Ann. sc. math. Québec, **14** (2), 1990, 183–191.

CODES ET PARTITIONS COHÉRENTES DANS LES GRAPHES RÉGULIERS

ANDRÉ MONTPETIT

RÉSUMÉ. En généralisant aux graphes des notions de théorie des codes, on relie les codes avec les partitions cohérentes. On trouve ainsi un nouveau paramètre associé à un code. On montre que l'ensemble des valeurs propres de la matrice associée à chaque partition cohérente contenant un code comprend les indices des termes non-nuls de la distribution duale du code.

ABSTRACT. Generalizing to graph theory some notions of coding theory, we connect codes and coherent partitions. We find a new parameter associated to a code. We show that the indices of the non-zero terms of the dual distribution of a code are in the set of eigenvalues of the matrix associated to each coherent partition which contains the code.

1. Introduction. Soit F_q le corps à q éléments. Sur l'espace vectoriel F_q^n on définit la métrique de Hamming d comme suit: pour $x, y \in \mathsf{F}_q^n$, $d(x,y)$ est le nombre de composantes où x et y diffèrent. Un code Y de longueur n sur l'alphabet F_q est une partie de F_q^n munie de la métrique induite.

Dans [**2**], Camion, Courteau et Delsarte caractérisent les codes complètement réguliers (codes Y tels que $\text{card}\{y \in Y \mid d(x,y) = i\}$ ne dépend que de $d(x,Y)$) en fonction d'une propriété de la partition $\{X_0, X_1, \ldots, X_\rho\}$ de l'espace de Hamming F_q^n où $X_i = \{x \in \mathsf{F}_q^n \mid d(x,Y) = i\}$. Cette propriété peut s'énoncer ainsi:

$$\begin{aligned}&\text{pour tout } i,j \in \{0,1,\ldots,\rho\}, \text{ pour tout } x \in X_j, \text{ le nombre de } y \in X_i\\ &\text{tels que } d(x,y) = 1 \text{ est un nombre } \sigma_{ij} \text{ ne dépendant que de } i \text{ et } j.\end{aligned} \qquad (*)$$

Ils démontrent de plus que pour tout code linéaire Y, c'est-à-dire un sous-espace de F_q^n, les translatés de Y fournissent un schéma d'association (voir [4]) si et seulement si le code Y est réunion de classes d'une partition vérifiant la propriété $(*)$ et ayant $s'+1$ classes, s' étant la distance externe du code Y (voir [4]). La partition en question est définie par

$$x \sim y \iff \text{card}\{z \in Y \mid d(x,z) = i\} = \text{card}\{z \in Y \mid d(y,z) = i\} \text{ pour tout } i \leq \rho. \quad (**)$$

Lorsqu'on remplace l'espace de Hamming F_q^n par l'ensemble des sommets d'un graphe et la distance de Hamming par la distance du plus court chemin, les partitions qui ont la propriété $(*)$ sont déjà connues des chercheurs en théorie des graphes. Schwenk [**10**] est l'un des premiers à définir la notion sous le nom de partition équitable. Peu de temps après, Higman [**7**] la retrouve et lui donne le nom de partition cohérente. Cvetković *et al.* [**3**] appelle diviseur avant d'un graphe une notion équivalente. McKay [**8**] se sert de ces partitions pour calculer le groupe d'automorphismes d'un graphe sommet-coloré. Nous

Reçu le 29 septembre 1988 et, sous forme révisée, le 1er février 1990.

adopterons la terminologie de Higman "*partition cohérente*" pour désigner les partitions qui vérifient la propriété $(*)$.

L'origine graphique de la propriété $(*)$ nous invite à généraliser les résultats de Camion *et al.* aux graphes tout en particularisant la relation entre distance externe et partition cohérente. Pour cette étude, on se restreindra aux graphes réguliers, ce qui nous permettra d'utiliser certains résultats sur l'algèbre d'adjacence du graphe.

Pour chaque partie Y des sommets du graphe, on définit l'ensemble annulateur S_Y de Y. C'est l'ensemble minimal des valeurs propres de la matrice d'adjacence A du graphe tel que le vecteur caractéristique de Y est contenu dans la somme directe des espaces propres de A.

