Ann. sc. math. Québec, **14** (2), 1990, 153–174.

ARRANGEMENTS D'HYPERPLANS II: TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE
($2^{\text{ième}}$ PARTIE)

MICHEL JAMBU

RÉSUMÉ. L'étude des propriétés topologiques et géométriques des arrangements d'hyperplans et de leurs compléments se poursuit par la description du groupe fondamental, du 1-modèle minimal et de l'algèbre d'holonomie de Lie du complément. Ces notions sont reliées entre elles pour certains arrangements par la propriété LCS, généralisation de la formule de Witt pour les groupes libres.

ABSTRACT. The topological and geometric properties of the arrangements of hyperplanes and their complements are completed by the description of the fundamental group, the 1-minimal model and the holonomy Lie algebra of the complement. All these notions are related for some arrangements by the LCS property which is a generalization of the Witt formula for the free groups.

0. Introduction. Cette deuxième partie complète l'étude des propriétés topologiques et géométriques des arrangements d'hyperplans et de leurs compléments. L'exemple de l'arrangement de Coxeter de type A_l peut encore servir de fil conducteur.

Le complément X_l de l'arrangement A_l, après complexification est un espace de type $K(\pi, 1)$ où π est le groupe de tresses colorées à l brins. Cette propriété d'être un espace de type $K(\pi, 1)$ est partagée par les arrangements de type fibré définis par M. Falk et R. Randell, et par les arrangements simpliciaux définis par P. Deligne. Le groupe fondamental du complément X est décrit, pour les arrangements d'hyperplans réels de $\mathbb{C}^n$, à l'aide de générateurs et relations par R. Randell et par M. Salvetti. Il apparaît difficile, voire impossible actuellement, de calculer l'homotopie des arrangements quelconques; d'où l'étude de la partie sans torsion, c'est-à-dire de l'homotopie rationnelle. L'arrangement A_l admet la remarquable propriété, appelée LCS, qui relie la série centrale descendante du groupe fondamental, le 1-modèle minimal et la cohomologie du complément X_l :

$$\prod_{j\geq 1}(1 - t^j)^{\varphi_{j-1}(X)} = P_{X_l}(-t)$$

où, $\varphi_j(X_l) = \operatorname{rang}\Gamma_j(\pi_1(X_l))/\Gamma_{j+1}(\pi_1(X_l)) = \dim V_j$, $(\Gamma_j\pi_1(X_l))_j$ étant la série centrale descendante du groupe $\pi_1(X_l)$, V_{j-1} étant l'espace vectoriel apparaissant dans l'extension principale $\mathcal{M}(1)_{j-1} \subset \mathcal{M}(1)_j$ où $\mathcal{M}(1)$ est le 1-modèle minimal de X_l.

Reçu le 6 avril 1989 et, sous forme révisée, le 18 octobre 1989.

Ce qui nous amène à la caractérisation des arrangements vérifiant la propriété LCS. Parmi ceux-ci, on trouve les arrangements $K(\pi,1)$-rationels, c'est-à-dire dont la cohomologie du 1-modèle minimal du complément est isomorphe à sa cohomologie. Tout ceci est étudié dans la section 3.

La section 4 concerne l'algèbre d'holonomie de Lie $\mathcal{G}_X$ du complément X, laquelle dans le cas de l'arrangement A_l est liée aux équations de Yang-Baxter, sujet abondamment étudié par T. Kohno. De plus, l'égalité suivante est toujours vérifiée pour toute hypersurface de $P_n(\mathbb{C})$:

$$\sum_{p\geq 0} \chi(p)t^p = \prod_{j\geq 1}(1-t^j)^{-\varphi_{j-1}(X)}$$

où $\chi(p) = \dim \mathcal{E}(\mathcal{G}_X)_p$, dimension de la $p^{\text{ième}}$ composante homogène de l'algèbre enveloppante de $\mathcal{G}_X$, ce qui donne d'autres possibilités pour l'étude de la propriété LCS.

1. Homotopie du complément d'un arrangement.

1.1. Le groupe fondamental. On sait depuis Zariski et Van Kampen calculer le groupe fondamental du complémentaire d'une hypersurface projective.

THÉORÈME (ZARISKI). *Soit H une hypersurface projective de $P^n(\mathbb{C})$. Si $n > 2$, le groupe fondamental de $P^n(\mathbb{C}) \setminus H$ coïncide avec le groupe fondamental de $P \setminus H \cap P$ où P est un plan générique de $P^n(\mathbb{C})$.*

Générique signifie ici pris dans l'image d'un ouvert de Zariski de la grassmanienne des plans $\mathbb{C}^{n+1}$ par la bijection déduite de la surjection canonique de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ sur $P^n(\mathbb{C})$. R. Randell [**38**] donne une description du groupe fondamental du complément X d'un arrangement réel A de $\mathbb{C}^n$, en utilisant le théorème précédent. Soit Y le complément de l'arrangement projectif associé à A dans $P^{n-1}(\mathbb{C})$ et F la fibre de Milnor (c'est-à-dire $\{Q = 1\}$ où $Q = 0$ est l'équation de l'arrangement A). Alors on obtient le diagramme de suites exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1 \arrow[d] & \\
 & & & \pi_1(F) \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \pi_1(\mathbb{C}^*) \arrow[r] & \pi_1(X) \arrow[r] & \pi_1(Y) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & & \mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \arrow[d] & \\
 & & & 1 &
\end{tikzcd}$$

où $n =_{\#} A$. Ce qui permet de calculer $\pi_1(X)$ connaissant $\pi_1(Y)$. R. Randell donne alors une présentation de $\pi_1(Y)$ en termes de générateurs et relations.

