a+b$
(B5) $(a+1)*a = 1$.
(B6) $a+0 = a\cdot 1$.
(B7) $1+0 = 1$.
(B8) $(a*b)\cdot a = (b*a)\cdot a = a$.
(B9) $(a*b)\cdot 1 = (b*a)\cdot 1$.
(B10) $(a*b)\cdot(a+b) = a+b$.

(B11) L'opération $*$ est distributive à gauche par rapport à l'opération $\cdot$.
(B12) $a \cdot b = b \Leftrightarrow a * b = a$.
(B13) $(a \cdot b = a \text{ et } b \cdot a = b) \Rightarrow a = b$.
(B14) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow b \cdot a = 0$.
(B15) $a + b = 0 \Leftrightarrow a = b$.

(C0) L'élément $a' = 1 + a \cdot 1$ s'appelle le *complément* de a.
(C1) $a \cdot a' = a' \cdot a = 0$
(C2) $(a + 0)' = a'$
(C3) $a + a' = 1$
(C4) 0 et 1 sont des éléments compléments l'un de l'autre.
(C5) $a' * b' = b' * a'$.
(C6) $\left.\begin{array}{r} a \cdot b = 0 \\ a * b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = b'$.
(C7) $(a \cdot b)' = a' * b'$.
(C8) $(a * b)' = a' \cdot b'$.
(C9) $(a')' = a \cdot 1$.
(C10) $a' + b' = b \cdot a' * a \cdot b'$.
(C11) $(a + b)' \cdot a = (a + b)' \cdot b$.
(C12) $a \cdot b * a' \cdot c = a' \cdot c * a \cdot b$.
(C13) $\left.\begin{array}{r} a \cdot b = a \cdot c \\ a' \cdot b = a' \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow b = c$.

(S0) Un élément e est dit *symétrique* s'il vérifie l'une des propriétés suivantes :
(S1) $e + 0 = e$
(S2) $e * 1 = 1$
(S3) $e \cdot 1 = e$
(S4) $e' * e = 1$.
(S5) $\exists a \; \exists b,\; e = a + b$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer directement ces formules à partir des axiomes ou bien, comme le propose Jean Bénabou, d'utiliser la représentation d'un booloïde comme un sous-booloïde d'un produit d'ensembles bipointés, et se contenter alors de vérifier les formules pour les ensembles bipointés.

3.1 Théorème. *L'ensemble des éléments symétriques de A, noté* $\mathrm{sym}(A)$, *forme un sous-booloïde commutatif de A, donc une algèbre de Boole. C'est l'algèbre de Boole couniverselle associée à A.*

4. Relation de préordre dans un booloïde.

4.1 Définition. Dans un booloïde A, on définit la relation de préordre, $a \leqslant b$, par l'une des relations équivalentes suivantes :

(1) $a = b \cdot a$.
(2) $a \cdot b \cdot 1 = a \cdot 1$.
(3) $a \cdot b' = 0$.
(4) $b' \cdot a' = b'$.

4.2 Théorème (Bénabou). *Le préordre sur A induit l'ordre habituel sur l'algèbre de Boole* $\mathrm{sym}(A)$*, et l'injection* $\mathrm{sym}(A) \to A$ *est une équivalence d'ensembles préordonnés* (i.e. *de catégories) dont l'équivalence quasi inverse* $e\colon A \to \mathrm{sym}(A)$ *associe à l'élément a, l'élément* $e(a) = a \cdot 1$.

4.3 Corollaire. *A est une préalgèbre de Boole* i.e. *un prétreillis distributif borné précomplémenté dans lequel $a \cdot b$ est une borne inférieure de a et b, $a * b$ est une borne supérieure de a et b, 0 est borne inférieure de A, 1 est borne supérieure de A, 0 est une borne inférieure de a et a', et 1 est une borne supérieure de a et a'.*

4.4 Corollaire. *La relation d'équivalence associée au préordre : $a \equiv b$ si et seulement si $a \cdot 1 = b \cdot 1$, est compatible avec les opérations $\cdot$ et $*$ et le complémentaire, et le quotient $A/\equiv$ est une algèbre de Boole isomorphe à* $\mathrm{sym}(A)$.

4.5 Corollaire.

(E0) $e(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(E1) $e(1) = 1$.
(E2) $e\big(e(x)\big) = e(x)$.
(E3) $x \cdot e(x) = e(x) = e(x) * x$.
(E4) $e(x) \cdot x = x = x * e(x)$.
(E5) $e(x \cdot y) = e(y \cdot x) = e(x) \cdot e(y)$.
(E6) $e(x * y) = e(y * x) = e(x) * e(y)$.
(E7) $x \cdot y = e(x) \cdot y$.
(E8) $e(x) = x + 0$.

5. Idéaux, filtres et congruences.

5.1 Définition. Un *idéal* I d'un booloïde A est un sous-ensemble de A tel que :

(1) $0 \in I$
(2) $(a \in A$ et $x \in I) \Rightarrow x \cdot a \in I$
(3) $(x \in I$ et $y \in I) \Rightarrow x * y \in I$

Un *idéal propre* est caractérisé par la condition supplémentaire $1 \notin I$.

5.2 Proposition. *$x \in I$ si et seulement si $e(x) \in I$.*

5.3 Proposition.

(1) *Si I est un idéal de A, l'ensemble* $\mathrm{sym}(I) = I \cap \mathrm{sym}(A)$ *est un idéal de* $\mathrm{sym}(A)$.
(2) *Si J est un idéal de* $\mathrm{sym}(A)$ *l'ensemble $I_J = \{x \in A : e(x) \in J\}$ est un idéal de A.*
(3) *Il y a un isomorphisme entre l'ensemble ordonné des idéaux de A et l'ensemble ordonné des idéaux de* $\mathrm{sym}(A)$.

5.4 Proposition. *Tout idéal de A est engendré par l'ensemble de ses éléments symétriques.*

5.5 Proposition.

(1) *Si I et J sont deux idéaux de A, alors $I \cdot J = \{x \cdot y : x \in I$ et $y \in J\}$ est un idéal de A. En outre, $I \cdot J = I \cap J$.*
(2) *Si I et J sont deux idéaux de A, alors $I * J = \{x * y : x \in I$ et $y \in J\}$ est un idéal de A. C'est l'idéal engendré par l'union $I \cup J$ et c'est la borne supérieure de I et J dans l'ensemble ordonné des idéaux de A.*

(3) *Soit* $(J_i)_{i\in I}$ *une famille d'idéaux de* A *et soit* $\mathcal{P}$ *l'ensemble des parties finies de* I. *Alors* $\bigstar_{i\in I} J_i = \bigcup_{I_0\in\mathcal{P}} (\bigstar_{i\in I_0} J_i)$ *est un idéal de* A. *Cet idéal est la borne supérieure de* $(J_i)_{i\in I}$ *dans l'ensemble ordonné des idéaux de* A.

5.6 Proposition. *L'idéal principal de* A *engendré par un élément* $a \in A$ *est* $(a) = \{x \in A : a \cdot x = x\}$.

Démonstration. En effet soit $(a) = \{x \in A : a \cdot x = x\}$. Alors $0 \in (a)$. Si $b \in A$ et $x \in (a)$, alors $a \cdot (b \cdot x) = b \cdot a \cdot x = b \cdot x$ donc $b \cdot x \in (a)$. En outre, si $x \in (a)$ et $y \in (a)$, on a $a \cdot (x * y) = a \cdot x * a \cdot y = x * y$ d'où $x * y \in (a)$. Par suite (a) est un idéal de A contenant a et c'est clairement le plus petit. □

5.7 Proposition. *Tout idéal finiment engendré est principal.*

Démonstration. Considérons I_G où G est un ensemble fini. Si $G = \emptyset$, $I_G = (0) = \{0\}$. Si $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_q\}$, posons $g = g_1 * g_2 * \cdots * g_q$ alors $I_G = (g)$ car $(g_1 * \cdots * g_q) \cdot g_i = g_i$ donc $g_i \in (g)$ et (g) est clairement le plus petit idéal contenant $g_1, \ldots, g_q$. □

5.8 Définition. Soit I un idéal de A. On définit sur A la *relation modulo* I par $x \equiv y (\operatorname{mod} I) \Leftrightarrow x + y \in I$.

5.9 Proposition. $x \equiv y (\operatorname{mod} I) \Leftrightarrow \exists a \in I$ *tel que* $a' \cdot x = a' \cdot y$.

Démonstration. Si $a = (x + y) \in I$, alors $a' \cdot x = a' \cdot y$ car $(x + y)' \cdot (x + y) = 0$. Réciproquement, si $a' \cdot x = a' \cdot y$ et $a \in I$ alors $a' \cdot (x + y) = 0$ et $a \in I$ donc $(x + y) \cdot (1 + a \cdot 1) = 0$ et par suite $x + y = (x + y) \cdot (a \cdot 1) \in I$ car $a \cdot 1 \in I$. □

5.10 Proposition. *La relation modulo I est une relation d'équivalence compatible avec la structure du booloïde* i.e. *une congruence de booloïde.*

Démonstration. Cette relation est immédiatement réflexive et symétrique. Supposons $x \equiv y (\operatorname{mod} I)$ et $y \equiv z (\operatorname{mod} I)$. Alors il existe a, $b \in I$ tels que $a' \cdot x = a' \cdot y$ et $b' \cdot y = b' \cdot z$ (proposition 5.9). L'élément $c = a * b \in I$ est tel que $c' \cdot x = a' \cdot b' \cdot x = b' \cdot a' \cdot y = a' \cdot b' \cdot z = c' \cdot z$. Par conséquent $x \equiv z (\operatorname{mod} I)$. La relation est donc transitive. Supposons $x \equiv y (\operatorname{mod} I)$ et $x_1 \equiv y_1 (\operatorname{mod} I)$. Alors il existe $a, b \in I$ tels que $a' \cdot x = a' \cdot y$ et $b' \cdot x_1 = b' \cdot y_1$. Considérons l'élément $c = a * b$ de I. Alors $c' \cdot x \cdot x_1 = a' \cdot b' \cdot x \cdot x_1 = a' \cdot x \cdot b' \cdot x_1 = a' \cdot y \cdot b' \cdot y_1 = c' \cdot y \cdot y_1$ c'est-à-dire $x \cdot x_1 \equiv y \cdot y_1 (\operatorname{mod} I)$. De même, $c' \cdot (x * x_1) = a' \cdot b' \cdot x * a' \cdot b' \cdot x_1 = a' \cdot b' \cdot y * a' \cdot b' \cdot y_1 = c' \cdot (y * y_1)$. En outre $c' \cdot (x + x_1) = a' \cdot b' \cdot x + a' \cdot b' \cdot x_1 = a' \cdot b' \cdot y + a' \cdot b' \cdot y_1 = c' \cdot (y + y_1)$. La relation est donc compatible. □

5.11 Notation. La congruence modulo l'idéal engendré par un élément symétrique e s'appelle *la congruence modulo* e et se note $\operatorname{mod}(e)$.