D'autre part, on dira qu'une partition cohérente est admise par Y si Y est la réunion de classes de la partition. L'ensemble des partitions admises par Y a un plus grand élément π_Y. La cardinalité de π_Y est invariante par les automorhismes du graphe. Dans l'espace de Hamming, la cardinalité de π_Y est donc un nouveau paramètre du code Y.

Dans ce travail, nous établirons une relation entre l'ensemble annulateur de Y et la partition π_Y en montrant que les éléments de S_Y sont des valeurs propres de la matrice $\sigma = (\sigma_{ij})$ associée à la partition π_Y.

D'abord on généralise la récurrence de Camion *et al.* sur les colonnes de la matrice des chemins du code Y dont l'élément en position (x, j) est le nombre de chemins de longueur j entre x et le code Y. La récurrence est donnée par les coefficients du polynôme dont les racines sont les éléments de l'ensemble annulateur de Y.

On montre ensuite que chaque partition cohérente admise par Y est plus fine que la partition définie par $(**)$ avec égalité si la matrice des chemins a $\operatorname{card} S_Y$ lignes distinctes. De plus, la matrice σ^t fournit une récurrence sur les colonnes de la matrice C^* obtenue de la matrice des chemins en ne conservant qu'une ligne par classes de la partition. En utilisant les deux récurrences, nous aurons le résultat voulu.

Les résultats de cet article constituent une partie de la thèse de doctorat de l'auteur [9] écrite sous la direction de Bernard Courteau à l'Université de Sherbrooke.

2. Codes dans un graphe régulier. Soit $\Gamma = (X, E)$ un graphe connexe, régulier de degré v. Soit A la matrice d'adjacence de Γ définie par

$$A(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \{x,y\} \in E; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit N l'ensemble des valeurs propres de A. On a que $N \subseteq \mathbf{R}$ et $v \in N$. L'algèbre $\mathrm{A}(\Gamma)$ engendrée par la matrice d'adjacence A de Γ est semi-simple; elle a donc une base $\{J_\alpha \mid \alpha \in N\}$ formée des matrices de projection orthogonale sur les sous-espaces propres W_α de A.

$$J_\alpha = \prod_{\beta \in N \setminus \{\alpha\}} \frac{A - \beta I}{\alpha - \beta}.$$

Une partie Y non-vide de X sera dite *code* dans le graphe Γ. On dira qu'il est e-correcteur s'il n'y a pas de chemin de longueur inférieure à $2e+1$ entre deux mots de Y. Posons Φ_Y le vecteur caractéristique de Y défini par

$$\Phi_Y(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in Y; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le vecteur $b_Y = (b_Y(\alpha))_{\alpha \in N}$ est la *distribution duale* de Y si

$$b_Y(\alpha) = \frac{(\operatorname{card} X)}{(\operatorname{card} Y)^2} \Phi_Y^t J_\alpha \Phi_Y = \frac{(\operatorname{card} X)}{(\operatorname{card} Y)^2} \|J_\alpha \Phi_Y\|.$$

On vérifie les propriétés suivantes:

(1) Pour tout $\alpha \in N$, $b_Y(\alpha)$ est un réel non-négatif et $b_Y(v) = 1$.
(2) $\sum_{\alpha \in N} b_Y(\alpha) = (\operatorname{card} X)/(\operatorname{card} Y)$.
(3) $b_Y(\alpha) = 0 \iff \Phi_Y \in \bigoplus_{\beta \in N \setminus \{\alpha\}} W_\beta$.

L'ensemble $S_Y = \{\alpha \in N \mid b_Y(\alpha) \neq 0\}$ sera dit *ensemble annulateur* de Y. Posons $s = \operatorname{card}(S_Y \setminus \{v\})$. Le *polynôme annulateur* de Y est le polynôme

$$q(z) = \prod_{\alpha \in S_Y} (z - \alpha) = \sum_{i=0}^{s+1} \beta_i z^i.$$

Remarquons que $\Phi_Y \in \bigoplus_{\alpha \in S_Y} W_\alpha$ mais $\Phi_Y \notin \bigoplus_{\alpha \in S'} W_\alpha$ quelque soit $S' \subset S_Y$, $S' \neq S_Y$. On a que $S_{Y \cup Z} \subseteq S_Y \cup S_Z$. De plus, $S_{X \setminus Y} = S_Y$, $b_{X \setminus Y}(v) = b_Y(v) = 1$ et, pour tout $\alpha \neq v$, $(\operatorname{card} X \setminus Y)^2 b_{X \setminus Y}(\alpha) = (\operatorname{card} Y)^2 b_Y(\alpha)$.