M. Salvetti [**40**] considère aussi le problème de la détermination des groupes d'homotopie de X. Pour cela, il construit explicitement un CW-complexe $Y \subset X$ de dimension n ayant le même type d'homotopie que X. Il peut alors décrire le groupe fondamental à l'aide des générateurs et relations. L'aspect important pour la suite de notre démarche est le caractère combinatoire de ces résultats. Citons Salvetti[1] [**40**]:

> *"The construction of Y was also inspired by [Zaslavsky], in which counting-facets formulas are given. Since these formulas depend only on the geometric lattice associated to the arrangement of hyperplans, it is a natural conjecture that the homotopy type of X depends only on the associated lattice (this is true in the general position case)."*

1. 2. Les $K(\pi,1)$-arrangements: [11, 13]. La détermination des groupes d'homotopie d'ordre supérieur à 1 est, en général, un problème extrêmement difficile, voire insurmontable actuellement. Nous allons nous restreindre à l'étude du cas où tous ces groupes d'homotopie d'ordre supérieur à 1 sont nuls.

Remarquons que pour ces groupes, il n'y a plus lieu de distinguer les arrangements d'hyperplans vectoriels des arrangements d'hyperplans affines. En effet, il y a bijection entre l'ensemble des arrangements de $\mathbb{C}^n$ composés d'hyperplans contenant un même point et celui des arrangements de $\mathbb{C}^{n-1}$. Soient X et Y les compléments respectifs de ces arrangements; alors $X \approx \mathbb{C}^* \times Y$. Donc, pour $k \geq 2$:

$$\pi_k(X) \cong \pi_k(\mathbb{C}^*) \times \pi_k(Y) \cong \pi_k(Y).$$

Définition. Un arrangement A d'hyperplans de $\mathbb{C}^n$ est appelé $K(\Pi,1)$-arrangement si et seulement si le complément X est un $K(\Pi,1)$-espace.

Commençons par un exemple élémentaire, celui d'un arrangement A d'hyperplans de $\mathbb{C}^2$, contenant l'origine, de complément X. Alors $X \approx S^1 \times B$, où B est un bouquet de cercles et par suite X est un $K(\pi,1)$-espace où $\pi_1(X) = \pi$ est un groupe libre à p générateurs si $_{\#}A = p+1$. On constate aisément que $P_X(t) = (1+t)(1+pt)$ et qu'il existe une fibration: $X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ où la fibre est $\mathbb{C} \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$, cette fibration expliquant le factorisation de $P_X(t)$. Ces coïncidences ne semblent pas fortuites. Elles vont se retrouver dans de nombreux exemples plus sophistiqués et vont donner lieu à une série de problèmes dont certains attendent encore une solution.

Les groupes de réflexions fournissent d'excellents exemples (*cf*. [**19**]) et ont été à l'origine de la théorie que nous analysons. Fadell et Neuwirth [**10**] puis Arnold [**2**], étudient la topologie du complément de l'arrangement défini par le groupe de Coxeter A_{n-1}, après complexification. Il est mis en évidence une tour de fibrations.

---

[1] W. Arrola [**43**] donne une représentation du groupe fondamental du complément d'un arrangement complexe.

$$\begin{tikzcd}
 & X = X_n = X_{n-1} \times \mathbb{C} \arrow[d, "p_n"] \\
F_{n-1} \arrow[r, tail] & X_{n-1} \arrow[d, "p_{n-1}"] \\
F_{n-2} \arrow[r, tail] & X_{n-2} \arrow[d, "p_{n-2}"] \\
 & \vdots \arrow[d, "p_3"] \\
F_2 \arrow[r, tail] & X_2 \arrow[d, "p_2"] \\
 & X_1 = \mathbb{C}^*
\end{tikzcd}$$

où $F_k = \mathbb{C} \setminus \{k \text{ points}\}$. C'est un arrangement de type fibré (*cf.* [**20**]).

De ces fibrations, il résulte facilement, d'une part que X est un $K(\pi, 1)$-espace, π étant le groupe de tresses à n brins, et, d'autre part que $P_X(t)$ se factorise. E. Brieskorn [**5**], étend la méthode à la plupart des autres arrangements définis par des groupes de réflexions sauf ceux du type H_3, H_4, E_6, E_7 et E_8. Il met en évidence des fibrations (qui cependant ne donnent pas toutes lieu à des arrangements de type fibré, par exemple D_4, [**22**]), ainsi que la factorisation du polynôme de Poincaré. Puis P. Orlik et L. Solomon [**36**] complètent ce résultat pour les arrangements associés à une famille infinie de groupes de pseudo-réflexions notés, $G(r, 1, l)$. Remarquons que tous ces arrangements sont libres. D'où la constatation de K. Saito [**39**]:

> *"All examples show that: (ii) If* $\mathrm{Der}_E(\log\Delta)$ *is free, then the complementary space* $E^C \setminus \cup_{i\in J} H_i^C$ *of the complexification of* E *and* $H_i, i \in J$*, is a* $K(\pi, 1)$*-space. H. Terao gave also several counter examples for the converse of (ii)."*

Pour cela, H. Terao [**43**] a examiné les arrangements classifiés par B. Grünbaum [**14**] et a déterminé que certains d'entre eux ne sont pas libres. Cependant, d'après un résultat de P. Deligne [**8**], ils sont tous des $K(\pi, 1)$-espaces car ce sont des arrangements simpliciaux.

THÉORÈME [**8**]. *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie, A un ensemble fini d'hyperplans homogènes de V, V_c le complexifié de V et $X = V_c - \cup_{H\in A} H_c$. On suppose que les composantes connexes de $V - \cup_{H\in A} H$ sont des cônes simpliciaux ouverts. Alors X est un $K(\pi, 1)$-espace.* □

P. Deligne utilise la théorie des immeubles de Tits; ce qui donne une nouvelle démonstration aux résultats de E. Brieskorn en les complétant pour les cas non vérifiés.

1.3. Modèle minimal.

1.3.1. La théorie de Sullivan. Nous allons donner un aperçu de la théorie de Sullivan des modèles minimaux [**41, 32, 15, 9, 34**]. Définissons la notion de *fibration principale*.