5.12 Proposition. $x \equiv y (\operatorname{mod}(e))$ *si et seulement si* $e \cdot (x + y) = x + y$.

5.13 Proposition. *Pour tout booloïde* A, *l'application qui associe à un idéal* I *de* A, *la congruence modulo* I, *établit une correspondance biunivoque entre l'ensemble ordonné des idéaux de* A *et l'ensemble ordonné des congruences sur* A.

Démonstration. Soit I un idéal de A. On sait que la relation modulo I définie dans le booloïde A est une congruence. Réciproquement, si R est une relation de congruence sur $A, I_R = \{x \in A : x \equiv 0 \cdot (R)\}$ est un idéal de A. On a $x \in I \Leftrightarrow x + 0 \in I \Leftrightarrow x \equiv 0 \cdot (\mathrm{mod}\,(I)) \Leftrightarrow x \in I_{\mathrm{mod}\,(I)}$, donc $I = I_{\mathrm{mod}\,(I)}$. En outre, on a d'une part

$$\begin{aligned} x \equiv y \cdot (R) \Rightarrow x + y \equiv (y+y) \cdot (R) \Rightarrow x + y \equiv 0 \cdot (R) \\ \Rightarrow x + y \in I_R \Rightarrow x \equiv y \cdot (\mathrm{mod}\,(I_R)) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} x \equiv y \cdot (\mathrm{mod}\,(I_R)) &\Rightarrow x + y \equiv 0 \cdot (R) \\ &\Rightarrow (0 * x \equiv [(x+y) * x] \cdot (R) \quad \text{et} \quad 0 * y \equiv [(x+y) * y] \cdot (R)) \\ &\Rightarrow x \equiv y \cdot (R). \end{aligned}$$

Il en résulte $R = \mathrm{mod}\,(I_R)$. □

5.14 Définition. Un *filtre* F d'un booloïde A est un sous-ensemble de A tel que :

(1) $1 \in F$
(2) $(a \in A$ et $x \in F) \Rightarrow a * x \in F$
(3) $x \in F, y \in F \Rightarrow x \cdot y \in F$.

Un *filtre propre* est caractérisé par la condition supplémentaire $0 \notin F$.

5.15 Proposition. *$x \in F$ si et seulement si $e(x) \in F$.*

5.16 Proposition.

(1) *Si F est un filtre de A, l'ensemble* $\mathrm{sym}(F) = F \cap \mathrm{sym}(A)$ *est un filtre de* $\mathrm{sym}(A)$.
(2) *Si Φ est un filtre de* $\mathrm{sym}(A)$, *l'ensemble $F_\Phi = \{x \in A : e(x) \in \Phi\}$ est un filtre de A.*
(3) *Si F est un filtre de A, l'ensemble $I(F) = \{x \in A : \exists a \in F, a \cdot x = 0\}$ est un idéal de A.*
(4) *Si I est un idéal de A, l'ensemble $F(I) = \{x \in A : \exists a \in I, a * e(x) = 1\}$ est un filtre de A.*

5.17 Corollaire. *Il y a un isomorphisme entre l'ensemble ordonné des filtres de A, celui des filtres de* $\mathrm{sym}(A)$ *et celui des idéaux de A.*

5.18 Proposition. *Le filtre principal de A engendré par un élément $a \in A$ est $)a(= \{x \in A : x \cdot a = a\}$.*

Démonstration. Soit $)a(= \{x \in A : x \cdot a = a\}$. Alors $1 \in)a($, car $1 \cdot a = a$. Si $b \in A$ et $x \in)a($, alors $(b * x) \cdot a = b \cdot a * x \cdot a = b \cdot a * a = (b * a) \cdot a = a$ donc $b * x \in)a($. Enfin, si $x \in)a($ et $y \in)a($, on a $x \cdot y \cdot a = x \cdot a = a$ d'où $x \cdot y \in)a($. Par suite $)a($ est un filtre de A contenant a et c'est clairement le plus petit. □

5.19 Proposition. *Tout filtre finiment engendré est un filtre principal.*

Démonstration. Considérons F_G où G un ensemble fini. Si $G = \emptyset$, $F_G = \{1\} =)1($. Si $G = \{g_1, g_2, \ldots g_q\}$, posons $g = g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_q$ alors $F_G =)g($ car $g_i \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_q = g_1 \cdot g_2 \cdot \cdots \cdot g_q$ donc $g_i \in)g($ et $)g($ est clairement le plus petit filtre contenant g_1, g_2, $\ldots$, g_q. □

5.20 Définition. Soit F un filtre de A. On définit sur A *la relation modulo* F par $x \equiv y(\operatorname{mod} F) \Leftrightarrow \exists a \in F$ tel que $a \cdot x = a \cdot y$.

5.21 Proposition. *La congruence modulo un filtre F est identique à la congruence modulo l'idéal $I(F)$.*

Démonstration. Soit $x \equiv y(\operatorname{mod} F)$. Il existe $a \in F$ tel que $a \cdot x = a \cdot y$; alors $a \cdot (x + y) = 0$, donc $x + y \in I(F)$ et $x \equiv y(\operatorname{mod} I(F))$. Réciproquement, supposons $x \equiv y(\operatorname{mod} I(F))$. Alors $x + y \in I(F)$ donc, il existe $a \in F$ tel que $a \cdot (x + y) = 0$. Alors $a \cdot x = a \cdot y$ avec $a \in F$. Donc $x \equiv y(\operatorname{mod} F)$. □

5.22 Proposition. *Pour e, $f \in \operatorname{sym}(A)$ les relations suivantes sont équivalentes* :

(1) $e \leqslant f$
(2) $)f(\subseteq)e($
(3) $\operatorname{mod})f(\subseteq \operatorname{mod})e($.

En outre, $\operatorname{mod})e * f(= (\operatorname{mod})e() \cap (\operatorname{mod})f()$.

6. Idéaux premiers, filtres premiers et booloïdes simples.

6.1 Définition.

(1) Un idéal I est *premier* s'il est propre et vérifie $x \cdot y \in I \Rightarrow (x \in I$ ou $y \in I)$.
(2) Un idéal I est *maximal* s'il est propre et n'est proprement contenu dans aucun idéal propre de A.

6.2 Proposition. *Pour un idéal I d'un booloïde A, les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) *I est un idéal premier.*
(2) $\operatorname{sym}(I)$ *est un idéal maximal de* $\operatorname{sym}(A)$.
(3) *I est un idéal maximal.*
(4) *I est propre et, pour tout $x \in A$, $x \in I$ ou $x' \in I$.*
(5) *Pour tout couple (J_1, J_2) d'idéaux de A, on a $J_1 \cdot J_2 \subset I \Rightarrow (J_1 \subset I$ ou $J_2 \subset I)$.*

6.3 Définition.

(1) Un filtre F est *premier* s'il est propre et vérifie $x * y \in F \Rightarrow (x \in F$ou $y \in F)$.
(2) Un filtre F est *maximal* s'il est propre et n'est proprement contenu dans aucun filtre propre de A.

6.4 Proposition. *Pour un filtre F d'un booloïde A, les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) *F est un filtre premier;*
(2) *F est propre et pour tout x de A, $x \in F$ ou $x' \in F$;*
(3) *F est un filtre maximal.*
(4) $\operatorname{sym}(F)$ *est un filtre maximal de* $\operatorname{sym}(A)$.
(5) *$I(F)$ est un idéal premier.*

6.5 Définition. Un booloïde A est *simple* si $0 \neq 1$ et les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A ou de façon équivalente, les seuls filtres de A sont $\{1\}$ et A.

6.6 Proposition. *Pour un booloïde A, les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) *A est simple.*
(2) $\mathrm{sym}(A) = \{0, 1\}$.
(3) *A est isomorphe au quotient d'un booloïde B par un idéal (resp. filtre) premier.*

6.7 Proposition. *Les booloïdes simples sont exactement les ensembles bipointés par deux points distincts et les morphismes de booloïdes simples sont les applications injectives préservant les deux points.*

Démonstration. Soit A un booloïde simple. Il est bipointé par 0 et 1. Nous savons que $a \cdot b = e(a) \cdot b$ et que $e(a)$ est un élément symétrique. Donc si $a \neq 0$, $e(a) \neq 0$ et $a \cdot b = b$. En outre $0 \cdot b = 0$. Donc

$$a \cdot b = \begin{cases} a & \text{si } a = 0 \\ b & \text{si } a \neq 0. \end{cases}$$

La proposition (3) entraîne pour $a \neq 0$, $a * b = a$, donc

$$a * b = \begin{cases} b & \text{si } a = 0 \\ a & \text{si } a \neq 0. \end{cases}$$

De plus, si $a \neq b$, $a + b \neq 0$. Puisque $a + b$ est symétrique, $a + b = 1$. Donc

$$a + b = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ 1 & \text{si } a \neq b. \end{cases}$$

A est donc le booloïde canoniquement associé à un ensemble bipointé (exemple 2.1). Réciproquement, dans le booloïde canoniquement associé à un ensemble bipointé A, on a $a \cdot 1 = 1$ pour $a \neq 0$, donc $a = 1$ si a est symétrique. Donc $\mathrm{sym}(A) = \{0, 1\}$ et A est simple.

Soient A et B deux booloïdes simples, et $f \colon A \to B$ une injection vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Si $a = 0$ alors $a \cdot b = a$ et $f(a) = 0$, donc $f(a \cdot b) = f(a) = f(a) \cdot f(b)$. Si $a \neq 0$ alors $a \cdot b = b$ et $f(a) \neq 0$, donc $f(a \cdot b) = f(b) = f(a) \cdot f(b)$. On en déduit $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$. On montre d'une façon analogue les relations $f(a * b) = f(a) * f(b)$ et $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Par conséquent, $f \colon A \to B$ est un morphisme de booloïdes simples. Réciproquement, un morphisme de booloïdes $f \colon A \to B$ vérifie $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Il est injectif puisque si $a \neq b$ alors $a + b = 1$, donc $f(a) + f(b) = f(a + b) = f(1) = 1$, donc $f(a) \neq f(b)$. □

7. Spectres premiers. Soit A un booloïde et X_A l'ensemble des idéaux premiers de A.

7.1 Notation. Pour tout idéal J de A, notons

(1) $V(J) = \{p \in X_A : J \subset p\}$
(2) $D(J) = \{p \in X_A : J \not\subset p\}$

7.2 Proposition.

(1) $V(A) = \emptyset$
(2) $V(\{0\}) = X_A$
(3) *Pour toute famille $(J_i)_{i \in I}$ d'idéaux de A,*

$$V\Big(\mathop{\bigstar}_{i \in I} J_i\Big) = \bigcap_{i \in I} V(J_i).$$

(4) *Pour tout couple d'idéaux I et J de A, $V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$.*

7.3 Corollaire. *L'ensemble* $\{V(J) : J \in \mathrm{Id}(A)\}$ *est l'ensemble des fermés d'une topologie sur* X_A.

7.4 Définition. On appelle *spectre premier* de A et on le note $\mathrm{Spec}(A)$, l'ensemble X_A muni de la topologie dont l'ensemble des ouverts est $\{D(J) : J \in \mathrm{Id}(A)\}$ et l'ensemble des fermés est $\{V(J) : J \in \mathrm{Id}(A)\}$.