On appellera *matrice des chemins* associée à Y la matrice C_Y définie par

$$C_Y(x, i) = \sum_{y \in Y} A^i(x, y).$$

Pour tout $x \in X$, $C_Y(x, i)$ est le nombre de chemins de longueur i entre x et les sommets dans Y. Si, pour $k \in \mathbb{N}$, $C_Y(k)$ désigne la k^e colonne de C_Y alors $C_Y(0) = \Phi_Y$, $C_Y(k) = AC_Y(k-1)$ et $C_Y(k) = A^k \Phi_Y$.

Remarque. Ces concepts trouvent leur origine dans la théorie algébrique des codes. Par exemple, dans le cas d'un code linéaire Y la distribution duale de Y est la distribution des poids du code dual $Y^\perp = \{y \in \mathbb{F}_q^n \mid \langle x, y \rangle = 0$, pour tout $x \in Y\}$ relativement au produit scalaire standard $\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i$. L'ensemble annulateur de Y est dans ce cas l'ensemble $\{n(q-1) - qw_i \mid i = 0, \ldots, s'\}$ où les w_i sont les poids du dual $Y^\perp$.

Nous allons tout d'abord généraliser la récurrence obtenue par Camion *et al.* [**2**] sur les colonnes de la matrice des chemins associée à Y. La récurrence d'ordre minimal est fournie par le polynôme annulateur de Y.

Théorème 1. *L'ensemble*

$$\left\{ p(z) = \sum_{i=0}^{m} \gamma_i z^i \,\middle|\, \sum_{i=0}^{m} \gamma_i C_Y(i+k) = 0, \textit{pour tout } k \in \mathbb{N} \right\}$$

est un idéal de $\mathbb{C}[z]$ engendré par le polynôme annulateur $q(z) = \sum_{i=0}^{s+1} \beta_i z^i$ de Y où $\mathbb{C}$ est le corps des nombres complexes.

Démonstration: Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{s+1} \beta_i C_Y(i+k) = \sum_{i=0}^{s+1} \beta_i A^{i+k} \Phi_Y &= \sum_{i=0}^{s+1} \beta_i A^{i+k} \sum_{\alpha \in N} J_\alpha \Phi_Y \\ &= \sum_{i=0}^{s+1} \beta_i \sum_{\alpha \in N} \alpha^{i+k} J_\alpha \Phi_Y = \sum_{\alpha \in N} \alpha^k \left(\sum_{i=0}^{s+1} \beta_i \alpha^i \right) J_\alpha \Phi_Y.\end{aligned}$$

Si $\alpha \in S_Y$, $\sum_{i=0}^{s+1} \beta_i \alpha^i = q(\alpha) = 0$. Si $\alpha \in N \backslash S_Y$, $b_Y(\alpha) = 0$ d'où $\|J_\alpha \Phi_Y\| = 0$ et $J_\alpha \Phi_Y = 0$. Supposons que $\sum_{i=0}^{m} \gamma_i C_Y(i+k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors $\sum_{\alpha \in S_Y} \left(\sum_{i=0}^{m} \gamma_i \alpha^i\right) J_\alpha \Phi_Y = 0$ et, pour tout $\beta \in S_Y$,

$$0 = \langle 0, J_\beta \Phi_Y \rangle = \left\langle \sum_{\alpha \in S} \left(\sum_{i=0}^{m} \gamma_i \alpha^i \right) J_\alpha \Phi_Y, J_\beta \Phi_Y \right\rangle = \sum_{\alpha \in S} \left(\sum_{i=0}^{m} \gamma_i \alpha^i \right) \Phi_Y^t J_\alpha J_\beta \Phi_Y$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{m} \gamma_i \beta^i \right) \Phi_Y^t J_\beta \Phi_Y = (\operatorname{card} Y)^2 \left(\sum_{i=0}^{m} \gamma_i \beta^i \right) b_Y(\beta).$$

Comme $b_Y(\beta) \neq 0$, $\sum_{i=0}^{m} \gamma_i \beta^i = 0$. □

COROLLAIRE 2. *Soit $q(z) = \sum_{i=0}^{s+1} \beta_i z^i$ le polynôme annulateur de Y. Alors,*

$$C_Y(s+1+k) = -\sum_{i=0}^{s} \beta_i C_Y(i+k), \quad \textit{pour tout } k \in \mathbb{N},$$

est la récurrence d'ordre minimal sur les colonnes de C_Y.