Soit X un espace topologique connexe ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe et dont tous les groupes d'homotopie sont de rang fini.

$$\begin{array}{ccc}
K(\pi,n) & = & \Omega K(\pi,n+1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
Y & \xrightarrow{l} & PK(\pi,n+1) \\
{\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\
X & \xrightarrow{l} & PK(\pi,n+1)
\end{array}$$

où $PK(\pi, n+1)$ est l'espace des chemins de $K(\pi, n+1)$ d'origine fixée y_0, $\Omega K(\pi, n+1)$ l'espace des lacets en y_0 et p l'application qui associe à tout chemin son extrémité. Le diagramme définit la fibration principale $K(\pi, n) \to Y \xrightarrow{q} X$ comme image réciproque de la fibration $\Omega K(\pi, n+1) \longrightarrow PK(\pi, n+1) \xrightarrow{p} K(\pi, n+1)$ par l. Notons $\mathcal{E}(X, K(\pi, n))$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrations principales de base X et de fibre $K(\pi, n)$, et $\Psi : H^{n+1}(X; \pi) \longrightarrow \mathcal{E}(X, K(\pi, n))$ l'application qui à $[l] \in [X, K(\pi, n+1)] = H^{n+1}(X; \pi)$ associe l'image réciproque de p par l (Ψ est une bijection).

A cette construction il correspond du point de vue algébrique, la notion d'*extension principale*

$$\begin{array}{ccc}
L_n(W) & = & L_n(W) \\
\uparrow & & \uparrow \\
A \otimes_\tau L_n(W) & \xleftarrow{\widehat{\tau}} & L_{n+1}(W) \otimes_i L_n(W) \\
\uparrow{\scriptstyle \beta} & & \uparrow{\scriptstyle \alpha} \\
A & \xleftarrow{\tau} & L_{n+1}(W)
\end{array}$$

où A est une Q-algèbre différentielle N-graduée, associative et commutative; W un Q-espace vectoriel de dimension finie, $L_n(W)$ est l'algèbre extérieure sur W si n est impair et l'algèbre symétrique si n est pair, munie de la différentielle nulle. $A \otimes_\tau L_n(W)$ désigne le produit tensoriel gradué muni de la différentielle d_τ définie par $d_\tau(a \otimes 1) = d_\wedge(a) \otimes 1$ et $d_\tau(a \otimes \omega) = \tau(\omega) \otimes 1$. On appelle $A \otimes_\tau L_n(W)$ *extension principale* de A par $L_n(W)$. L'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions principales de A par $L_n(W)$ noté $\mathcal{E}(A, L_n(W))$ est isomorphe à

$$[(L_n(W), d = 0), A] = \mathrm{Hom}_k(W, H^{n+1}(A)).$$

Le carré $(\beta, \widehat{\tau}, \tau, \alpha)$ est cocartésien. Le lien entre les deux théories est établi grâce à la *théorie des Q-cochaînes commutatives*: c'est la donnée d'un foncteur contravariant de la catégorie S des ensembles simpliciaux dans la catégorie Q-DGC (c'est-à-dire Q-algèbres différentielles graduées commutatives):

$$A_{\mathbf{Q}}: S \to \mathbf{Q}\text{-DGC}$$

vérifiant des propriétés adéquates (*cf* [**32**]).

Soit π un groupe et considérons W le Q-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\pi; \mathbf{Q}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \pi; \mathbf{Q})$. (Si π n'est pas abélien, nous verrons un peu plus loin comment définir $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \pi$).

Alors $\mathcal{E}(X, K(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \pi, X)) \approx \mathcal{E}(A_q(X); L_X(W))$ si $A_{\mathbb{Q}}$ définit une théorie des $\mathbb{Q}$-cochaînes commutatives.

$$\begin{array}{ccc}
K(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \pi, X) & & L_n(W) \\
\downarrow & & \uparrow \\
Y & & A_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{[\tau]} L_n(W) \\
{\scriptstyle q}\downarrow & & \uparrow \\
X & & A_{\mathbb{Q}}(X)
\end{array}$$

où $H^*(K(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \pi), n) = L_n(W)$ et $[\tau]: L_n(W) \to H(A_{\mathbb{Q}}(X))$ est la *transgression* de la fibration. De plus $A_{\mathbb{Q}}(Y)$ et $A_{\mathbb{Q}}(X) \otimes_{[\tau]} L_n(W)$ sont équivalentes, c'est-à-dire induisent un isomorphisme en cohomologie. Cette correspondance se poursuit de la façon suivante:

Soit X un espace *nilpotent*, c'est-à-dire chacune des fibrations $X_{n+1} \longrightarrow X_n$ de la *tour de Postnikov* de X admet un *raffinement principal*, c'est-à-dire se décompose en une suite finie de fibrations principales $(K(\pi_{n+1}, n) \to X^{n+1} \xrightarrow{q^n} X^n)$, $n = 0, 1, \dots, r-1$. Un espace nilpotent est un $\mathbb{Q}$-*espace* si:

(i) $\pi_n(X)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel pour $n \geq 2$,

(ii) la fibration $K(\pi_1(X), 1) \longrightarrow \{*\}$ est la composée d'une suite finie de fibrations principales de fibres $K(A_\alpha, 1)$ où chaque A_α est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

La *localisation* d'un espace nilpotent X est la donnée d'un $\mathbb{Q}$-espace $X_{\mathbb{Q}}$ et d'une application continue $f: X \to X_{\mathbb{Q}}$ telle que pour tout $\mathbb{Q}$-espace Y et toute application continue $g: X \to Y$ il existe une application $\overline{g} : X_{\mathbb{Q}} \to Y$, unique à homotopie près, telle que $\overline{g}.f$ soit homotope à g. Tout espace nilpotent admet une localisation et f induit un isomorphisme $\pi_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \pi_n(X_{\mathbb{Q}}), \forall n \geq 1$. De plus, on a le diagramme commutatif de fibrations principales:

$$\begin{array}{ccccc}
K(\pi, n) & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{q} & X \\
\downarrow{\scriptstyle i_n} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
K(\pi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, n) & \longrightarrow & Y_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow[q_0]{} & X_{\mathbb{Q}}
\end{array}$$

Parallèlement, on considère les $\mathbb{Q}$-DGC algèbres obtenues à partir de $(L_0(\mathbb{Q}), d = 0)$ par une suite d'extensions principales. Une $\mathbb{Q}$-DGC algèbre $\mathcal{M}$ est appelée *minimale* si :

(i) $\mathcal{M} = L(\oplus_{n \geq 1} W^n)$ où W^n est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel,

(ii) il existe un ensemble bien ordonné I tel que

a) $W = \oplus_{\alpha \in I} W_\alpha$,

b) chaque W_α est formé d'éléments homogènes, c'est-à-dire $W_\alpha \subset W^{n_\alpha}$,

c) n_α est une fonction croissante de α,

d) $dW_\alpha \subset L(\oplus_{\beta < \alpha} W_\beta)$ pour tout $\alpha \in I$.