7.5 Notations. Pour $e \in \mathrm{sym}(A)$, notons

(1) $V(e) = \{p \in \mathrm{Spec}(A) : e \in p\}$.
(2) $D(e) = \{p \in \mathrm{Spec}(A) : e \notin p\}$.

7.6 Proposition.

(1) $D(e) = X_A - V(e)$
(2) $D(0) = \emptyset$ *et* $D(1) = X_A$
(3) $D(e \cdot w) = D(e) \cap D(w)$
(4) $D(e * w) = D(e) \cup D(w)$
(5) $D(e') = X_A - D(e) = V(e)$

7.7 Notations. Nous noterons $\mathcal{D}_A$ l'ensemble ordonné des parties de $\mathrm{Spec}(A)$ de la forme $D(e)$ avec $e \in \mathrm{sym}(A)$, et $\mathcal{D}_A^{\mathrm{op}}$ l'ensemble ordonné opposé de $\mathcal{D}_A$.

7.8 Proposition. $\mathrm{Spec}(A)$ *est un espace booléen homéomorphe à* $\mathrm{Spec}(\mathrm{sym}(A))$ *et dont l'ensemble ordonné des ouverts fermés est* $\mathcal{D}_A$.

7.9 Proposition. *Soit* $f\colon A \to B$ *un morphisme de booloïdes. Si* p *un idéal premier de* B, *alors* $f^{-1}(p)$ *est un idéal premier de* A. *L'application* $\mathrm{Spec}(f)\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ *définie par* $(\mathrm{Spec}(f))(p) = f^{-1}(p)$ *est continue.*

7.10 Préfaisceau structural. Soit A un booloïde. Définissons le foncteur $\widetilde{A}\colon \mathcal{D}_A^{\mathrm{op}} \to$ $\mathcal{B}$oòl par $\widetilde{A}(D(e)) = A/)_{e(}$ et $\widetilde{A}(D(e) \subset D(w))\colon \widetilde{A}(D(w)) \to \widetilde{A}(D(e))$ qui applique la classe d'équivalence de x modulo $)w($ sur la classe d'équivalence de x modulo $)e($.

7.11 Théorème. $\widetilde{A}$ *est un faisceau de booloïdes. En outre, la fibre de* $\widetilde{A}$ *au point* $p \in \mathrm{Spec}(A)$ *est* A/p, *et le booloïde des sections globales de* $\widetilde{A}$ *est isomorphe à* A.

Démonstration. Soient $(D(e_i))_{i\in[1,n]}$ une famille finie de $\mathcal{D}_A$ et $D(e)$ tel que $D(e) = \cup_{i\in[1,n]} D(e_i)$. Alors $e = e_1 * \cdots * e_n$. Soient $\overline{x}^e$ et $\overline{y}^e$ deux éléments de $\widetilde{A}(D(e))$ tels que les restrictions de $\overline{x}^e$ et $\overline{y}^e$ à chaque $D(e_i)$ soient égales, *i.e.* $\overline{x}^{e_i} = \overline{y}^{e_i}$ pour tout $i \in [1,n]$. Alors $x \equiv y\,(\bigcap_{i=1}^n \mathrm{mod}\,)e_i()$, donc $x \equiv y(\mathrm{mod}\,)e()$, (proposition 5.22). Cela signifie que $\overline{x}^e = \overline{y}^e$ dans $\widetilde{A}(D(e))$. Supposons maintenant donnés des $\overline{x_i}^{e_i} \in \widetilde{A}(D(e_i))$ tels que quelque soient $i, j \in [1,n]$, les restrictions de $\overline{x_i}^{e_i}$ et $\overline{x_j}^{e_j}$ à $(D(e_i) \cap D(e_j))$ soient égales. Alors $x_i \equiv x_j(\mathrm{mod}\,)e_i \cdot e_j()$ *i.e.* $e_i \cdot e_j \cdot x_i = e_i \cdot e_j \cdot x_j$. Posons $x = e_1 \cdot x_1 * e_2 \cdot x_2 * \cdots * e_n \cdot x_n$. Alors

$$\begin{aligned} e_i \cdot x &= e_i \cdot (e_1 \cdot x_1 * e_2 \cdot x_2 * \cdots * e_n \cdot x_n) = e_i \cdot e_1 \cdot x_1 * e_i \cdot e_2 \cdot x_2 * \cdots * e_i \cdot e_n \cdot x_n \\ &= e_i \cdot e_1 \cdot x_i * e_i \cdot e_2 \cdot x_i * \cdots * e_i \cdot e_n \cdot x_i = e_i \cdot (e_1 * e_2 * e_3 \cdots * 1 * \cdots * e_n) \cdot x_i = e_i \cdot x_i. \end{aligned}$$

Donc $x \equiv x_i(\mathrm{mod}\,)e_i()$. Donc il existe un $\overline{x}^e \in \widetilde{A}(D(e))$ dont la restriction à $D(e_i)$ est $\overline{x_i}^{e_i}$ pour tout $i \in [1,n]$. Ce qui prouve bien que le foncteur $\widetilde{A}$ est un faisceau. La fibre de $\widetilde{A}$ en p est

$$\widetilde{A_p} = \varinjlim_{e \notin p} \widetilde{A}(D(e)) = \varinjlim_{e \notin p} A/)_{e(} = \varinjlim_{e \notin p} A/(e') = \varinjlim_{e' \in p} A/(e') = A/p.$$

Enfin, $\widetilde{A}(X_A) = \widetilde{A}(D(1)) = A/)_{1(} \simeq A$. □

7.12 Définition. On appelle *faisceau structural* sur Spec(A) le faisceau de booloïdes sur l'espace topologique Spec(A) défini précédemment sur la base de topologie $\mathcal{D}_A$. On le note encore $\widetilde{A}$.

8. Espaces étalés bisectionnés sur espaces booléens.

8.1 Définition. Appelons *espace étalé bisectionné* sur un espace booléen X, un espace étalé sur X muni de deux sections globales continues disjointes. Il sera noté (E, X, π, s_0, s_1) ou simplement E.

8.2 L'espace étalé bisectionné associé à un booloïde. Soit A un booloïde. Nous utilisons les résultats de [4].

8.2.0 Notations. Notons $E_A = \{(p, \overline{a}) : p \in \text{Spec}(A) \text{ et } \overline{a} \in \widetilde{A_p}\}$, $\pi_A \colon E_A \to \text{Spec}(A)$ l'application définie par $\pi_A(p, \overline{a}) = p$, $s_0 \colon \text{Spec}(A) \to E_A$ l'application définie par $s_0(p) = (p, \overline{0})$ et $s_1 \colon \text{Spec}(A) \to E_A$ l'application définie par $s_1(p) = (p, \overline{1})$.

8.2.1 Théorème. *$(E_A, \text{Spec}(A), \pi_A, s_0, s_1)$ est un espace étalé séparé bisectionné sur l'espace booléen* Spec(A). *En outre, le booloïde $\Gamma(E_A)$ des sections globales de E_A est isomorphe à A.*

Démonstration. Le couple (E_A, π_A) est un espace étalé sur Spec(A), d'après Godement [4, chap. 2, pp. 109–112], dont une base d'ouverts de la topologie sur E_A est $\{D(e, \overline{x}) : e \in \text{sym}(A) \text{ et } \overline{x} \in A/)_{e(}\}$, où $D(e, \overline{x}) = \{(p, \overline{x}) \in E_A : e \notin p\}$. De plus, d'après [4, chap. 2, pp. 109–112], l'application $\sigma \colon A = \widetilde{A}(\text{Spec}(A)) \to \Gamma(E_A)$ définie, pour $a \in A$, par $\sigma(a) \colon \text{Spec}(A) \to E_A$ où $\sigma(a)(p) = (p, \overline{a})$ est bijective. Montrons que E_A est séparé. Soient a, $b \in A$. L'ensemble $\{p \in \text{Spec}(A) : \sigma(a)(p) = \sigma(b)(p)\} = \{p \in \text{Spec}(A) : a \equiv b(\text{mod}\,(p))\} = \{p \in \text{Spec}(A) : a + b \in p\} = V(a + b)$ est un fermé de Spec(A). Donc E_A est séparé d'après [4, proposition 2.12.1]. Les deux sections globales continues $\sigma(0) = s_0$ et $\sigma(1) = s_1$ sont disjointes puisque $\widetilde{A}_p \equiv A/p$ est un booloïde simple (proposition 6.7). Donc E_A est un espace étalé bisectionné sur Spec(A). L'application $\sigma \colon A \to \Gamma(E_A)$ est un morphisme de booloïdes, en vertu de la construction du booloïde $\Gamma(E_A)$ à partir des ensembles bipointés $\widetilde{A_p}$. Donc σ est un isomorphisme de booloïdes. □

8.3 Étude réciproque.

8.3.1 Lemme. *Soit E un espace étalé séparé bisectionné sur un espace booléen X. Si $x \in X$, alors $p(x) = \{s \in \Gamma(E) : s(x) = s_0(x)\}$ est un idéal premier du booloïde $\Gamma(E)$.*

Démonstration. On a $s_0 \in p(x)$ et $s_1 \notin p(x)$. Si $s \in p(x)$ et $t \in \Gamma(E)$ alors $(s \cdot t)(x) = s(x) \cdot t(x) = s_0(x) \cdot t(x) = s_0(x)$ donc $s \cdot t \in p(x)$. Si s, $t \in p(x)$, alors $(s * t)(x) = s(x) * t(x) = s_0(x) * s_0(x) = s_0(x)$ donc $s * t \in p(x)$. Donc $p(x)$ est un idéal propre de $\Gamma(E)$. Si $s \notin p(x)$ et $t \notin p(x)$, alors $s(x) \neq s_0(x)$ et $t(x) \neq s_0(x)$ donc $(s \cdot t)(x) = s(x) \cdot t(x) = t(x) \neq s_0(x)$ donc $s \cdot t \notin p(x)$. Par suite $p(x)$ est un idéal premier. □

8.3.2 Lemme. *Si E est un espace étalé séparé bisectionné sur un espace booléen X, alors* $\mathrm{Spec}(\Gamma(E)) = \{p(x) : x \in X\}$.