COROLLAIRE 3. *Le rang de C_Y est $s+1$.*

REMARQUE. Dans [**4**], Delsarte définit la matrice B des distances de Y dans laquelle le terme en position (x, i) est le nombre d'éléments de Y à distance i de x. Il montre [**5**, théorème 3.2] que, dans un espace de Hamming, le rang de B est $s+1$ et les $s+1$ premières colonnes de B forment une base de l'espace colonne de B. Ce résultat découle des corollaires 2 et 3 car les matrices B et C_Y sont reliées par une matrice triangulaire ([**2**]). Si on n'est pas dans un schéma d'association, le lien entre C_Y et B n'est plus aussi direct et la relation entre le rang de B et s n'est plus vraie. Notons, de plus, que les colonnes de la matrice B ne vérifient pas de récurrence linéaire contrairement à C_Y.

3. Partitions cohérentes. La partition $\pi = \{X_0, X_1, \dots, X_r\}$ de X sera dite *partition cohérente* de $\Gamma = (X, E)$ si, pour tout $i, j \in \{0, 1, \dots, r\}$, pour tout $x \in X_j$, le nombre de $y \in X_i$ tels que $\{x, y\} \in E$ est un nombre σ_{ij} ne dépendant que de i et j. On dira que le code Y *admet* la partition π s'il existe $L \subseteq \{0, 1, \dots, r\}$ tel que $Y = \bigcup_{i \in L} X_i$.

Remarquons que la matrice σ définie ici est la transposée de celle considérée par Camion *et al.* [**2**]. De plus, la matrice σ est définie à une permutation près des classes de π.

Si $\{X_0, X_1, \dots, X_r\}$ est une partition cohérente alors

$$A \Phi_{X_i} = \sum_{j=0}^{r} \sigma_{ij} \Phi_{X_j}.$$

Donc $\{\Phi_{X_0}, \Phi_{X_1}, \dots, \Phi_{X_r}\}$ engendre un sous-espace invariant par A.

Puisque Γ est régulier de degré v, X admet la partition grossière $\{X\}$, la matrice associée étant $\sigma = (v)$. Tout code Y admet la partition discrète $\pi = \{\{x\} \mid x \in X\}$; la matrice σ est ici la matrice d'adjacence A de Γ. Si Y admet la partition $\pi = \{X_0, X_1, \dots, X_r\}$, il existe $L \subseteq \{0, 1, \dots, r\}$ tel que $Y = \bigcup_{j \in L} X_j$. Donc $X \setminus Y = \bigcup_{j \in \{0,1,\dots,r\} \setminus L} X_j$ et $X \setminus Y$ admet π.

Les partitions cohérentes de Γ forment un ensemble partiellement ordonné Coh: si π et π' sont deux partitions cohérentes

$$\pi \leq \pi' \iff \text{les classes de } \pi' \text{ sont des réunions de classes de } \pi.$$

La partition discrète est le plus petit élément de l'ordonné Coh et la partition $\{X\}$ le plus grand. De plus, l'ordonné Coh est un treillis complet, le supremum étant le même que celui du treillis des partitions de X. Donc, pour tout code Y, l'ensemble des partitions cohérentes admises par Y n'est pas vide et possède donc un plus grand élément que nous appellerons *partition modulo* Y et que nous noterons π_Y.

Si $\phi \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ le groupe des automorphismes de Γ et si Y admet la partition $\pi = \{X_0, X_1, \ldots, X_r\}$ alors $\phi(Y)$ admet $\pi' = \{\phi(X_0), \phi(X_1), \ldots, \phi(X_r)\}$, la matrice σ associée à π est aussi associée à π'. Si G est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ et si $\mathcal{O}$ est l'ensemble des orbites pour l'action de G sur X alors $\mathcal{O}$ est une partition cohérente. McKay [**8**] a montré que si $\operatorname{card}\pi \geq \operatorname{card} X - 4$ ou si $\operatorname{card}\pi \in \{\operatorname{card} X - m, \operatorname{card} X - m - 1\}$, m étant le nombre de classes de π qui ne sont pas des singletons, alors toutes les partitions cohérentes π' telles que $\pi' \leq \pi$ sont de cette forme $\mathcal{O}$.