Ainsi la différentielle d est décomposable. Si chaque espace W^n est de dimension finie, on dit que $\mathcal{M}$ est *nilpotente*. Soit $\mathcal{M} = L(W)$ une algèbre minimale nilpotente et $d: W^1 \to \wedge^2 W^1$ la restriction à W^1 de la différentielle. Par dualité on en déduit: $\wedge^2 W^{1^*} \xrightarrow{[]} W^{2^*}$ et la condition $d^2 = 0$ exprime que le crochet $[\,]$ vérifie l'identité de Jacobi. W^{1^*} est donc une algèbre de Lie. De plus $W^1 = \oplus_{n_\alpha = 1} W_\alpha$ et $dW_\alpha \subset L(\oplus_{\beta < \alpha} W_\beta)$ signifient que W^{1*} est nilpotente.

THÉORÈME. *Il existe une bijection entre types d'homotopie de $\mathbb{Q}$-espaces X nilpotents (ou classes d'isomorphisme de tours de $\mathbb{Q}$-espaces) et classes d'isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres minimales $\mathcal{M} = (L(V), d)$. Dans cette correspondance:*

- $V^n = \oplus_{n_\alpha = n} V_{n_\alpha}$ *est isomorphe à* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\pi_n(X); \mathbb{Q})$,
- d *est définie par les "invariants de Postnikov",* $[l_\alpha] \in H_\alpha{}^{n_\alpha+1}(X_\alpha, \Pi_\alpha)$ *où* $\Pi_\alpha = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(V_\alpha, \mathbb{Q})$. □

DÉFINITION. Soit A une $\mathbb{Q}$-DGC algèbre. $\mathcal{M}(A)$ est un *modèle minimal pour A* si $\mathcal{M}(A)$ est minimale et s'il existe $\rho: \mathcal{M}(A) \to A$, morphisme de $\mathbb{Q}$-DGC algèbres induisant un isomorphisme en cohomologie. La sous-algèbre $\mathcal{M}(n, A)$ engendrée par les éléments de degré au plus n est appelée *n-modèle minimal de A.*

En particulier pour $n = 1$, on obtient le *1-modèle minimal* qui induit un isomorphisme sur la cohomologie d'ordre 1 et une injection sur la cohomologie d'ordre 2. $\mathcal{M}(1, A)$ noté plus simplement $\mathcal{M}(1)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'algèbre A, est muni d'une suite croissante de sous-algèbres qui s'obtiennent par des extensions principales: $(\mathcal{M}(1)_n)$. Soit $W_n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ les générateurs de degré 1 de $\mathcal{M}(1)_n$ alors $d: W_n \to W_n \wedge W_n$. De $d^2 = 0$, on en déduit une structure d'algèbre de Lie (nilpotente) sur W_n^*, d'où la tour d'algèbres de Lie nilpotentes:

$$\cdots \longrightarrow W_n^* \longrightarrow W_{n-1}^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow W_1^* \longrightarrow 0$$

appelée *l'algèbre de Lie duale de* $\mathcal{M}(1)$. On note $W_n^* = \mathcal{L}_n$.

Revenons à la topologie et soit $\pi = \pi_1(X)$ le groupe fondamental de l'espace X. En général π n'est pas un groupe abélien. Il faut, cependant, définir $\pi \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q}$. Soit $N_i(\pi) = \pi/\Gamma_i(\pi)$, groupe *nilpotent*, où $(\Gamma_i(\pi))_{i \geq 0}$ est la suite centrale descendante de π. On obtient la fibration principale:

$$K(\Gamma_i(\pi)/\Gamma_{i+1}(\pi), 1) \longrightarrow K(N_{i+1}(\pi), 1) \longrightarrow K(N_i(\pi), 1).$$

Par récurrence, comme Γ_i/Γ_{i+1} est abélien et par la propriété de localisation telle que définie ci-dessus, on obtient le diagramme commutatif de fibrations principales:

$$\begin{array}{ccccc} K(\Gamma_i(\pi)/\Gamma_{i+1}(\pi), 1) & \longrightarrow & K(N_{i+1}(\pi), 1) & \longrightarrow & K(N_i(\pi), 1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K(\Gamma_i(\pi)/\Gamma_{i+1}(\pi) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q}, 1) & \longrightarrow & K(N_{i+1}(\pi) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q}, 1) & \longrightarrow & K(N_i(\pi) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q}, 1) \end{array}$$

d'où la suite de groupes de Lie nilpotents:

$$\cdots \longrightarrow N_{i+1}(\pi) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow N_{i+1}(\pi) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow \cdots \longrightarrow N_1(\pi) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

dont la limite projective est appelée la *complétion de Malcev de π*. Ajoutons que la formule de Campbell-Hausdorff définit une structure d'algèbre de Lie sur chaque $N_i(\pi) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q}$.

