Ann. sc. math. Québec, **14** (2), 1990, 175–181.

MINIMISATION D'UNE FONCTION DE COÛT QUADRATIQUE POUR DES INTÉGRALES GAUSSIENNES

MARIO LEFEBVRE

RÉSUMÉ. Soit $y(t)$ un processus gaussien unidimensionnel et considérons le processus de diffusion $x(t)$ défini par $\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$. Soit T l'instant où le processus $y(t)$ frappe pour la première fois l'une ou l'autre de deux frontières absorbantes dans le plan. Dans cet article, on obtient la commande qui minimise l'espérance mathématique d'une fonction de coût quadratique avec coût final qui dépend de T et de $x(T)$.

ABSTRACT. Let $y(t)$ be one-dimensional Gaussian process and consider the diffusion process $x(t)$ defined by $\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$. Let T be the first time the process $y(t)$ hits either of two absorbing barriers in the plane. In this paper, we obtain the control that minimizes the expected value of a quadratic cost function with terminal cost involving T and $x(T)$.

1. Introduction. Considérons le système

$$\begin{cases} dx(t) = y(t)\,dt \\ dy(t) = M(y(t))\,dt + Bu(t)\,dt + V^{1/2}(y(t))\,dW(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

où $u(t)$ est la commande, B est non nul, $W(t)$ est un mouvement brownien standard (unidimensionnel) et $V(y(t))$ est positif. Ainsi on peut écrire

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)\,ds. \tag{1.2}$$

Dans cet article, on désire trouver la commande u^* qui minimise l'espérance mathématique de la fonction de coût

$$J(x,y) = \int_0^T \frac{1}{2}Qu^2\,dt + cT + dx(T), \tag{1.3}$$

où $c \geq 0$ et $d > 0$ sont des constantes, Q est positif et T est le moment où le processus $(x(t), y(t))$, parti de $(x(0), y(0)) = (x, y)$, frappe une frontière absorbante pour la première fois. Pour ce faire on peut utiliser un théorème démontré par Whittle [4], p. 289, et, selon lequel, si le processus non commandé

$$\begin{cases} dx(t) = y(t)\,dt \\ dy(t) = M(y(t))\,dt + V^{1/2}(y(t))\,dW(t) \end{cases} \tag{1.4}$$

Reçu le 24 février 1989 et, sous forme révisée, le 19 mai 1989.
Recherche subventionnée par le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada et par le fonds FCAR du Québec.

est certain de frapper la frontière absorbante, alors la commande optimale est donnée par

$$u^* = -\frac{BF_y}{Q}, \tag{1.5}$$

où la fonction $F(x, y)$ est obtenue à partir de l'équation

$$\exp\left\{-\frac{F(x,y)}{k}\right\} = \mathbf{E}_{(x,y)}\left\{\exp\left[\frac{-cS - dx(S)}{k}\right]\right\}, \tag{1.6}$$

avec k une constante positive donnée par

$$k = \frac{VQ}{B^2}. \tag{1.7}$$

Dans l'équation (1.6), S est le moment où le processus *non commandé* défini par (1.4) frappe la frontière absorbante pour la première fois.

Le problème que l'on étudie dans cet article est un cas particulier de ce que Whittle a appelé "LQG homing". Il s'agit de faire en sorte qu'un processus stochastique entre dans une région d'arrêt à un coût minimal. On peut chercher à maximiser le temps que le processus passe dans la région de continuation (voir Lefebvre et Whittle [**3**]) ou encore, comme ici, essayer d'atteindre la région d'arrêt le plus rapidement possible. De plus, étant donné que d est une constante positive, on veut aussi minimiser la valeur de $x(T)$. Cependant, il faut également tenir compte des coûts de commande quadratiques.

Le théorème de Whittle ci-dessus nous donne la commande optimale u^* en fonction d'une espérance mathématique basée sur le processus non commandé. Nous allons évaluer cette espérance mathématique dans le cas où la région de continuation est $\{y(t) \mid a < y(t) < b\}$, afin de pouvoir obtenir une expression explicite pour la commande u^* qui minimise la moyenne de la fonction de coût $J(x, y)$.