Soit $\pi = \{X_0, X_1, \ldots, X_r\}$ une partition cohérente de Γ. En comptant la quantité $\operatorname{card}\{(x,y) \in X_i \times X_j \mid \{x,y\} \in E\}$ de deux façons différentes, on obtient

$$\sigma_{ij}(\operatorname{card} X_j) = \sigma_{ji}(\operatorname{card} X_i).$$

Donc le vecteur $(\operatorname{card} X_0, \operatorname{card} X_1, \ldots, \operatorname{card} X_r)^t$ est un vecteur propre de σ associé à v puisque

$$\sum_{j=0}^{r} \sigma_{ij} \operatorname{card} X_j = \sum_{j=0}^{r} \sigma_{ji} \operatorname{card} X_i = \operatorname{card} X_i \sum_{j=0}^{r} \sigma_{ji} = v \operatorname{card} X_i.$$

Si $\pi = \{X_0, X_1, \ldots, X_r\}$ et $\pi' = \{X'_0, X'_1, \ldots, X'_{r'}\}$ sont deux partitions cohérentes de Γ de matrice associée σ et σ' respectivement telle que $\pi \leq \pi'$, considérons la matrice M définie par

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } X_i \subseteq X'_j; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $M\sigma' = \sigma M$ puisque, d'une part

$$\left(M\sigma'\right)_{ij} = \sum_{k=0}^{r'} M_{ik}\sigma'_{kj} = \sigma'_{lj}$$

pour l tel que $X_i \subseteq X'_l$ et d'autre part,

$$\begin{aligned} \left(\sigma M\right)_{ij} &= \sum_{k=0}^{r} \sigma_{ik} M_{kj} = \sum_{X_k \subseteq X'_j} \sigma_{ik} \\ &= \sum_{X_k \subseteq X'_j} \operatorname{card}\{y \in X_k \mid \{x,y\} \in E\} \quad \text{avec } x \in X_i \\ &= \operatorname{card}\{y \in X'_j \mid \{x,y\} \in E\} \quad \text{avec } x \in X_i \subseteq X'_l \\ &= \sigma'_{lj} \end{aligned}$$

pour l tel que $X_i \subseteq X'_l$. Remarquons que le rang de M est $r' + 1$.

THÉORÈME 4.

(1) *Si* $\pi \leq \pi'$, $\sigma' u = \lambda u \iff \sigma M u = \lambda M u$.
(2) *Pour toute partition cohérente,* σ *est diagonalisable.*
(3) *Si* $\pi \leq \pi'$, *le polynôme caractéristique de* σ' *divise celui de* σ.

DÉMONSTRATION:

(1) Si $\sigma' u = \lambda u$ alors $M\sigma' u = \lambda Mu$ et donc $\sigma Mu = \lambda Mu$. Réciproquement, si $\sigma Mu = \lambda Mu$ alors $M\sigma' u = \lambda Mu$ et $M^t M\sigma' u = \lambda M^t Mu$. Comme $(M^t M)_{ij} = \delta_{ij} \operatorname{card}\{X_k \in \pi \mid X_k \subseteq X'_i\}$, et que $\operatorname{card}\{X_k \in \pi \mid X_k \subseteq X'_i\} \neq 0$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, r'\}$ $M^t M$ est inversible et $\sigma' u = \lambda u$.

(2) Comme la partition discrète est plus petite que π, il existe une matrice M telle que $M\sigma = AM$. Soit $\{u_i \mid 0 \leq i \leq \operatorname{card} X\}$ une base de vecteurs propres de A. Alors pour tout $i \leq \operatorname{card} X$, $\sigma^t(M^t u_i) = M^t A u_i = \lambda M^t u_i$. Donc $\{M^t u_i \mid 0 \leq i \leq \operatorname{card} X\}$ est un ensemble de vecteurs propres de σ^t. Comme la matrice M est de rang $r+1$, ces vecteurs engendrent un espace de dimension $r+1$ et on peut en extraire une base. σ^t est donc diagonalisable. D'où σ est diagonalisable.