THÉORÈME (SULLIVAN) [**41**]. *Soit X un complexe simplicial dont la cohomologie rationnelle est de type fini. Alors l'algèbre de Lie duale du 1-modèle minimal de l'algèbre des $\mathbb{Q}$-formes polynomiales sur X est isomorphe à la suite des groupes de Lie nilpotents*

$$\cdots \longrightarrow N_{i+1}(\pi) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q} \longrightarrow N_{i+1}(\pi) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Q} \ldots$$

c'est-à-dire:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \longrightarrow & \mathcal{L}_{i+1} & \longrightarrow & \mathcal{L}_i & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow \approx & & \downarrow \approx & \\
\cdots \longrightarrow & N_{i+1}(\pi)\otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} & \longrightarrow & N_i(\pi)\otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

D'où la complétion de Malcev de π est isomorphe à $\mathcal{L}_X = \varprojlim \mathcal{L}_i$. □

COROLLAIRE.

$$\operatorname{rang}(\Gamma_i(\pi)/\Gamma_{i+1}(\pi)) = \dim V_i \overset{\text{noté}}{=} \varphi_i(X). \quad \square$$

1.3.2. Construction d'un 1-modèle minimal. Venons-en au cas d'un arrangement A d'hyperplans de $\mathbf{C}^n$. Rappelons que l'on a défini l'algèbre $\mathcal{R}$ des $\mathbf{Q}$-formes polynomiales sur le complément X et que $\mathcal{R}$ et $H^*(X;\mathbf{Q})$ sont isomorphes [**20**]. Ainsi le modèle minimal de $H^*(X;\mathbf{Q})$ muni de la différentielle nulle est isomorphe au modèle minimal de X. De plus, comme $H^*(X;\mathbf{Q})$ et $\mathcal{E}/\mathcal{J}$ (l'algèbre d'Orlik-Solomon) sont isomorphes, le modèle minimal de X est celui de $\mathcal{E}/\mathcal{J}$ (algèbre munie de la différentielle nulle). Construisons le 1-modèle minimal de $\mathcal{E}/\mathcal{J}$:

$$\rho\colon \mathcal{M}(1) \to \mathcal{E}/\mathcal{J}.$$

Posons $\mathcal{M}(1)_0 = \mathbf{Q}$ et $\mathcal{M}(1)_1 = \mathcal{E}$ avec $\rho_1\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{J}$, la projection canonique. Supposons $n \geq 2$ et $\rho_n\colon \mathcal{M}(1)_n \to \mathcal{E}/\mathcal{J}$ construit. Alors $\rho_n.d = 0$. Soit V_n un espace vectoriel isomorphe à $\ker \rho^*_{n-1}$ où $\rho^*_{n-1}\colon H^2(\mathcal{M}(1)_{n-1}) \to (\mathcal{E}/\mathcal{J})^2$.

Soit $\mathcal{M}(1)_n$ une extension principale de degré 1 de $\mathcal{M}(1)_{n-1}$, c'est-à-dire $\mathcal{M}(1)_n \cong \mathcal{M}(1)_{n-1} \otimes L(V_n), (V_n$ est supposé composé d'éléments de degré 1). Soit $d\colon V_n \to (\mathcal{M}(1)_{n-1})^2$ tel que le composé $V_n \to \mathrm{Image}(d) \longrightarrow H^2(\mathcal{M}(1)_{n-1})$ soit injectif. On étend ρ_{n-1} à $\mathcal{M}(1)_n$ en posant $\rho(v) = 0$ pour $v \in V_n$, et on obtient le résultat [**11**].

Nous avons vu que P. Orlik et L. Solomon ont donné une présentation combinatoire de l'algèbre de cohomologie du complément X de l'arrangement A. Une autre présentation combinatoire est donnée dans [**21, 23**]. On peut alors espérer obtenir le type d'homotopie rationnelle de X à partir du treillis $L(A)$. Suivons Falk [**11**] et Kohno [**24, 25**].

$\mathcal{M}(1)$ est une algèbre extérieure libre sur $\oplus_{n\geq 1} V_n$. Pour tout $k \geq 0$, définissons $U^p_k = \oplus(V_{i_1} \wedge \cdots \wedge V_{i_p})$, la somme directe étant prise pour tous les $(i_1,\ldots,i_p)$ tels que $1 \leq i_1 < \cdots < i_p$ satisfaisant à $i_1+\cdots+i_p = k$. Posons $U^0_0 = \mathbf{Q}$ et $U^p_0 = \{0\}$ pour tout $p \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(1) &= \oplus_{k\geq 0} U_k,\\
U^p_k &= 0 \quad \text{si} \quad p > k,\\
U^1_k &= V_k,\\
U^k_k &= \mathcal{E}^k,\\
U^{k-1}_k &= \mathcal{E}^{k-2} \otimes V_2,\\
d(U^p_k) &\subseteq U^{p+1}_k.
\end{aligned}$$

Ainsi chaque U_k est un sous-complexe de $\mathcal{M}(1)$ et $H^*(\mathcal{M}(1)) \cong \oplus_{k\geq 0} H^*(U_k)$. Soit $C = \oplus_{i,j\geq 0} C_{i,j}$ un module bigradué. On définit *la série de Poincaré de C* par:

$$P_C(x,y) = \sum_{i,j\geq 0} (\dim C_{i,j}) x^i y^j$$

et on pose

$$\begin{aligned} Q_C(t) &= P_C(t,-t) \\ &= \sum_{p\geq 0}\left[\sum_{i+j=p}(-1)^j \dim C_{i,j}\right] t^p. \end{aligned}$$

$\mathcal{M}(1)$ est bigradué par $\mathcal{M}(1)_{i,j} = U^j_{i+j}$. Alors $Q_{\mathcal{M}(1)}(t) = \sum_{p\geq 0}\chi(U_p)t^p$ où $\chi(U_p)$ est la caractéristique d'Euler du complexe U_p.

PROPOSITION [**11**].

$$Q_{\mathcal{M}(1)}(t) = \prod_{j\geq 1}(1-t^j)^{\varphi_j(X)}$$

où $\varphi_j(X) = \dim(V_j)$.