Démonstration. Rappelons que pour tout $s \in \Gamma(E)$, $X_s = \{x \in X : s(x) = s_0(x)\}$ est un ouvert fermé de X. Notons que

$$\begin{aligned} X_{s*t} &= \{x \in X : (s*t)(x) = s_0(x)\} = \{x \in X : s(x) * t(x) = s_0(x)\} \\ &= \{x \in X : s(x) = s_0(x) \text{ et } t(x) = s_0(x)\} \quad \text{(proposition 3)} \\ &= \{x \in X : s(x) = s_0(x)\} \cap \{x \in X : t(x) = s_0(x)\} = X_s \cap X_t. \end{aligned}$$

Notons encore que l'élément symétrique $e(s)$ associé à s dans $\Gamma(E)$ est tel que $X_{e(s)} = X_s$. Soit p un idéal premier de $\Gamma(E)$. Posons $X = \cap_{s \in p} X_s$. Supposons $X = \emptyset$. Puisque X est compact, il existe $s^1, \ldots, s^n$ dans p tels que $X_{s^1} \cap \cdots \cap X_{s^n} = \emptyset$. Posons $s = s^1 * \cdots * s^n$. D'après ce qui précède $X_{e(s)} = X_s = \emptyset$. Donc pour tout $x \in X, e(s)(x) \neq s_0(x)$ et donc $e(s)(x) = s_1(x)$. Par suite $e(s) = s_1$. Or $s \in p$ donc $e(s) \in p$ (proposition 5.2). Ce qui est en contradiction avec la définition d'un idéal premier. En conclusion l'ensemble X n'est pas vide. Considérons alors un point $x \in X$. Si $s \in p$, alors $s(x) = s_0(x)$, donc $s \in p(x)$. Si $s \notin p$, alors $s' \in p$ (proposition 6.2), donc $s'(x) = s_0(x)$, donc $s(x) \neq s_0(x)$ et $s \notin p(x)$. Il en résulte que $p = p(x)$. □

8.3.3 Lemme. *Si E est un espace étalé séparé bisectionné sur un espace booléen X, alors* $\mathrm{Spec}(\Gamma(E))$ *est homéomorphe à X.*

Démonstration. Considérons l'application $p\colon X \to \mathrm{Spec}(\Gamma(E))$ qui associe $p(x)$ à x. Elle est surjective d'après le lemme 8.3.2. Montrons qu'elle est injective. Soient $x \neq y$ dans X. Soit U un ouvert fermé de X contenant x et ne contenant pas y. Soit $s \in \Gamma(E)$ la section définie par $s/_U = s_0/_U$ et $s/_{X-U} = s_1/_{X-U}$. Alors $s \in p(x)$ et $s \notin p(y)$. Donc $p(x) \neq p(y)$. Il en résulte que l'application $p\colon X \to \mathrm{Spec}(\Gamma(E))$ est bijective. Soit W un ouvert de $\mathrm{Spec}(\Gamma(E))$. Alors $W = D(s) = \{p(x) : s(x) \neq s_0(x)\}$ où $s \in \Gamma(E)$. On a $x \in p^{-1}(W) \Leftrightarrow p(x) \in W \Leftrightarrow s(x) \neq s_0(x)$. Donc $p^{-1}(W) = X - X_s$ qui est un ouvert fermé de X. Par conséquent, p est continue. Or X et $\mathrm{Spec}(\Gamma(E))$ sont compacts. Donc p est un homéomorphisme. □

8.3.4 Lemme. *Pour $x \in X$ et s, $t \in \Gamma(E)$, on a* $s \equiv t (\mathrm{mod}\, p(x)) \Leftrightarrow s(x) = t(x)$.

Démonstration. On a

$$s \equiv t(\mathrm{mod}\,(p(x)) \Leftrightarrow s + t \in p(x) \Leftrightarrow s(x) + t(x) = s_0(x) \Leftrightarrow s(x) = t(x). \quad \square$$

8.3.5 Lemme. *Soit E un espace étalé séparé bisectionné sur un espace booléen X.* $E_{\Gamma(E)} = \{(p(x), \overline{s}^x) : x \in X$ *et* $\overline{s}^x \in \Gamma(E)/p(x)\}$ *est un espace étalé séparé bisectionné sur* $\mathrm{Spec}(\Gamma(E))$.

8.3.6 Théorème. *Si E est un espace étalé séparé bisectionné sur un espace booléen X, l'espace étalé $E_{\Gamma(E)}$ est isomorphe à E.*

Démonstration. Soit $x \in X$. D'après le lemme 8.3.4, on peut définir une application injective $v_x\colon (E_{\Gamma(E)})_x \to E_x$ par $v_x(\overline{s}) = s(x)$. Cette application est surjective puisque tout élément de E_x est germe en x d'une section globale continue de

E. La famille des applications $(v_x^{-1})_{x\in X}$ définit une bijection $w\colon E \to E_{\Gamma(E)}$ par $w(u) = \big(p(\pi(u)), v_{\pi(u)}^{-1}(u)\big)$. Cette bijection vérifie la relation $\pi_{\Gamma(E)} \circ w = p \circ \pi$. Par conséquent, c'est un homéomorphisme et le couple (p, w) établit un isomorphisme entre les deux espaces étalés E et $E_{\Gamma(E)}$. $\square$

9. Espaces booloïdes.

9.1 Définition. Un *espace booloïde* est un espace topologique séparé étalé et sectionné sur un espace booléen. Il sera noté (E, X, π, σ_1) ou simplement E.

9.2 Proposition. *Si E est un espace booloïde, l'espace topologique $E \amalg X$ est étalé séparé bisectioné sur X.*

Démonstration. On considère l'application $q\colon E \amalg X \to X$ définie par $q(a) = \pi(a)$ si $a \in E$ et $q(x) = x$ si $x \in X$. On voit immédiatement que q est un homéomorphisme local. Le couple $(E \amalg X, q)$ est donc un espace étalé séparé sur X. Soient $s_0\colon X \to E \amalg X$, $s_1\colon X \to E \amalg X$, les applications définies respectivement par $s_0(x) = x$ et $s_1(x) = \sigma_1(x)$. Il est immédiat que s_0 et s_1 sont continues et disjointes. De plus $q\big(s_0(x)\big) = q(x) = x$ et $q\big(s_1(x)\big) = \pi\big(\sigma_1(x)\big) = x$. Ce qui prouve que $E \amalg X$ est un espace étalé séparé bisectionné sur X. $\square$

9.3 Proposition. *Si $E = (E, X, \pi, s_0, s_1)$ est un espace étalé séparé bisectionné sur un espace booléen X, alors $E - s_0(X)$ est un espace booloïde.*

Démonstration. L'application s_0 est ouverte puisque π est un homéomorphisme local et elle est fermée puisque s_0 est une application continue d'un espace compact X dans un espace séparé E. Donc $s_0(X)$ est ouvert fermé dans E. Soit $\pi_1 = E - s_0(X) \to X$ la restriction de π. Alors le couple $(E - s_0(X), \pi_1)$ est un espace étalé séparé sur X. Soit $\sigma_1\colon X \to E - s_0(X)$ l'application définie par $\sigma_1(x) = s_1(x)$. L'application σ_1 est continue et vérifie $\pi_1\big(\sigma_1(x)\big) = \pi\big(s_1(x)\big) = x$. On en déduit que $E - s_0(X)$ est un espace booloïde. $\square$

9.4 Proposition. *Sur un espace booléen X, il y a une correspondance essentiellement bijective entre l'ensemble des espaces booloïdes sur X et l'ensemble des espaces étalés séparés bisectionnés sur X.*

Démonstration. Soit E un espace étalé séparé bisectionné sur X. Alors $E - s_0(X)$ est un espace booloïde (proposition 9.3), et $\big(E - s_0(X)\big) \amalg X$ est un espace étalé séparé bisectionné sur X (proposition 9.2). Considérons l'application $u\colon E \to \big(E - s_0(X)\big) \amalg X$ définie par $u(a) = \pi(a)$ si $a \in s_0(X)$ et $u(a) = a$ si $a \notin s_0(X)$. Il est clair que u est bijective et que u^{-1} est définie par $u^{-1}(x) = s_0(x)$ si $x \in X$ et $u^{-1}(a) = a$ si $a \in E - s_0(X)$. Montrons que u est une application continue. Soit O un ouvert de $\big(E - s_0(X)\big) \amalg X$. On a $O = O_1 \cup O_2$ où $O_1 = O \cap X$ et $O_2 = O \cap \big(E - s_0(X)\big)$. Alors $u^{-1}(O) = u^{-1}(O_1) \cup u^{-1}(O_2) = s_0(O_1) \cup O_2$ où $s_0(O_1)$ et O_2 sont des ouverts. Donc $u^{-1}(O)$ est un ouvert. Soit V un ouvert de E. Alors $V = \big(V \cap s_0(X)\big) \cup \Big[V \cap \big(E - s_0(X)\big)\Big]$. Posons $V_1 = V \cap s_0(X)$ et $V_2 = V \cap \big(E - s_0(X)\big)$. On a $u(V) = u(V_1) \cup u(V_2) = \pi(V_1) \cup V_2$, où $\pi(V_1)$ et V_2 sont des ouverts puisque V_1 et V_2 sont des ouverts de E. Donc $u(V)$ est un ouvert. Il résulte que l'application u est ouverte donc est un homéomorphisme. Soit $a \in E$. Si $a \in s_0(X)$, on a $(q \circ u)(a) = q\big(\pi(a)\big) = \pi(a)($

proposition 9.2). Si $a \notin s_0(X)$, on a $(q \circ u)(a) = q(a) = \pi(a)$ (proposition 9.2). En outre, on a $u(s_0(x)) = \pi(s_0(x)) = x = s_0(x)$ et $u(s_1(x)) = s_1(x)$ (proposition 9.2). On en déduit [4, chapitre 2, n° 1, p. 111] que u est un homéomorphisme d'espaces étalés bisectionnés $E \to (E - s_0(X)) \amalg X$. Soit maintenant E un espace booloïde. Alors $E \amalg X$ est un espace étalé séparé bisectionné sur X (proposition 9.2), et $(E \amalg X) - s_0(X)$ est un espace booloïde (proposition 9.3). Or $s_0(X) = X$, donc $(E \amalg X) - s_0(X) = E$. □

9.5 Définition. Une *section ouverte fermée* d'un espace booloïde E est un couple (U, s) formé d'un ouvert fermé U de X et d'une section continue s de E au-dessus de U.

9.6 Théorème. *Si E est un espace booloïde, l'ensemble $A(E)$ des sections ouvertes fermées de E est un booloïde dont les opérations sont définies par*

- *la section nulle est $(\emptyset, \emptyset)$.*
- *la section unité est (X, σ_1).*
- $(U, s) \cdot (V, t) = (U \cap V, t|_{U \cap V})$.
- $(U, s) * (V, t) = (U \cup V, r)$ *où r est la section définie par $r(x) = s(x)$ si $x \in U$ et $r(x) = t(x)$ si $x \in V - U$.*
- $(U, s) + (V, t) = (W, \sigma_1|_W)$ *où* $W = \{x \in U \cup V : s(x) \neq t(x)\}$.