(3) Si λ est une valeur propre de σ, λ est valeur propre de σ'. La fonction $(u, u') \mapsto \overline{u}^t M^t M u' = (\overline{Mu})^t (Mu')$ est un produit scalaire sur $\mathbb{C}^{r'+1}$. Si $\{u_0, u_1, \ldots, u_l\}$ est une base orthonormée de l'espace propre de σ' associé à λ pour ce produit scalaire alors $\{Mu_0, Mu_1, \ldots, Mu_l\}$ est un ensemble orthonormal de vecteurs propres de σ pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^{r+1}$. C'est donc un ensemble linéairement indépendant. La multiplicité de λ comme valeur propre de σ est au moins égale à sa multiplicité comme valeur propre de σ'. Donc le polynôme caractéristique de σ' divise celui de σ. □

Donc, pour toute $\pi \in$ Coh, l'ensemble N_π des valeurs propres de la matrice associée σ est un sous-ensemble de N et la multiplicité de chaque valeur propre de σ ne peut dépasser sa multiplicité comme valeur propre de A. Nous allons maintenant montrer que l'ensemble des valeurs propres de σ est l'union des ensembles annulateurs S_{X_i} des classes X_i de la partition π.

PROPOSITION 5. *Soit $Y \subseteq X$ et C_Y la matrice des chemins associée. Si Y admet la partition cohérente $\pi = \{X_0, X_1, \ldots, X_r\}$ de matrice associée σ alors*

(1) *Pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, r\}$, $x, y \in X_i$, $j \in \mathbb{N}$,*

$$C_Y(x, j) = C_Y(y, j).$$

(2) *Les nombres $C^*_{ij} = C_Y(x, j)$ pour $x \in X_i$ satisfont à la récurrence linéaire*

$$C^*_{ij} = \sum_{k=0}^{r} \sigma_{ki} C^*_{k,j-1}.$$

(3) *Le nombre de lignes distinctes de C_Y est au plus $r+1$.*

(4) *$s \leq r$.*

DÉMONSTRATION: (par induction sur j) Puisque $C_Y(0) = \Phi_Y$ et que Y est une réunion de classes de π le résultat est vrai pour $j = 0$. Supposons que, pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ et pour tout $z \in X$, le nombre $C_Y(z, j)$ ne dépende que de la classe X_l contenant z. Soit $j = m$ et $x \in X_i$. Pour chaque chemin γ de longueur m reliant x et un sommet dans Y, il existe un unique k tel que γ soit la concaténation d'un chemin de longueur 1 entre x et $x' \in X_k$ et d'un chemin de longueur $m-1$ entre x' et cet élément de Y. Comme σ_{ki}, le nombre de chemins de longueur 1 entre x et X_k, ne dépend que de i et k et que par hypothèse $C_Y(x', m-1) = C^*_{k,m-1}$, le nombre de chemins de longueur $m-1$ ne dépend que de k, $C_Y(x, m) = \sum_{k=0}^{r} \sigma_{ki} C^*_{k,m-1}$ ne dépend que de i. Les parties (3) et (4) découlent immédiatement. □

Remarque. Dans le cas d'un espace de Hamming, la cardinalité de π_Y est un paramètre nouveau associé au code Y. Si $r = \operatorname{card} \pi_Y - 1$, alors on a les inégalités $e \leq \rho \leq s' \leq r$ où e est la capacité correctrice de Y, ρ son rayon de recouvrement et s' sa distance externe. Les deux premières inégalités sont dues à Delsarte [**5**].

On appellera partition de Γ *par les chemins* relativement à Y la partition η_Y de X définie par

$$x \equiv y \iff C_Y(x,j) = C_Y(y,j) \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

La partition η_Y n'est pas nécessairement cohérente. Considérons, par exemple, la partie $Y = \{0,2,4\}$ de $\mathbb{Z}_{12}$ dans le graphe $\Gamma = (\mathbb{Z}_{12}, E)$ où $\{x,y\} \in E \iff y - x \in \{3,4,8,9\}$. La matrice des chemins associée à Y est

$$C_Y = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 17 & 67 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 16 & 64 & \dots \\ 1 & 0 & 4 & 14 & 62 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 16 & 64 & \dots \\ 1 & 1 & 5 & 17 & 67 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 16 & 64 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 15 & 61 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 16 & 64 & \dots \\ 0 & 2 & 4 & 18 & 66 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 16 & 64 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 15 & 61 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 16 & 64 & \dots \end{pmatrix} \end{array}$$