DÉMONSTRATION: Il suffit de montrer que $Q_{\mathcal{M}(1)_n}(t) = \prod_{j=1}^{n}(1-t^j)^{\varphi_j(X)}$, le résultat s'obtenant en faisant tendre n vers l'infini. Pour le cas de l'algèbre extérieure $L(V_n)$ bigraduée (pour la bigraduation induite par celle de $\mathcal{M}(1)$), on a $U^j_p \cap L(V_n) = \emptyset$ sauf pour $p = nj$ et $U^j_{nj} \cap L(V_n) = \wedge^j(V_n)$, de dimension $\binom{\varphi_n(X)}{j}$. D'où

$$Q_{L(V_n)}(t) = \sum_{j\geq 0}(-1)^j\binom{\varphi_n(X)}{j}t^{nj} = (1-t^n)^{\varphi_n(X)}.$$

Le résultat s'obtient alors facilement. □

1.3.3. Arrangement $K(\pi,1)$-rationnels. Prenons un exemple simple: soit A l'arrangement d'hyperplans affines $\{z_1,\ldots,z_l\}$ de C et $X = C\setminus\{z_1,\ldots,z_l\}$. Le groupe fondamental de X est un groupe libre à l générateurs. Par la formule de Witt [**33**], nous calculons:

$$\varphi_n(X) = n^{-1}\sum_{d|n}\mu(d)l^{nd^{-1}}$$

où $\varphi_n(X) = \operatorname{rang}(\Gamma_n(\pi_1(X;*))/\Gamma_{n+1}(\pi_1(X;*)))$ (μ étant la fonction de Mobius usuelle), ainsi que la formule:

$$(1-lt) = \prod_{j\geq 1}(1-t^j)^{\varphi_{j-1}(X)}.$$

D'un autre côté le polynôme de Poincaré de X s'écrit:

$$P_X(t) = (1+lt)$$

d'où

$$P_X(-t) = \prod_{j\geq 1}(1-t^j)^{\varphi_{j-1}(X)}.$$

Il est montré [**12, 17, 26**] que cette formule est vérifiée pour les arrangements de type fibré. Cette formule est appelée la *formule* LCS. Comme la suite des $\varphi_j(X)$ est reliée au

1-modèle minimal de X, Falk et Randell [**13**] ont proposé la conjecture suivante démontrée précemment ar le premier auteur [**11**]:

La formule LCS est vérifiée quand $\mathcal{M}(1)$ détermine $H^*(X)$.

DÉFINITION. Un arrangement A est $K(\pi,1)$-*rationnel* si:

$$\rho^*: H^*(\mathcal{M}) \to \mathcal{E}/\mathcal{J} \text{ est un isomorphisme.}$$

PROPOSITION [**11**]. *Un arrangement $K(\pi,1)$-rationnel vérifie la formule LCS.*

DÉMONSTRATION: En comparant $Q_{\mathcal{M}(1)}(t)$ et $P(-t)$, on vérifie que l'arrangement A satisfait la formule LCS si et seulement si $\chi(U_p) = (-1)^p b_p$ pour tout $p \geq 0$ où b_p est le $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti de X. Un arrangement $K(\pi,1)$-rationnel peut être caractérisé par les 2 propriétés suivantes:

(i) L'idéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{E}$ est engendré par les éléments de degré 2 (c'est-à-dire A est *2-déterminé*),

(ii) $H^n(U_p) = 0$ pour $0 \leq n < p$.

Alors on peut en déduire que

$$\chi(U_p) = \chi(H^*(U_p)) = (-1)^p \operatorname{rang} H^p(U_p) = (-1)^p b_p$$

d'où le résultat. □

Par la suite nous en donnerons une autre démonstration due à T. Kohno.

PROPOSITION [**11**]. *Soit A un arrangement de $\mathbb{C}^l$ contenant l'ensemble $\{H_1, \ldots, H_{k+1}\}$ d'hyperplans tels que:*

$$\operatorname{codim} \bigcap_{i=1}^{k} H_i = k$$

et tels que pour $1 \leq i < j \leq k$, il existe $H \in A$ vérifiant $H_i \cap H_j \subseteq H$. Alors A n'est pas 2-déterminé (donc n'est pas $K(\pi,1)$-rationnel). □

Il est facile de vérifier que l'arrangement associé au groupe de Coxeter D_4 n'est pas 2-déterminé donc n'est pas $K(\pi,1)$-rationnel. D'un autre côté, cet arrangement est simplicial et par [**8**], il est $K(\pi,1)$ c'est-à-dire que son complément est un espace de type $K(\pi,1)$, d'où:

"$K(\pi,1) \not\Longrightarrow K(\pi,1)$-*rationnel.*"

Signalons que la réciproque est un problème ouvert. Il est montré [**26**] que cet arrangement vérifie la propriété LCS d'où

"$K(\pi,1)$-*rationnel* $\Longrightarrow$ *formule LCS.*"

Un cas intéressant est celui des arrangements de type fibré.

PROPOSITION [**11**]. *Un arrangement de type fibré est $K(\pi,1)$-rationnel.*

COROLLAIRE. *Un arrangement de type fibré vérifie la formule LCS.*

DÉMONSTRATION (DE LA PROPOSITION): M. Falk utilise le foncteur de $\mathbb{Q}$-complétion [**3**] [**4**] dont nous allons donner quelques propriétés utiles dans cette situation:

Soit X un complexe connexe dont les groupes de cohomologie sur $\mathbb{Q}$ sont de dimension finie. Alors $\pi_n(\mathbb{Q}_\infty X) \approx \mathrm{Hom}(\pi^n(\mathcal{M}), \mathbb{Q})$ pour $n \geq 2$ où $\mathbb{Q}_\infty X$ est la $\mathbb{Q}$-complétion de X et $\prod^n(\mathcal{M})$ est composé des éléments indécomposables de degré n du modèle minimal de X. Comme, dans le cas où X est $K(\pi,1)$-rationnel, $\mathcal{M}$ est engendré par les éléments de degré 1, on a $\pi_n(\mathbb{Q}_\infty X) = 0$ pour $n \geq 2$. Soit $F \longrightarrow E \xrightarrow{p} B$ une fibration. Alors $\mathbb{Q}_\infty P \colon \mathbb{Q}_\infty E \to Q_\infty B$ est une fibration de fibre $\mathbb{Q}_\infty F$ (à équivalence d'homotopie près) si $\pi_1(B)$ agit de façon nilpotente sur $H_*(F)$.