Démonstration. Nous allons considérer l'espace étalé $E \amalg X$ (proposition 9.2) et montrer que l'ensemble $\Gamma(E \amalg X)$ est en bijection avec l'ensemble $A(E)$. Pour tout $s \in \Gamma(E \amalg X)$, posons

$$W_s = \{x \in X : s(x) \neq s_0(x)\} = \{x \in X : s(x) \in E\} = s^{-1}(E).$$

C'est un ensemble ouvert fermé dans X. On considère l'application $f \colon \Gamma(E \amalg X) \to A(E)$ définie par $f(s) = (W_s, s|_{W_s})$. On a $W_{s_0} = \emptyset$, donc $f(s_0) = (\emptyset, \emptyset)$. De même $W_{s_1} = X$ et $f(s_1) = (X, \sigma_1)$. Soient s, $t \in \Gamma(E \amalg X)$. On a

$$\begin{aligned} x \in W_s \cap W_t \Rightarrow s(x) \neq s_0(x) \text{ et } t(x) \neq s_0(x) &\Rightarrow (s \cdot t)(x) = t(x) \text{ et } t(x) \neq s_0(x) \\ &\Rightarrow (s \cdot t)(x) \neq s_0(x) \Rightarrow x \in W_{s \cdot t}. \end{aligned}$$

Réciproquement

$$x \in W_{s \cdot t} \Rightarrow (s \cdot t)(x) \neq s_0(x) \Rightarrow s(x) \neq s_0(x) \text{ et } t(x) \neq s_0(x) \Rightarrow x \in W_s \cap W_t.$$

On en déduit $W_s \cap W_t = W_{s \cdot t}$ et

$$f(s \cdot t) = (W_{s \cdot t}, s \cdot t|_{W_{s \cdot t}}) = (W_{s \cdot t}, t|_{W_{s \cdot t}}) = (W_s, s|_{W_s}) \cdot (W_t, t|_{W_t}) = f(s) \cdot f(t).$$

D'autre part, on a $x \in W_s \cup W_t \Leftrightarrow (s(x) \neq s_0(x)$ ou $t(x) \neq s_0(x)) \Leftrightarrow (s * t)(x) \neq s_0(x) \Leftrightarrow x \in W_{s*t}$. En outre si $x \in W_s$, alors $s(x) \neq s_0(x)$ donc $(s * t)(x) = s(x)$. Et si $x \in W_t - W_s$, alors $s(x) = s_0(x) \neq t(x)$ donc $(s * t)(x) = t(x) \neq s_0(x)$. Il s'en suit $f(s * t) = (W_s \cup W_t, r)$ où $r(x) = s(x)$ si $x \in W_s$, et $r(x) = t(x)$ si $x \in W_t - W_s$. On a donc $f(s * t) = (W_s, s) * (W_t, t) = f(s) * f(t)$. Montrons que $W_{s+t} = \{x \in W_s \cup W_t : s(x) \neq t(x)\}$. On a $x \in W_{s+t} \Rightarrow (s + t)(x) \neq s_0(x) \Rightarrow s(x) \neq t(x)$ et $(s(x) \neq s_0(x)$ ou $t(x) \neq s_0(x)) \Rightarrow s(x) \neq t(x)$ et $x \in W_s \cup W_t$. Réciproquement $s(x) \neq t(x)$ et $(s(x) \neq s_0(x)$ ou $t(x) \neq s_0(x)) \Rightarrow (s + t)(x) = s(x) + t(x) \neq s_0(x)$. Alors,

$$f(s + t) = (W_{s+t}, \sigma_1|_{W_{s+t}}) = (W_s, s|_{W_s}) + (W_t, t|_{W_t}) = f(s) + f(t).$$

Il en résulte que l'application f préserve les opérations définies précédemment. Il est immédiat que f est injective. Soit $(W, s) \in A(E)$. Considérons l'application $\overline{s} : X \to E \amalg X$ définie par $\overline{s}(x) = s(x)$ si $x \in W$ et $\overline{s}(x) = s_0(x)$ si $x \notin W$. Soient $x \in X$ et $U \amalg V$ un ouvert de $E \amalg X$ tel que $\overline{s}(x) \in U \amalg V$. Supposons $x \in W$. Comme W ouvert, il existe un ouvert Y tel que $x \in Y \subseteq W$ et $s(Y) \subseteq U \amalg V$, donc pour tout $y \in Y$, on a $y \in W$ et par suite $\overline{s}(y) = s(y) \in U \amalg V$, donc $\overline{s}(Y) \subseteq U \amalg V$. Supposons $x \notin W$ *i.e.* $x \in X - W$. Comme $X - W$ ouvert, il existe un ouvert Y tel que $x \in Y \subseteq X - W$. Alors pour tout $y \in Y$, $\overline{s}(y) = s_0(y) \in U \amalg V$. On en déduit que $\overline{s}$ est continue. Si $x \in W$, on a $q(\overline{s}(x)) = q(s(x)) = x$. Si $x \notin W$, $q(\overline{s}(x)) = q(s_0(x)) = x$. Donc $\overline{s} \in \Gamma(E \amalg X)$. En outre, $\overline{s}^{-1}(E) = \{x \in X : \overline{s}(x) \in E\} = \{x \in X : \overline{s}(x) \neq s_0(x)\} = W$. Alors $f(\overline{s}) = (W, s)$. Il s'ensuit que f est bijective. Il résulte que $A(E)$ est un booloïde. □

9.7 Théorème. *Si A est un booloïde, l'ensemble $E(A) = \{(p, \overline{a}) : p \in X_A$ et $\overline{a} \in A/p - \{\overline{0}\}\}$ est un espace booloïde sur* Spec(A). *En outre, le booloïde $A(E(A))$ des sections ouvertes fermées de $E(A)$ est isomorphe à A.*

Démonstration. Posons $X_A = \mathrm{Spec}(A)$. D'après le théorème 8.2.1, $E_A = \{(p, \overline{a}) : p \in \mathrm{Spec}(A)$ et $\overline{a} \in A/p\}$ est un espace étalé séparé bisectionné sur X_A. On a $E(A) = E_A - s_0(X_A)$. D'après la proposition 9.4, $E_A \simeq E(A) \amalg X_A$. Il s'en suit un isomorphisme de booloïdes $\Gamma(E_A) \simeq \Gamma(E(A) \amalg X_A)$. D'après le théorème 8.2.1, le booloïde $\Gamma(E_A)$ est isomorphe à A. D'après la preuve du théorème 9.6, le booloïde $\Gamma(E(A) \amalg X_A)$ est isomorphe à $A(E(A))$. Il s'en suit un isomorphisme entre $A(E(A))$ et A. □

9.8 Théorème. *Si E est un espace booloïde, alors l'espace booloïde $E(A(E))$ associé au booloïde des sections ouvertes fermées de E est isomorphe à E.*

Démonstration. D'après le théorème 8.3.6, l'espace étalé séparé bisectionné $E \amalg X$ est isomorphe à $E_{\Gamma(E \amalg X)}$. On en déduit que l'espace booloïde E est isomorphe à $E(\Gamma(E \amalg X))$. D'après 9.6, le booloïde $\Gamma(E \amalg X)$ est isomorphe à $A(E)$. Par suite les espaces booloïdes $E(\Gamma(E \amalg X))$ et $E(A(E))$ sont isomorphes. Il s'en suit l'isomorphisme entre les espaces booloïdes E et $E(A(E))$. □

10. Dualité booloïdienne.

10.1 La catégorie $\mathcal{E}\mathrm{sp}\mathcal{B}\mathrm{\grave{o}\grave{o}l}$ **des espaces booloïdes.** Soient X et Y deux espaces booléens, $\varphi : X \to Y$ une application continue, $F = (F, Y, \pi, s_1)$ un espace booloïde sur Y. L'ensemble $\varphi^*(F) = \{(x, v) \in X \times F : \varphi(x) = \pi(v)\}$ muni de la topologie induite par celle de $X \times F$ et muni de l'application $\varphi^*(\pi) : \varphi^*(F) \to X$ définie par $\varphi^*(\pi)(x, v) = x$ est un espace étalé séparé sur X[4, chap. 1, pp. 120–122]. En outre, il est sectionné par l'application continue $\varphi^*(s_1) : X \to \varphi^*(F)$ définie par $\varphi^*(s_1)(x) = \big(x, s_1(\varphi(x))\big)$. C'est donc un espace booloïde sur X, appelé *espace booloïde image réciproque* de F par φ.

Soit $E = (E, X, p, t_1)$ et $F = (F, Y, \pi, s_1)$ deux espaces booloïdes. Un *morphisme* de E dans F est un couple (φ, f) constitué d'une application continue $\varphi : X \to Y$ et d'une application continue injective $f : \varphi^*(F) \to E$ vérifiant $p \circ f = \varphi^*(\pi)$ et $f \circ \varphi^*(s_1) = t_1$. Soit $G = (G, Z, q, \sigma_1)$ un espace booloïde et soit $(\varphi', f') : F \to G$ un morphisme de F dans G. Le morphisme composé $(\varphi', f')(\varphi, f)$ est le morphisme $(\varphi' \circ \varphi, f \cdot f')$ de E dans G où $f \cdot f' : (\varphi' \circ \varphi)^*(G) \to E$ est l'application définie par $(f \cdot f')(x, \omega) = f(x, f'(\varphi(x), \omega))$.

La *catégorie* $\mathit{EspBòòl}$ *des espaces booloïdes* a pour objets les espaces booloïdes et pour morphismes les morphismes d'espaces booloïdes.

10.2 Théorème (La dualité booloïdienne). *La catégorie* $\mathit{EspBòòl}$ *des espaces booloïdes est équivalente à la duale de la catégorie* $\mathit{Bòòl}$ *des algèbres booloïdes.*

Esquisse de démonstration. On définit un foncteur $\Sigma\colon \mathit{Bòòl}^{\mathrm{op}} \to \mathit{EspBòòl}$ comme suit. Si A est un objet de $\mathit{Bòòl}$, $\Sigma(A)$ est l'espace booloïde $E(A)$ sur X_A précédemment défini. Si $f\colon A \to B$ est un morphisme de $\mathit{Bòòl}$, $\Sigma(f)\colon \Sigma(B) \to \Sigma(A)$ est le morphisme $(\mathrm{Spec}(f), \Phi_f)$ où $\mathrm{Spec}(f)\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est l'application définie par $\mathrm{Spec}(f)(q) = f^{-1}(q)$ et où $\Phi_f\colon \mathrm{Spec}(f)^*(E(A)) \to E(B)$ est l'application définie par $\Phi_f(q, \overline{a}) = (q, \overline{f(a)})$. Inversement, on définit un foncteur $\Gamma_0\colon \mathit{EspBòòl} \to \mathit{Bòòl}^{\mathrm{op}}$ comme suit. Si E est un objet de $\mathit{EspBòòl}$, $\Gamma_0(E)$ est le booloïde $A(E)$ des sections ouvertes fermées de E. Si $(\varphi, f)\colon E \to F$ est un morphisme de $\mathit{EspBòòl}$, l'application $\Gamma_0(\varphi, f)\colon A(F) \to A(E)$ assigne à la section ouverte fermée (W, s) de F, la section $(\varphi^{-1}(W), f_0\varphi^*(s))$ de E. On montre que ces deux foncteurs sont quasi-inverses l'un de l'autre. □

11.Théories algébriques booloïdes. Nous utilisons ici la notion de théorie algébrique qui consiste en la donnée d'un ensemble d'opérations et d'identités. Pour une description précise, on peut consulter [8] ou [10]. Les modèles d'une théorie algébrique T sont les T-algèbres. Avec les T-morphismes, ils constituent la catégorie $\mathit{Alg}(T)$ des T-algèbres.