Dans cette note, nous allons donc considérer le cas où, lorsque $y(t)$ est commandé (resp. non commandé), T (resp. S) est défini par

$$\inf\{t \mid y(t) = a \text{ ou } y(t) = b\}. \tag{1.8}$$

Dans la section 2, nous supposerons que a est non négatif. Nous obtiendrons une expression pour le membre droit de l'équation (1.6) dans tous les cas où le processus $y(t)$ n'a pas de frontière naturelle dans l'intervalle $[a, b]$. Cette expression nous permettra, par exemple, de calculer dans la section 3 la commande u^* lorsque le processus $y(t)$ est un processus de Wiener de moyenne nulle. Finalement, dans la dernière section, nous allons donner une formule pour la fonction caractéristique de $x(S)$ lorsque $a < 0$ et $b > 0$.

2. Commande optimale dans l'intervalle $[a, b]$**, où** $a \geq 0$. On considère le processus non commandé défini par le système d'équations (1.4). Soit S l'instant où le processus $y(t)$ frappe pour la première fois l'une ou l'autre des droites $y(t) = a$ ou $y(t) = b$ dans le plan. Supposons que $0 \leq a \leq y(0) \leq b$. Soit $p(x, y; w)$ la fonction de densité de $x(S)$; c'est-à-dire,

$$\mathbf{P}_{(x,y)}\left[x(S) \in (w, w + dw)\right] = p(x, y; w)\, dw \tag{2.1}$$

où $(x, y) = (x(0), y(0))$.

Maintenant, supposons que la fonction p satisfait à l'équation inverse de Kolmogoroff

$$\frac{V}{2}p_{yy} + Mp_y + yp_x = 0 \qquad (x < w, a < y < b) \tag{2.2}$$

avec les conditions aux frontières

$$p(w,y;w) = \delta[(y-a)(y-b)] \tag{2.3}$$

et

$$p(x,a;w) = p(x,b;w) = \delta(x-w), \tag{2.4}$$

où δ est la fonction delta de Dirac. La condition (2.3) est une conséquence du fait que, lorsque $a \geq 0$, on a $x(S) > x$ si $S > 0$, tandis que les conditions (2.4) sont les conditions aux frontières appropriées dans le cas de frontières absorbantes à $y(t) = a$ et $y(t) = b$. En plus de ces conditions aux frontières, on a aussi

$$p(-\infty, y; w) = 0. \tag{2.5}$$

Alors, en utilisant les équations (2.2) à (2.5), on trouve que la fonction $N(f,y;w)$ définie par

$$N(f,y;w) = \int_{-\infty}^{w} e^{fx} p(x,y;w)\, dx, \tag{2.6}$$

où f est un paramètre réel non négatif, est une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{V}{2} N_{yy} + M N_y - f y N = 0 \qquad (a < y < b) \tag{2.7}$$

et que les conditions aux frontières sont

$$N(f,a;w) = N(f,b;w) = e^{fw}. \tag{2.8}$$

THÉORÈME 1. *Si le processus non commandé $y(t)$ n'a pas de frontière naturelle dans l'intervalle $[a,b]$, où $0 \leq a < b$, alors la fonction génératrice des moments de $x(S)$*

$$G(x,y;f) = \mathbf{E}_{(x,y)}[\exp(-fx(S))], \tag{2.9}$$

est donnée par

$$G(x,y;f) = \frac{e^{-fx}}{D_1}[N_2(b) - N_2(a)]N_1(y) + [N_1(a) - N_1(b)]N_2(y), \tag{2.10}$$

où $N_1(y)$ et $N_2(y)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (2.7) et

$$D_1 = N_1(a)N_2(b) - N_1(b)N_2(a). \tag{2.11}$$

REMARQUE. Une frontière naturelle est telle que la probabilité d'atteindre cette frontière en un temps fini est nulle (voir Kannan [**2**], p. 279).

DÉMONSTRATION: Notons d'abord que la fonction de densité de $x(S)$ est telle que

$$p(x,y:w) = p(x-w,y;0) = p(0,y;w-x) \tag{2.12}$$

(voir (1.2)). Alors on peut écrire

$$N(f,y;w) = e^{fw} \int_0^{\infty} e^{-fr} p(0,y;r)\, dr. \tag{2.13}$$

Mais, on peut aussi écrire

$$G(x,y;f) = e^{-fx} \int_0^{\infty} e^{-fr} p(0,y;r)\, dr. \tag{2.14}$$

De là, le théorème suit facilement. □

Notons que le théorème 1 peut en fait être généralisé. En effet, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 1. *Soit $C(x, y; f, g)$ la fonction génératrice conjointe des moments de $x(S)$ et S; c'est-à-dire, soit*