Ceci s'applique aux fibrations associées à un arrangement de type fibré. Comme toutes les fibres sont de $K(\pi,1)$-espaces où π est un groupe libre de rang fini, on peut montrer que la $\mathbb{Q}$-complétion des fibres est aussi un espace de type $K(\pi,1)$. Le résultat s'obtient par récurrence. □

REMARQUE. Le corollaire fait l'objet de l'article de M. Falk et R. Randell [**12**] et a été montré par une toute autre méthode par l'auteur [**17**].

2. Algèbre d'holonomie de Lie.

2.1. Complexe d'Aomoto et propriété LCS. En reprenant les notations du paragraphe précédent, soit:

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{L}_j \longrightarrow \mathcal{L}_{j-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow 0$$

la tour de $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie nilpotentes appelée aussi *l'algèbre de Lie duale* du 1-modèle minimal de X. $\mathcal{L}_1$ est l'algèbre de Lie libre abélienne sur

$$H_1(X;\mathbb{Q}) \approx (\pi_1(X,*)/\Gamma_1\pi_1(X,*)) \otimes_Z \mathbb{Q}.$$

Alors l'identité $H_1(X;\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{L}_1$ se relève en une suite d'homomorphismes: $\mathrm{Lib}(H_1(X;\mathbb{Q})) \to \mathcal{L}_j, j \geq 1$. Soit $\mathcal{J}$ l'idéal de $\ker(\mathrm{Lib}(H_1(X;\mathbb{Q})) \to \mathcal{L}_X)$, engendré par les éléments de rang 2. Nous allons caractériser l'algèbre de Lie $\mathrm{Lib}(H_1(X;\mathbb{Q}))/\mathcal{J}$. Rappelons que $\mathcal{M}(1)_1 = \mathcal{E}$, algèbre extérieure libre sur $A = \{H_1,\ldots,H_n\}$. Soit $\rho_1 \colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{J}$ l'application canonique, $\mathcal{M}(1)_2 = \mathcal{E} \otimes_d L_1(V_1)$ où V_1 est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ ayant pour base $\{y_1,\ldots,y_r\}$, et

$$dy_k = \sum_{i,j} \gamma_k^{ij} H_i \wedge H_j, \quad k = 1,\ldots,r$$

Alors

$$\sum_{i,j} \gamma_k^{ij} H_i \wedge H_j = 0$$

dans $(\mathcal{E}/\mathcal{J})^2 \approx H^2(X;\mathbb{Q})$. Par dualité on obtient dans $\mathcal{L}_X$: $[X_i,X_j] = \sum_k \gamma_k^{ij} Y_k$ où $\{X_1,\ldots,X_n\}$ (resp. $\{Y_1,\ldots,Y_r\}$) est la base duale de $\{H_1,\ldots,H_n\}$ (resp. $\{y_1,\ldots,y_r\}$). Soit $H_i \wedge H_j = \sum_k c_{ij}^k Y_k$ alors

$$\sum_{i,j} \gamma_k^{ij} \sum_k c_{ij}^k Y_k = 0$$

d'où

$$\sum_{i,j} \gamma_k^{ij} c_{ij}^k = 0$$

et

$$\sum_{i,j} c_{ij}^k [X_i, X_j] = \sum_{ijk} c_{ij}^k \gamma_k^{ij} Y_k$$
$$= 0$$

dans $\mathrm{Lib}(H_1(X;\mathbb{Q}))/\mathcal{J}$. Ainsi $\mathcal{J}$ contient l'idéal de $\mathrm{Lib}(H_1(X;\mathbb{Q}))$ engendré par les $\sum_{i,j} c_{ij}^k [X_i, X_j]$, $k = 1, \ldots, r$. En comparant les dimensions des composantes de degré 2, on obtient l'égalité de ces deux idéaux.

Soit $\delta: H_2(X;\mathbb{Q}) \to \wedge^2 H_1(X;\mathbb{Q})$ le dual de l'homomorphisme cup-produit $\wedge^2 H^1(X;\mathbb{Q}) \to H^2(X;\mathbb{Q})$. $\mathrm{Lib}(H_1(X;\mathbb{Q}))$ contient l'image de δ et par suite l'idéal $\mathcal{N}$ engendré par cette image d'où:

DÉFINITION. $\mathcal{G}_X = \mathrm{Lib}(H_1(X;\mathbb{Q}))/\mathcal{N}$ est *l'algèbre d'holonomie de Lie de X.*

En fait, cette construction s'applique aussi bien à tout complexe simplicial.

THÉORÈME [**25**]. *Soit X le complément d'une hypersurface complexe D de $P_n(\mathbb{C})$. Alors on a un isomorphisme:*

$$(\pi_1(X;*)/\Gamma_1\pi_1(X;*)) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathcal{G}_X/\Gamma_j\mathcal{G}_X$$

pour tout $j \geq 0$.

DÉMONSTRATION: Par un théorème du type Lefschetz, on peut se ramener au cas $n = 2$. Soit H un plan générique alors $j: H \hookrightarrow P_n(\mathbb{C})$ induit un isomorphisme

$$j_*: \pi_1(H \setminus H \cap D) \to \pi_1(P_n(\mathbb{C}) \setminus D)$$

d'où un isomorphisme des 1-modèles minimaux de $H \setminus H \cap D$ et de $P_n(\mathbb{C}) \setminus D$. Ensuite, par la résolution des singularités, il suffit de considérer le cas où D est un diviseur à croisements normaux et d'utiliser les résultats de Morgan [**34**] sur la structure de Hodge mixte de $\mathcal{M}(1)$. $\square$

COROLLAIRE.

$$\oplus_j (\Gamma_j\pi_1(X;*)/\Gamma_{j+1}\pi_1(X;*)) \oplus \mathbb{Q} \approx \otimes_j (\Gamma_j\mathcal{G}_X/\Gamma_{j+1}\mathcal{G}_X)$$

et en particulier

$$\mathrm{rang}\,(\Gamma_j\pi_1(X;*)/\Gamma_{j+1}\pi_1(X;*)) = \dim \Gamma_j\mathcal{G}_X/\Gamma_{j+1}\mathcal{G}_X. \quad \square$$

PROPOSITION [**25**]. *Soit A un arrangement de $\mathbb{C}^n$. Alors*

$$\sum_{p\geq 0} \chi(p) t^p = \prod_{j\geq 1} (1 - t^j)^{-\varphi_{j-1}(X)} = (Q_{\mathcal{M}(1)}(t))^{-1}$$

où $\chi(p) = \dim \mathcal{E}(\mathcal{G}_X)_p$, dimension de $p^{ième}$ composante homogène de l'algèbre enveloppante de $\mathcal{G}_X$.