11.0 Notations. Soit T une théorie algébrique possédant au moins deux constantes notées 0 et 1.

(1) Une *congruence* sur une T-algèbre A est une relation d'équivalence compatible avec la structure de A.
(2) Une congruence est *maximale* si elle est maximale dans l'ensemble des congruences propres.
(3) Une T-algèbre A est *simple*, si elle possède seulement deux congruences distinctes à savoir la congruence unité R_1 et la congruence égalité R_0.

11.1 Proposition. *Une congruence R sur une T-algèbre A est maximale si et seulement si A/R est une T-algèbre simple.*

11.2 Notations. Soit T une théorie algébrique possédant au moins deux constantes notées 0 et 1.

(1) Un *faisceau de T-algèbres simples* sur un espace topologique X est un faisceau de T-algèbres de base X dont les fibres sont des T-algèbres simples.
(2) Un *espace étalé en T-algèbres* est un espace étalé tel que le faisceau associé soit un faisceau de T-algèbres.
(3) Un *espace étalé en T-algèbres simples* est un espace étalé tel que le faisceau associé soit un faisceau de T-algèbres simples.
(4) Si (E, X, p) et (F, Y, q) sont deux espaces étalés en T-algèbres, un *T-morphisme* de E dans F est un morphisme d'espaces étalés $(\varphi, f)\colon E \to F$ tel que, pour tout $x \in X$, l'application $f_x\colon F_{\varphi(x)} \to E_x$ soit un morphisme de T-algèbres.

11.3 Définition. Soit T une théorie algébrique possédant au moins deux constantes notées 0 et 1. On dit que 0 et 1 sont *séparées*, si toute T-algèbre A dans laquelle on a $0 = 1$ est telle que $A = \{0\}$.

11.4 Définition. Une *théorie algébrique booloïde* est une théorie algébrique T possédant au moins deux constantes notées 0 et 1 et trois opérations binaires notées $\cdot$, $*$, $+$ vérifiant les axiomes de booloïdes et la condition de compatibilité suivante, pour toute opération n-aire w de T

$$a \cdot w(b_1, b_2, \dots, b_n) = a \cdot w(a \cdot b_1, a \cdot b_2, \dots, a \cdot b_n). \tag{C}$$

Considérons une théorie algébrique booloïde T.

11.5 Proposition. *Si A est une T-algèbre, la congruence modulo un idéal de A est une congruence sur l'algèbre A.*

Démonstration. Soit I un idéal de A. La relation modulo I est une relation d'équivalence compatible avec la structure de booloïde (proposition 5.10). Montrons que cette relation est compatible avec les opérations w de T. Supposons $x_i \equiv y_i (\operatorname{mod} I)$ pour $i \in [1, n]$. Alors $\exists a_i \in I$ tel que $a_i' \cdot x_i = a_i' \cdot y_i$. (proposition 5.19). Posons $a = a_1 * a_2 * \cdots * a_n$. On a $a \in I$ et, pour tout $i \in [1, n]$,

$$a' \cdot x_i = (a_1 * a_2 * \cdots * a_n)' \cdot x_i = (a_1' \cdot a_2' \dots a_{i-1}' \cdot a_{i+1}' \cdots a_n') \cdot a_i' \cdot x_i$$
$$= a_1' \cdot a_2' \dots a_{i-1}' \cdot a_{i+1}' \cdots a_n' \cdot a_i' \cdot y_i = a_1' \cdots a_n' \cdot y_i = (a_1 * a_2 * \cdots * a_n)' \cdot y_i = a' \cdot y_i.$$

Donc

$$\begin{aligned} a' \cdot w(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a' \cdot w(a' \cdot x_1, a' \cdot x_2, \dots, a' \cdot x_n) \\ &= a' \cdot w(a' \cdot y_1, a' \cdot y_2, \dots, a' \cdot y_n) = a' \cdot w(y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Par conséquent $w(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv w(y_1, y_2, \dots, y_n)(\operatorname{mod} I)$ (proposition 5.19). □

11.6 Corollaire. *Pour une T-algèbre A, il existe une correspondance biunivoque entre les congruences sur A et les idéaux du booloïde A.*

11.7 Proposition. *Les T-algèbres simples sont les T-algèbres pour lesquelles la structure de booloïde est simple.*

11.8 Théorème. *Les algèbres d'une théorie algébrique booloïde sont naturellement représentables par des faisceaux booléens d'algèbres simples.*

Démonstration. Soit T une théorie algébrique booloïde et soit A une T-algèbre. Alors A est un booloïde, donc $X_A = \operatorname{Spec}(A)$ est un espace booléen (proposition 7.8). D'après la proposition 11.5. le faisceau structural $\widetilde{A}$ (théorème 7.12) est un faisceau de T-algèbres. D'après le théorème 7.12. et la proposition 11.7, $\widetilde{A}$ est un faisceau de T-algèbres simples, et de plus, $\widetilde{A}(\operatorname{Spec}(A))$ est isomorphe à A. L'espace étalé E_A sur $\operatorname{Spec}(A)$ associé au faisceau $\widetilde{A}$ est donc un espace étalé en T-algèbres simples et l'application $\sigma_A \colon A \to \Gamma(E_A)$ définie, pour $a \in A$, par $\sigma_A(a) \colon \operatorname{Spec}(A) \to E_A$ où $\sigma_A(a)(p) = (p, \overline{a})$ est un isomorphisme de T-algèbres. Soit $f \colon A \to B$ un morphisme de T-algèbres. Alors f est un morphisme de booloïdes. Le couple $(\operatorname{Spec}(f), f^\circ)$ est un morphisme de l'espace étalé E_B dans l'espace étalé E_A, ayant pour fibre au point $q \in \operatorname{Spec}(B)$, l'application $f_q^\circ \colon A/_{f^{-1}(q)} \to B/q$ définie par $f_q^\circ(\overline{a}) = \overline{f(a)}$. Or f_q° est un morphisme de T-algèbres. Donc $(\operatorname{Spec}(f), f^\circ) \colon E_B \to E_A$ est un T-morphisme (notation 11.2). De plus, on a $\Gamma(\operatorname{Spec}(f), f^\circ) \circ \sigma_A = \sigma_B \circ f$. □

11.9 Notation. Soit T une théorie algébrique possédant au moins deux constantes 0 et 1. On note T_b la théorie algébrique booloïde obtenue à partir de T en adjoignant les opérations de booloïdes et vérifiant la condition de compatibilité (C).

11.10 Proposition. *Les T_b-algèbres sont les T-algèbres munies d'une structure de booloïde et vérifiant la condition de compatibilité* (C) *et dont les éléments distingués* 0 *et* 1 *sont ceux de la T-algèbre.*

11.11 Proposition. *Soit T une théorie algébrique ayant au moins deux constantes* 0 *et* 1 *et soit E un espace étalé séparé en T-algèbres sur un espace booléen X. Alors l'ensemble $\Gamma(E)$ des sections globales continues de E est une T_b-algèbre.*

Démonstration. L'espace étalé E est muni de deux sections continues σ_0, $\sigma_1 : X \rightrightarrows E$ définies par $\sigma_0(x) = 0(x)$ et $\sigma_1(x) = 1(x)$. Il résulte de 2.5 que l'ensemble $\Gamma(E)$ est un booloïde. Notons aussi que $\Gamma(E)$ est une T-algèbre. Soient ω une opération n-aire de T et $s_1, s_2, \ldots, s_n$, des sections globales continues de E. Soit $x \in X$. Si $s(x) = \sigma_0(x)$, alors

$$\begin{aligned}
&\big(s \cdot \omega(s \cdot s_1, s \cdot s_2, \ldots, s \cdot s_n)\big)(x) = s(x) \cdot \omega\big((s \cdot s_1)(x), \ldots, (s \cdot s_n)(x)\big) \\
&= \sigma_0(x) \cdot \omega\big((s \cdot s_1)(x), \ldots, (s \cdot s_n)(x)\big) = \sigma_0(x) = \sigma_0(x) \cdot \omega\big(s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x)\big) \\
&\qquad = s(x) \cdot \omega\big(s_1(x), \ldots, s_n(x)\big) = \big(s \cdot \omega(s_1, s_2, \ldots, s_n)\big)(x).
\end{aligned}$$

Si $s(x) \neq \sigma_0(x)$, alors

$$\begin{aligned}
&\big(s \cdot \omega(s \cdot s_1, s \cdot s_2, \ldots, s \cdot s_n)\big)(x) = s(x) \cdot \omega\big((s \cdot s_1)(x), \ldots, (s \cdot s_n)(x)\big) \\
&\qquad = \omega\big(s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x)\big) = s(x) \cdot \omega\big(s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x)\big) \\
&\qquad\qquad = \big(s \cdot \omega(s_1, s_2, \ldots, s_n)\big)(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$s \cdot \omega(s \cdot s_1, s \cdot s_2, \ldots, s \cdot s_n) = s \cdot \omega(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Il résulte de la proposition 11.10 que $\Gamma(E)$ est une T_b-algèbre. $\square$

11.12 Représentation des algèbres par des faisceaux booléens d'algèbres simples. Soit T une théorie algébrique possédant au moins deux constantes notées 0 et 1 et soit A une T-algèbre. On note $X_A = \mathrm{Spec}_{\max}(A)$ l'ensemble des congruences maximales sur A, $\mathrm{Cong}_0(A)$ l'ensemble des congruences finiment engendrées sur A, R_0 la congruence égalité et R_1 la congruence unité sur A. Pour toute congruence R sur A, on note $D(R) = \{m \in X_A : R \not\subset m\}$ et $V(R) = \{m \in X_A : R \subset m\}$. Si $(a,b) \in A \times A$, on note $D\big((a,b)\big) = \{m \in X_A : (a,b) \notin m\}$ et $V\big((a,b)\big) = \{m \in X_A : (a,b) \in m\}$.