$$C(x, y; f, g) = \mathbf{E}_{(x,y)}[e^{-fx(S)-gS}] \tag{2.15}$$

où $g \geq 0$. Alors, sous les mêmes hypothèses que dans le théorème ci-dessus, on a

$$C(x, y; f, g) = \frac{e^{-fx}}{D_2}[C_2(b) - C_2(a)]C_1(y) + [C_1(a) - C_1(b)]C_2(y), \tag{2.16}$$

où $C_1(y)$ et $C_2(y)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation

$$\frac{V}{2}C_{yy} + MC_y - (fy + g)C = 0 \qquad (a < y < b) \tag{2.17}$$

avec les conditions aux frontières

$$C(x, a; f, g) = C(x, b; f, g) = e^{-fx} \tag{2.18}$$

et où

$$D_2 = C_1(a)C_2(b) - C_1(b)C_2(a). \tag{2.19}$$

DÉMONSTRATION: On a

$$C(x, y; f, g) = \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-fw-gt} q(x, y; w, t)\, dw\, dt \tag{2.20}$$

où

$$q(x, y; w, t)\, dw\, dt = \mathbf{P}_{(x,y)}\left[x(S) \in (w, w + dw),\ S \in (t, t + dt)\right]. \tag{2.21}$$

La fonction q satisfait à l'équation inverse de Kolmogoroff

$$\frac{V}{2}q_{yy} + Mq_y + yq_x = q_t \qquad (x < w, a < y < b, t > 0) \tag{2.22}$$

avec les conditions aux frontières

$$q(w, y; w, t) = \delta[(y - a)(y - b), t] \tag{2.23}$$

$$q(x, a; w, t) = q(x, b; w, t) = \delta(x - w, t) \tag{2.24}$$

et

$$q(x, y; w, 0) = \delta(x - w, (y - a)(y - b)). \tag{2.25}$$

De plus, on a

$$q(-\infty, y; w, t) = q(x, y; w, \infty) = 0. \tag{2.26}$$

Alors on trouve que la fonction $L(f, y; w, g)$ définie par

$$L(f, y; w, g) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^w e^{fx-gt} q(x, y; w, t)\, dx\, dt \tag{2.27}$$

satisfait à

$$\frac{V}{2}L_{yy} + ML_y - (fy + g)L = 0 \qquad (a < y < b) \tag{2.28}$$

avec les conditions aux frontières

$$L(f,a;w,g) = L(f,b;w,g) = e^{fw}. \tag{2.29}$$

Or, on peut écrire que

$$C(x,y;f,g) = e^{-fx-fw}L(f,y;w,g) \tag{2.30}$$

car

$$q(x,y;w,t) = q(x-w,y;0,t) = q(0,y;w-x,t) \tag{2.31}$$

et ceci démontre la proposition. □

La proposition 1, avec $f = d/k$ et $g = c/k$, où k est défini à l'q́uation (1.7), nous donne le membre droit de l'équation (1.6). Ensuite, il suffit d'appliquer la formule (1.5) pour obtenir la commande optimale u^*. Nous allons illustrer ce résultat dans le cas du processus de Wiener dans la section suivante.

3. Commande optimale d'un processus de Wiener. Considérons le cas particulier où $M(y(t)) = 0$ et $V(y(t)) = 2$ dans (1.1). Le processus non commandé $y(t)$ est alors un processus de Wiener et l'on sait que, dans ce cas, on a $\mathbf{P}[S < \infty] = 1$ de sorte que l'on peut utiliser le théorème de Whittle. De plus, le processus de Wiener n'a aucune frontière naturelle. Pour obtenir la commande optimale u^*, on doit résoudre l'équation différentielle

$$C_{yy} - (fy+g)C = 0 \qquad (a < y < b). \tag{3.1}$$

Les conditions aux frontières sont données par (2.18). Deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (3.1) sont les fonctions de Airy $Ai(z)$ et $Bi(z)$ (voir Abramowitz et Stegun [**1**]), où

$$z = f^{-2/3}(fy+g). \tag{3.2}$$

Or la commande optimale est donnée par

$$u^* = -\frac{BF_y}{Q} \tag{3.3}$$

avec

$$\exp\left\{-\frac{F(x,y)}{k}\right\} = C\left(x,y;\frac{d}{k},\frac{c}{k}\right), \tag{3.4}$$