La partition η_Y est donc

$$\eta_Y = \{\{0,4\},\{1,3,5,7,9,11\},\{2\},\{6,10\},\{8\}\}.$$

Cependant cette partition n'est pas cohérente car $\{2,11\} \in E$ mais $\{2,3\} \notin E$. La partition modulo Y est la plus grossière de toutes les partitions cohérentes plus fines que la partition η_Y. La partition modulo Y est

$$\pi_Y = \{\{0,4\},\{1,3,9,7\},\{2\},\{5,11\},\{6,10\},\{8\}\}$$

de matrice associée

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que les valeurs propres de σ sont $\{4,2,1,0,-1,-3\}$ alors que l'ensemble annulateur de Y est $S_Y = \{4,2,0,-1\}$. Voici une condition suffisante pour que la partition des chemins relativement à Y et la partition modulo Y coincident.

Proposition 6. *Si C_Y a $s+1$ lignes distinctes, la partition η_Y est cohérente.*

Démonstration: Soit $\eta_Y = \{Z_0, Z_1, \dots, Z_s\}$ la partition de Γ par les chemins relativement à Y. Pour tout $i \in \{0,1,\dots,s\}$, $x \in Z_i$, $k \in \mathbb{N}$, $C_Y(x,k) = C^*_{ik}$ par définition de Z_i.

Pour tout $i, j \in \{0, 1, \ldots, s\}$ et $x \in Z_i$, posons $\sigma_j(x) = \mathrm{card}\{y \in Z_j \mid \{x, y\} \in E\}$. Alors pour $k \in \mathbb{N}^*$, $x \in Z_i$, $C_Y(x, k) = \sum_{j=0}^{s} \sigma_j(x) C^*_{j,k-1} = C^*_{ik}$. Si $x, x' \in Z_i$,

$$0 = C_Y(x, k) - C_Y(x', k) = \sum_{j=0}^{s} \big(\sigma_j(x) - \sigma_j(x')\big) C^*_{i,k-1}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Puisque le rang de C_Y est $s + 1$, on peut extraire de ces équations un système de $s + 1$ équations indépendantes à $s + 1$ inconnues. Donc, pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, s\}$, $\sigma_j(x) - \sigma_j(x') = 0$. D'où η_Y est une partition cohérente. □

La condition précédente n'est pas nécessaire comme le démontre l'exemple suivant. Considérons le graphe $\Gamma = (\mathbb{Z}_{12}, E)$ défini par $\{x, y\} \in E \iff y - x \in \{1, 2, 6, 10, 11\}$. La matrice des chemins associée à $\{0\}$ est

$$C_{\{0\}} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 & 69 & 220 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 36 & 301 & \ldots \\ 0 & 1 & 1 & 15 & 40 & 301 & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 12 & 52 & 265 & \ldots \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 52 & 256 & \ldots \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 64 & 220 & \ldots \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 52 & 260 & \ldots \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 64 & 220 & \ldots \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 52 & 256 & \ldots \\ 0 & 1 & 2 & 12 & 52 & 265 & \ldots \\ 0 & 1 & 1 & 15 & 40 & 301 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 15 & 36 & 301 & \ldots \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ce qui nous donne que la partition $\eta_{\{0\}}$ est

$$\eta_{\{0\}} = \{\{0\}, \{1, 11\}, \{2, 10\}, \{3, 9\}, \{4, 8\}, \{5, 7\}, \{6\}\}.$$

Cette partition est cohérente et sa matrice associée est

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice d'adjacence de Γ a 6 valeurs propres distinctes $\{5, \sqrt{3}, 1, -1, -\sqrt{3}, -3\}$, $s + 1 \leq 6$. En fait, $s + 1 = 6$. Remarquons que 1 est valeur propre double de σ.

THÉORÈME 7. *Si Y admet la partition cohérente π de matrice associée σ, les éléments de son ensemble annulateur S_Y sont valeurs propres de σ.*