Supposons que X_A possède la propriété suivante : il existe une topologie booléenne sur X_A dont les ouverts fermés sont de façon unique de la forme $D(R)$ où $R \in \mathrm{Cong}_0(A)$. Considérons $R \in \mathrm{Cong}_0(A)$. Alors $V(R) = X_A - D(R)$ est un ouvert fermé de X_A. Donc $V(R)$ est de la forme $D(R')$ où $R' \in \mathrm{Cong}_0(A)$. Alors $D(R) \amalg D(R') = X_A$ et $D(R'') = X_A - D(R') = D(R)$. Par conséquent, pour tout $m \in X_A$, on a $m \in D(R) \Leftrightarrow m \notin D(R') \Leftrightarrow R' \subset m$. Si $R \subset S$, alors $D(R) \subset D(S)$, donc $D(S') \subset D(R')$ et $S' \subset R'$. On peut alors définir sur X_A un préfaisceau de T-algèbres $\widetilde{A}$ comme suit. Pour un ouvert fermé $D(R)$ de X_A, on pose $\widetilde{A}\big(D(R)\big) = A/R'$. Pour $D(R) \subset D(S)$, l'homomorphisme de restriction $\widetilde{A}\big(D(S)\big) \to \widetilde{A}\big(D(R)\big)$ applique la classe d'équivalence de x modulo S' sur la classe d'équivalence de x modulo R'. $\square$

11.12.1 Définition. On dit que les T-algèbres sont *naturellement représentables par des faisceaux booléens d'algèbres simples*, si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) Pour toute T-algèbre A, $\mathrm{Spec}_{\max}(A)$ est muni d'une topologie booléenne dont les ouverts fermés sont de façon unique de la forme $D(R)$ où $R \in \mathrm{Cong}_0(A)$.

(2) Le préfaisceau booléen de T-algèbres $\widetilde{A}$ sur $\mathrm{Spec}_{\max}(A)$ défini par $\widetilde{A}(D(R)) = A/R'$ est un faisceau.

(3) Tout morphisme $f\colon A \to B$ de T-algèbres est tel que l'image réciproque d'une congruence maximale sur B est une congruence maximale sur A.

11.12.2 Théorème. *Toute théorie algébrique possédant au moins deux constantes séparées et dont les algèbres sont naturellement représentables par des faisceaux booléens d'algèbres simples, est nécessairement une théorie algébrique booloïde.*

Démonstration. Soit T une théorie algébrique possédant au moins deux constantes séparées notées 0 et 1. Soit A une T-algèbre. Alors on a un faisceau $\widetilde{A}$ de base $X_A = \mathrm{Spec}_{\max}(A)$ défini par $\widetilde{A}(D(R)) = A/R'$. Puisque toute congruence sur A est réunion des congruences finiment engendrées, la fibre de $\widetilde{A}$ en $m \in X_A$ est

$$\widetilde{A}_m = \varinjlim_{\substack{R\in\mathrm{Cong}_0(A)\\ m\in D(R)}} \widetilde{A}(D(R)) = \varinjlim_{\substack{R'\in\mathrm{Cong}_0(A)\\ R'\subset m}} A/R'$$

$$\simeq A\Big/\Big(\bigvee_{\substack{R'\in\mathrm{Cong}_0(A)\\ R'\subset m}} R'\Big) = A\Big/\Big(\bigvee_{\substack{R\in\mathrm{Cong}_0(A)\\ R\subset m}} R\Big) = A/m.$$

Donc $\widetilde{A}$ est un faisceau booléen de T-algèbres simples. On a aussi $\widetilde{A}(X_A) = \widetilde{A}(D(R_1)) = A/R_0 \simeq A$. Soit E_A l'espace étalé attaché à $\widetilde{A}$. C'est un espace étalé en T-algèbres simples tel que $\Gamma(E_A) \simeq A$. Soient $a, b \in A$. L'ensemble $\{m \in X_A : \overline{a} = \overline{b}$ dans $A/m\} = \{m \in X_A : a \equiv b(\mathrm{mod}(m))\} = \{m \in X_A : (a,b) \in m\} = V((a,b))$ est un fermé de $\mathrm{Spec}_{\max}(A)$. Donc E_A est séparé [3, proposition 2-12-1]. Par conséquent, $\Gamma(E_A)$ est une T_b-algèbre (proposition 11.11). Par suite A est une T_b-algèbre. Soit $f\colon A \to B$ un morphisme de $T-$algèbres. Montrons que l'application $\mathrm{Spec}(f)\colon X_B \to X_A$ définie par $\mathrm{Spec}(f)(m) = (f\times f)^{-1}(m)$ est continue. Soit $R \in \mathrm{Cong}_0(A)$. Notons $f_*(R)$ la congruence sur B engendrée par $(f\times f)(R)$. Alors $f_*(R)$ est finiment engendrée et $\big(\mathrm{Spec}(f)\big)^{-1}\big(D(R)\big) = \{m \in X_B : \big(\mathrm{Spec}(f)\big)(m) \in D(R)\} = \{m \in X_B : (f\times f)^{-1}(m) \in D(R)\} = \{m \in X_B : R \not\subset (f\times f)^{-1}(m)\} = \{m \in X_B : f_*(R) \not\subset m\} = D(f_*(R))$ est un ouvert de X_B. Définissons l'application $f^\sharp\colon \mathrm{Spec}(f)^*(E_A) \to E_B$ par $f^\sharp\big(m, ((f\times f)^{-1}(m), \overline{a})\big) = (m, \overline{f(a)})$. C'est un morphisme d'espaces étalés sur X_B ayant pour fibre en $m \in \mathrm{Spec}_{\max}(B)$, l'application $f^\sharp_m\colon A/_{(f\times f)^{-1}(m)} \to B/m$ donnée par $f^\sharp_m(\overline{a}) = \overline{f(a)}$. Or $f^\sharp_m$ est un morphisme de T-algèbres simples. C'est aussi un morphisme de booloïdes (proposition 6.7). Donc le couple $(\mathrm{Spec}(f), f^\sharp)$ est un T_b-morphisme de E_B dans E_A. Par suite $\Gamma(\mathrm{Spec}(f), f^\sharp)$ est un morphisme de T_b-algèbres. On en déduit que f est un morphisme de T_b-algèbres. Il résulte alors de [8] ou [10] que la théorie algébrique T coïncide avec la théorie T_b donc est une théorie algébrique booloïde. $\square$

11.13 Anneaux booloïdes.

11.13.1 Définition. Un *anneau booloïde* est un anneau unitaire A muni d'une opération binaire notée $\cdot$, idempotente, associative, et vérifiant les deux conditions suivantes :

(1) $a \cdot (bc) = (a \cdot b)c = (a \cdot b)(a \cdot c)$
(2) $a \cdot b = 0 \Rightarrow b \cdot a = 0$

11.13.2 Proposition. *Dans un anneau booloïde*

(1) $a(a \cdot 1) = (a \cdot 1)a = a.$
(2) $a \cdot b = (a \cdot 1)b.$
(3) $a \cdot b = 0 \Rightarrow ab = 0.$
(4) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *et* $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$
(5) *Les éléments de forme* $a \cdot 1$ *sont idempotents centraux.*
(6) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$
(7) $e \cdot 1 = e \Rightarrow (1 - e) \cdot 1 = 1 - e.$

11.13.3 Théorème. *Pour un anneau unitaire A, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est un anneau booloïde.*
(2) *A est muni d'une structure de booloïde telle que* 0 *et* 1 *sont ses éléments distingués et* $a \cdot (bc) = (a \cdot b)(a \cdot c)$, *pour tout* a, b *et* c.
(3) *A est un E-anneau.*

Démonstration. 1) $\Rightarrow$ 2) : On a $a \cdot b = (a \cdot 1)b$. En particulier, pour $a = 1$, on a $1 \cdot b = b$. Donc 1 est élément unité à gauche pour l'opération $\cdot$. De plus $a \cdot b \cdot c = a \cdot \big((b \cdot 1)c\big) = (a \cdot 1)(b \cdot 1)c = (b \cdot 1)(a \cdot 1)c = b \cdot a \cdot c$. Donc l'opération $\cdot$ est associative symétrique.

Définissons maintenant l'opération $*$ par $a * b = a + b - a \cdot b = a + (1 - a \cdot 1)b$. On a $(a * b) \cdot 1 = a \cdot 1 * b \cdot 1$. En effet, appliquant la proposition (11-13-2) on a d'une part

$$\begin{aligned}
&(a * b) \cdot [a \cdot 1 + (1 - a \cdot 1) \cdot (b \cdot 1)] = (a * b) \cdot [1 - (1 - a \cdot 1) \cdot (1 - b \cdot 1)] \\
&= (a*b)\cdot 1-(a+b-a\cdot b)\cdot(1-a\cdot 1)\cdot(1-b\cdot 1) = (a*b)\cdot 1-(1-a\cdot 1)\cdot(a+b-a\cdot b)\cdot(1-b\cdot 1) \\
&= (a * b) \cdot 1 - 0 - (1 - a \cdot 1) \cdot b \cdot (1 - b \cdot 1) + 0 = (a * b) \cdot 1
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
&(a * b) \cdot [a \cdot 1 + (1 - a \cdot 1) \cdot (b \cdot 1)] = (a + b - a \cdot b) \cdot a \cdot 1 + (a + b - a \cdot b) \cdot (1 - a \cdot 1) \cdot (b \cdot 1) \\
&= a \cdot (a + b - a \cdot b) \cdot 1 + (1 - a \cdot 1) \cdot (a + b - a \cdot b) \cdot (b \cdot 1) = a \cdot a \cdot 1 + (1 - a \cdot 1) \cdot b \cdot (b \cdot 1) \\
&= a \cdot 1+(1-a \cdot 1) \cdot (b \cdot 1) = a \cdot 1+[(1-a \cdot 1) \cdot 1](b \cdot 1) = a \cdot 1+(1-a \cdot 1)(b \cdot 1) = a \cdot 1 * b \cdot 1.
\end{aligned}$$

On en déduit que $(a * b) \cdot 1 = a \cdot 1 * b \cdot 1$.