où

$$k = \frac{2Q}{B^2}. \tag{3.5}$$

Ainsi, on peut écrire

$$u^* = k\frac{B}{Q}\frac{C_y}{C} \tag{3.6}$$

et l'on trouve que (voir [**1**])

$$u^* = \frac{kB\sqrt[3]{f}z}{Q\sqrt{3}} \times \left\{\frac{\pi^{-1}[C_2(a)-C_2(b)]K_{\pm 2/3}(v) + [C_1(a)-C_1(b)][I_{-2/3}(v)+I_{2/3}(v)]}{[C_2(b)-C_2(a)]Ai(z) + [C_1(a)-C_1(b)]Bi(z)}\right\} \tag{3.7}$$

où

$$\begin{cases} C_1(y) = Ai[f^{-2/3}(fy+g)] \\ C_2(y) = Bi[f^{-2/3}(fy+g)] \\ v = \dfrac{2}{3}z^{3/2} \\ f = \dfrac{d}{k} \\ g = \dfrac{c}{k}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Les fonctions $K_{\pm 2/3}$ et $I_{\pm 2/3}$ apparaissant dans la formule (3.7) sont des fonctions de Bessel modifiées (voir [**1**]). La formule (3.7) nous donne la commande optimale exacte. On pourrait aussi donner des formules approximatives en utilisant les développements asymptotiques des fonctions de Bessel et/ou de Airy lorsque les constantes a et b sont toutes les deux petites, ou très grandes, etc.

4. Fonction caractéristique de $x(S)$ lorsque $a < 0$ et $b > 0$. Pour conclure, nous allons donner une formule pour la fonction caractéristique de $x(S)$ dans le cas où a est négatif et b est positif.

Lorsque la valeur initiale de $y(t)$ est dans l'intervalle $[a, b]$, mais $a < 0$ et $b > 0$, $x(S)$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle. L'équation (2.2) est maintenant valide pour $-\infty < x < \infty$ et $a < y < b$. Les conditions aux frontières (2.4) s'appliquent encore, mais les conditions (2.3) et (2.5) sont remplacés par

$$p(\pm\infty, y; w) = 0. \tag{4.1}$$

Cette fois-ci, on définit

$$H(r, y; w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{irx} p(x, y; w)\, dx, \tag{4.2}$$

où r est un paramètre réel. Alors, on trouve que H satisfait à l'équation

$$\frac{V}{2}H_{yy} + MH_y - iryH = 0 \qquad (a < y < b). \tag{4.3}$$

Les conditions aux frontières sont

$$H(r, a; w) = H(r, b; w) = e^{irw}. \tag{4.4}$$

En utilisant ce qui précède et l'équation (2.12), on peut montrer le théorème qui suit.

THÉORÈME 2. *Si $y(t)$ n'a pas de frontière naturelle dans l'intervalle $[a, b]$, où $a < 0$ et $b > 0$, alors la fonction caractéristique de $x(S)$ est donnée par*

$$\mathbf{E}_{(x,y)}\left[e^{-irx(S)}\right] = \frac{e^{-irx}}{D_3}[H_2(b) - H_2(a)]H_1(y) + [H_1(a) - H_1(b)]H_2(y), \tag{4.5}$$

où $H_1(y)$ et $H_2(y)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (4.3), et où

$$D_3 = H_1(a)H_2(b) - H_2(a)H_1(b). \tag{4.6}$$

Finalement, mentionnons que sous les mêmes hypothèses que dans le théorème ci-dessus, on peut obtenir une expression pour

$$\mathbf{E}_{(x,y)}\left[e^{-irx(S)-gS}\right]$$

en considérant

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-irx-gt} q(x, y; w, t)\, dx\, dt.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Abramowitz M. et Stegun, I.A., "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables," Dover, New York, 1965.
2. Kannan D., "An Introduction to Stochastic Processes," North Holland, New York, 1979.
3. Lefebvre M. et Whittle P., *Survival optimization for a dynamic system*, Ann. sc. math. Québec **12** (1988), 101–119.
4. Whittle P., "Optimization over Time," Volume I, Wiley, Chichester, 1982.

M. Lefebvre
Département de mathématiques appliquées
École Polytechnique
Campus de l'Université de Montréal
Case postale 6079, succursale "A"
Montréal, Québec H3C 3A7