DÉMONSTRATION: Si on pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $C^*_k = (C^*_{0k}, C^*_{1k}, \ldots, C^*_{rk})^t$ on a $C^*_k = \sigma^t C^*_{k-1}$ et $C^*_k = (\sigma^t)^k C^*_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $p_\sigma(z) = \sum_{i=0}^{r+1} a_i z^i$ le polynôme minimal de σ alors $0 = p_\sigma(\sigma^t) C^*_0 = \sum_{i=0}^{r+1} a_i (\sigma^t)^i C^*_0$. En multipliant par $(\sigma^t)^m$ pour $m \in \mathbb{N}$, on obtient $0 = \sum_{i=0}^{r+1} a_i (\sigma^t)^{i+m} C^*_0 = \sum_{i=0}^{r+1} a_i C^*_{i+m}$. Donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $0 = \sum_{i=0}^{r+1} a_i C_Y(i + m)$. Par le théorème 1, on a que, pour tout $\alpha \in S$, $\sum_{i=0}^{r+1} a_i \alpha^i = 0$. Donc α est valeur propre de σ. □

COROLLAIRE 8. *Soit $\pi = \{X_0, X_1, \dots, X_r\} \in$ Coh alors l'ensemble N_π des valeurs propres de la matrice σ contient l'ensemble annulateur S_{X_i} de tout $X_i \in \pi$.*

PROPOSITION 9. *Soit $\pi = \{X_0, X_1, \dots, X_r\} \in$ Coh alors $N_\pi = \bigcup_{i=0}^r S_{X_i}$*

DÉMONSTRATION: Soit $\prod_{\beta \in N\setminus\{\alpha\}}(z - \beta/\alpha - \beta) = \sum_{j=0}^n \gamma_j z^j$. Donc

$$J_\alpha \Phi_{X_i} = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j A^j \Phi_{X_i} = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j \sum_{k=0}^{r} \sigma_{ik}^j \Phi_{X_k} = \sum_{k=0}^{r} \left(\sum_{j=0}^{n} \gamma_j \sigma_{ik}^j \right) \Phi_{X_k}.$$

On a $b_{X_i}(\alpha) = 0$ pour tout $i \leq r$ si et seulement si $J_\alpha \Phi_{X_i} = 0$ pour tout $i \leq r$. Alors, comme $\{\Phi_{X_k}\}$ est linéairement indépendant $\sum_{j=0}^n \gamma_j \sigma_{ik}^j = 0$ pour tout i, k, c'est-à-dire $\sum_{j=0}^n \gamma_j \sigma^j = 0$. Donc le polynôme minimal de σ divise $\prod_{\beta \in N\setminus\{\alpha\}} \frac{z-\beta}{\alpha-\beta}$ pour tout $\alpha \in \bigcap_{i=0}^r N \setminus S_{X_i} = \bigcup_{i=0}^r S_{X_i}$. Donc le polynôme minimal de σ divise leur plus grand commun diviseur

$$\prod_{\beta \in \bigcup_{i=0}^r S_{X_i}} \frac{z-\beta}{\alpha-\beta}.$$

Donc l'ensemble des valeurs propres de σ est contenu dans $\bigcup_{i=0}^r S_{X_i}$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

1. Biggs N., "Algebraic Graph Theory," Cambridge Tracts in Mathematics, **67**, Cambridge Univ. Press, Londres/New York, 1974.
2. Camion P., Courteau B. et Delsarte P., *On r-Partition Designs in Hamming Spaces*, Rapport de Recherche INRIA **626** (1987).
3. Cvetković D.M., Doob M. et Sachs H., "Spectra of graphs," Academic Press, New York, 1980.
4. Delsarte P., *An Algebraic Approach to the Association Schemes of Coding Theory*, Philips Res. Rep. **10** (1973).
5. ———, *Four Fundamental Parameters of a Code and their Combinatorial Signifiance*, Inform. and Control **23** (1973), 407–438.
6. Godsil C.D. et McKay B.D., *Feasibility Conditions for the Existence of Walk-Regular Graph*, Linear Algebra and Appl. **30** (1980), 51–61.
7. Higman D.G., *Coherent Configurations Part I: Ordinary Representation Theory*, Geometria Dedicatæ **4** (1975), 1–32.
8. McKay B.D., *Practical Graph Isomorphism*, Congressus Numerantium **30** (1981), 45–87.
9. Montpetit A., "Codes dans les graphes réguliers," Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, 1987.
10. Schwenk A.J., *Computing the Characteristic Polynomial of a Graph*, in "Graphs and Combinatorics," Lectures Notes in Mathematics **406**, Springer, Berlin, 1974, pp. 153–162.

A. Montpetit
Département de Mathématiques et d'Informatique
Université du Québec à Montréal
Montréal, Québec, H3C 3P8

Département de Mathématiques et d'Informatique
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Québec, J1K 2R1.