L'opération $*$ est associative puisque

$$\begin{aligned}
&(a * b) * c = a + (1 - a \cdot 1)b + \big(1 - a \cdot 1 - (1 - a \cdot 1)(b \cdot 1)\big)c \\
&= a + (1 - a \cdot 1)b + (1 - a \cdot 1)(1 - b \cdot 1)c = a + (1 - a \cdot 1)(b + (1 - b \cdot 1)c) = a * (b * c).
\end{aligned}$$

En outre, $0 * a = 0 + a - 0 \cdot a = a$ (proposition 11.13.2), et $a \cdot (a * b) = a \cdot (a + b - a \cdot b) = a \cdot a = a$. On a

$$a \cdot (b * c) = a \cdot (b + c - b \cdot c) = a \cdot b + a \cdot c - a \cdot b \cdot c = a \cdot b + a \cdot c - a \cdot b \cdot a \cdot c = a \cdot b * a \cdot c.$$

Également, on a

$$(a * b) \cdot c = \big((a * b) \cdot 1\big)c = \big((a \cdot 1) * (b \cdot 1)\big)c = (a \cdot 1 + b \cdot 1 - a \cdot b \cdot 1)c =$$
$$= a \cdot c + b \cdot c - a \cdot b \cdot c = a \cdot c + b \cdot c - a \cdot c \cdot b \cdot c = a \cdot c * b \cdot c$$

Définissons l'opération $\dashv$ par $a \dashv b = (a - b) \cdot 1$. On a $a \dashv a = (a - a) \cdot 1 = 0 \cdot 1 = 0$ (proposition 11.13.2). En outre, l'opération $\dashv$ est commutative puisque

$$a \dashv b = (a - b) \cdot 1 = \big[-\big((b - a) \cdot 1\big)(b - a)\big] \cdot 1 = \Big[\big((b - a) \cdot 1\big)(a - b)\Big] \cdot 1$$
$$= (b - a) \cdot (a - b) \cdot 1 = (a - b) \cdot (b - a) \cdot 1 = (b - a) \cdot 1 = b \dashv a.$$

Aussi

$$a \cdot (b \dashv c) = a \cdot (b - c) \cdot 1 = (a \cdot b - a \cdot c) \cdot 1 = a \cdot b \dashv a \cdot c.$$

Enfin, $(a \dashv b) * 1 = (a \dashv b) + 1 - (a \dashv b) \cdot 1 = 1$ et

$$(a \dashv b) * a = (a \dashv b) + a - (a - b) \cdot (a - b + b)$$
$$= (a \dashv b) + a - (a - b) - (a - b) \cdot b = (a \dashv b) + b - (a \dashv b) \cdot b = (a \dashv b) * b.$$

Donc les trois opérations précédentes définissent sur A une structure de booloïde tel que ses éléments distingués sont 0 et 1 et vérifie aussi l'égalité $a \cdot (bc) = (a \cdot b)(a \cdot c)$.
2) $\Rightarrow$ 3) : Posons $e(a) = a \cdot 1$. On a $e(0) = 0$ et aussi $ae(a) = a(a \cdot 1) = a$. Si $e(a)b = a \cdot b = 0$ alors $b \cdot a = 0$ d'après 3, donc $b \cdot (a \cdot 1) = 0$, donc $be(a) = b(a \cdot 1) = 0$ (proposition 11.13.2). En outre, $e(a)$ est idempotent puisque $e(a)e(a) = (a \cdot 1)(a \cdot 1) = a \cdot a \cdot 1 = a \cdot 1 = e(a)$. On a $\big(e(a)be(a) - be(a)\big)e(a) = 0$ car $e(a)\big(e(a)be(a) - be(a)\big) = 0$. Donc $e(a)be(a) - be(a) = 0$, et par suite $be(a) = e(a)be(a) = (a \cdot b)(a \cdot 1) = a \cdot b = e(a)b$. Donc $e(a)$ est un élément idempotent central. Enfin, $e(a)e(b) = (a \cdot 1)(b \cdot 1) = a \cdot b \cdot 1 = \big((a \cdot 1)b\big) \cdot 1 = e(e(a)b)$.
3) $\Rightarrow$ 1) : Soit A un E-anneau. Définissons l'opération $\cdot$ par $a \cdot b = e(a)b$. Alors $a \cdot a = e(a)a = a$ et

$$(a \cdot b) \cdot c = e(e(a)b)c = e(a)e(b)c = e(a)(e(b)c) = a \cdot (b \cdot c).$$

On a

$$a \cdot (bc) = e(a)bc = (a \cdot b)c = e(a)e(a)bc = e(a)be(a)c = (a \cdot b)(a \cdot c).$$

Soit $a \cdot b = 0$. Alors $e(a)e(b) = e(e(a)b) = e(a \cdot b) = 0$ donc

$$b \cdot a = e(b)a = e(b)e(a)a = e(a)e(b)a = 0a = 0. \quad \square$$

11.13.4 Proposition. *Un anneau fortement régulier est un anneau booloïde pour l'opération $a \cdot b = a\overline{a}b$.*

Démonstration. On a $a \cdot a = a\overline{a}a = a^2\overline{a} = a$ et

$$(a \cdot b) \cdot c = a\overline{a}b\overline{a\overline{a}b}c = (a\overline{a})^2 b\overline{b}c = a\overline{a}b\overline{b}c = a \cdot (b \cdot c).$$

De plus,

$$a \cdot (bc) = a\overline{a}bc = (a \cdot b)c = (a\overline{a})^2 bc = a\overline{a}ba\overline{a}c = (a \cdot b)(a \cdot c).$$

Enfin,

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a\overline{a}b = 0 \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow ba = 0 \Rightarrow \overline{b}ba = 0 \Rightarrow b \cdot a = 0.$$

Donc les anneaux fortement réguliers sont des anneaux booloïdes. Notons que

$$a * b = a + (1 - a\overline{a})b \quad \text{et} \quad a \dashv b = (a - b)\overline{(a - b)}. \quad \square$$

11.13.5 Proposition. *Les anneaux booloïdes simples s'identifient aux anneaux.*

Démonstration. Supposons que A est un anneau et définissons l'opération $\cdot$ par $a \cdot b = a$ si $a = 0$ et $a \cdot b = b$ si $a \neq 0$. L'opération $\cdot$ est idempotente puisque $a \cdot a = a$ et associative puisque

$$a \cdot (b \cdot c) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a \neq 0,\, b = 0 \\ c & \text{si } a \neq 0,\, b \neq 0 \end{array} \right\} = (a \cdot b) \cdot c.$$

De plus, on a

$$a \cdot (bc) = (a \cdot b)c = (a \cdot b)(a \cdot c) = \begin{cases} a & \text{si } a = 0 \\ bc & \text{si } a \neq 0. \end{cases}$$

Enfin, $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0 \Rightarrow b \cdot a = 0$. Alors A est un anneau booloïde. Les opérations $*$ et $\dashv$ du booloïde sont définies par

$$a * b = \begin{cases} b & \text{si } a = 0 \\ a & \text{si } a \neq 0 \end{cases} \qquad a \dashv b = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ 1 & \text{si } a \neq b. \end{cases}$$

Donc A est un anneau booloïde simple (théorème 11.13.3 et proposition 6.7). Réciproquement, tout anneau booloïde simple est un anneau. $\square$

11.13.6 Proposition. *Les anneaux booloïdes tels que l'opération $\cdot$ soit commutative sont exactement les anneaux de Boole.*

Démonstration. Soit A un anneau booloïde tel que l'opération $\cdot$ soit commutative. Alors $a \cdot b = a \cdot (1b) = (a \cdot 1)b = (1 \cdot a)b = ab$. Donc l'opération $\cdot$ coïncide avec le produit dans l'anneau. On en déduit que A est simplement un booloïde commutatif, donc une algèbre de Boole. Il est alors muni d'une structure d'anneau de Boole qui coïncide précisément avec la structure donnée d'anneau car on a $a * b = a + (1 - a \cdot 1)b = a + b - ab$. $\square$

English extended abstract. A notion of noncommutative Boolean algebra in introduced. It is shown that they can be represented by sheaves of bipointed sets on Boolean spaces. A notion of noncommutative Boolean space is introduced and a Stone duality is stated. It is proved that such a structure always appears whenever an algebraic structure can be naturally represented by a Boolean sheaf of simple algebras.

The "noncommutative Boolean algebras" are called booloid algebras or booloids, and are sets equipped with two distinguished elements denoted by 0 and 1, and three binary operations denoted by $\cdot$, $*$, $+$ which respectively represent the "noncommutative meet", the "noncommutative join", and the commutative "symmetric difference". The commutative booloid algebras *i.e.* those whose operations are commutative, are precisely the Boolean algebras. Any booloid algebra is naturally equipped with a complemented prelattice structure with chosen meets, joins and complements. The quotient lattice associated to this prelattice is a couniversal Boolean algebra associated to the booloid algebra.

Any bipointed set has a natural booloid structure. Any von Neumann commutative ring is canonically a booloid. If E is a Hausdorff etale space over a Boolean space equipped with two distinguished continuous global sections, then the set of global continuous sections of E has a natural structure of booloid.

The theory of booloid algebras develops in the same way as the classical theory of Boolean algebras, including ideals, filters, prime ideals and filters, and spectra. The booloid algebras which are simple *i.e.* with no nontrivial ideal, are precisely the bipointed sets with two distincts distinguished points. The simple quotients of a booloid algebra A are the fibres of a sheaf on the Boolean space $\mathrm{Spec}(A)$ and the set of global sections of this sheaf can be identified to A.

A booloid space E is defined as being a Hausdorff etale space over a Boolean space X, equipped a global continuous section. The set of clopen sections of E is a booloid algebra. We state a booloidal Stone duality proving that any booloid algebra is of that form. More precisely we prove that the category of booloid spaces is equivalent to the dual of the categoy of booloid algebras.

A booloid algebraic theory is an algebraic theory T which has at least two constants denoted by 0 and 1, and three binary operations denoted by $\cdot$, $*$, $+$ satisfying the axioms of booloid algebras and the following compatibility axiom, for any n-ary operation ω in T:

$$x \cdot \omega(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x \cdot \omega(x \cdot x_1, x \cdot x_2, \ldots, x \cdot x_n).$$

We prove that the T-algebras for such a theory are naturally represented by Boolean sheafs of simple algebras, and conversely, that any algebraic theory with two separate constants and whose algebras are naturally represented by Boolean sheafs of simple algebras, is necessary a booloid algebraic theory.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. F. Arens et I. Kaplansky, *Topological representation of algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 457–481.
2. Y. Diers, *Une description axiomatique des catégories de faisceaux de structures algébriques sur les espaces topologiques booléens*, Adv. in Math. **47** (1983), 258–299.
3. ———, *Categories of Boolean sheaves of simple algebras*, Lecture Notes in Mathematics no. 1187, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo, 1980.
4. A. Godement, *Théorie des faisceaux*, Hermann, Paris, 1958.
5. K. H. Hofmann, *Representations of algebras by continuous sections*, Bull. Amer. Math. Soc **78** (1972), 291–373.
6. J. F. Kennison, *Triples and compact sheaf representations*, J. Pure Appl. Algebra **20** (1981), 13–38.
7. ———, *Structure and costructure for strongly regular rings*, J. Pure Appl. Algebra **5** (1974), 321–332.
8. F. W. Lawvere, *Functorial semantics of algebraic theories*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), 869–873.
9. J. von Neumann, *Regular rings*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **22** (1936), 707–713.
10. H. Schubert, *Categories*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/ New York, 1972.

Yves Diers et Élie Koudsi
Université de Valenciennes
Laboratoire de mathématiques
Le Mont Houy, B. P. 311
59304 Valenciennes Cedex FRANCE