DÉMONSTRATION: Comme $\varphi_j(X) = \dim \Gamma_j\mathcal{G}_X/\Gamma_{j+1}\mathcal{G}_X$, il suffit d'appliquer le théorème de Witt [**33**] pour obtenir le résultat. $\square$

Alors la formule LCS s'énonce comme suit:

$$\sum_{p\geq 0}\chi(p)t^p=\prod_{j\geq 1}(1-t^j)^{-\varphi_{j-1}(X)}=P_X(-t)^{-1}.$$

L'égalité

$$\sum_{p\geq 0}\chi(p)t^p=\prod_{j\geq 1}(1-t^j)^{-\varphi_{j-1}(X)}$$

étant vérifiée pour tous les arrangements, la formule LCS se réduit soit à

$$\sum_{p\geq 0}\chi(p)t^p=P_X(-t)^{-1}$$

soit à

$$\prod_{j\geq 1}(1-t^j)^{\varphi_{j-1}(X)}=P_X(-t).$$

Regardons plus précisement l'égalité reliant l'holonomie et la cohomologie du complément X.

DÉFINITION. Soit X un complexe simplicial. Le *complexe d'Aomoto* de X, [**1**], est noté $(R(X)_0,\partial_0)$ où

$$R(X)_k=\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}(\mathcal{G}_X)}(\mathcal{E}(\mathcal{G}_X)\otimes_{\mathbb{Q}}H^k(X;\mathbb{Q}),\mathcal{E}(\mathcal{G}_X))$$

et $\partial_k\colon R(X)_k\to R(X)_{k-1}$ est l'homomorphisme de $\mathcal{E}(\mathcal{G}_X)$-modules défini par

$$\partial_k\lambda(1\otimes\varphi)=\lambda(\sum_j X_j\otimes(\omega^j\cup\varphi))$$

pour $\lambda\in R(X_k)$, $\varphi\in H^k(X;\mathbb{Q})$, $\{\omega^j\}_j$ une base de $H^1(X;\mathbb{Q})$ et $\{X_j\}_j$ la base duale de $H_1(X;\mathbb{Q})$.

Comme $\mathcal{G}_X$ et par suite $\mathcal{E}(\mathcal{G}_X)$ sont graduées avec deg $(X_j)=1$, l'homologie $H.(R(X))$ est graduée; et l'on obtient [**1**]:

$$\left(\sum_{p\geq 0}\chi(p)t^p\right)\cdot(P_X(-t))=\sum_{p\geq 0}\sum_{j=0}^{p}\dim H_j^{(p)}(R(X))t^{p+j}(-1)^j$$

où

$$H_j(R(X))=\sum_{p\geq 0}H_j^{(p)}(R(X)).$$

Comme conséquence immédiate, si le complexe est acylique, on obtient

$$\sum_{p\geq 0}\chi(p)t^p=P_X(-t)^{-1}.$$

T. Kohno [**25, 26**] montre l'acyclitité du complexe d'Aomoto associé aux arrangements A définis par les groupes de Coxeter du type A_l, C_l, D_l, G_2 ou $I_2(P)$. De plus, alors que M. Falk et R. Randell [**12**] montrent la formule LCS pour les arrangements de type fibré en utilisant l'égalité $\prod_{j\geq 1}(1-t^j)^{-\varphi_{j-1}(X)}=P_X(-t)$, nous donnons une démonstration de ce résultat **[17]** en décrivant l'algèbre d'holonomie de Lie $\mathcal{G}_X$ et en déduisant l'égalité $\sum_{p\geq 0}\chi(p)t^p = P_X(-t)^{-1}$. L'élément essentiel est le principe de factorisation lié aux arrangements de type fibré.

Signalons enfin une démonstration du résultat:

$$\text{“}K(\pi,1)\textit{-rationnel} \Longrightarrow \textit{formule LCS}\text{”}$$

utilisant l'algèbre d'holonomie de Lie par T. Kohno **[27]**. Tout d'abord, il est construit une résolution de $\mathbb{Q}$ comme $\mathcal{E}(\mathcal{G}_X)$-module trivial:

$$\ldots \to K_j \xrightarrow{\partial_j} K_{j-1} \to \ldots \to K_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Q} \to 0$$

telle que:

- $\deg\partial_j = 1$ pour $j \geq 1$,
- K_j est un $\mathcal{E}(\mathcal{G}_X)$-module de rang fini pour $j \geq 0$.

Supposons que X soit un arrangement $K(\pi,1)$-rationnel et montrons que $\operatorname{rang} K_j = j^{\text{ième}}$ nombre de Betti de X. Soit $\mathcal{G}_X$ l'algèbre d'holonomie de Lie de X et $\mathcal{G}_X^*$ sa complétion nilpotente, c'est-à-dire $\varprojlim \mathcal{G}_X/\Gamma_j\mathcal{G}_X$. Rappelons que $\mathcal{G}_X = \operatorname{Lib}(H_1(X,\mathbb{Q}))/\mathcal{N}$ et soit $\mathcal{N}^{(2)}$ la composante homogène de degré 2 de $\mathcal{N}$. Comme $\cap_{j\geq 0}\Gamma_j \operatorname{Lib}(H_1(X,\mathbb{Q})) = \{0\}$ on a $i\colon \operatorname{Lib}(H_1(X,\mathbb{Q})) \hookrightarrow \operatorname{Lib}(H_1(X,\mathbb{Q}))^*$ donc $\mathcal{G}_X^* = \operatorname{Lib}(H_1(X,\mathbb{Q}))^*/\mathcal{N}^*$ où $\mathcal{N}^*$ est l'idéal engendré par $i(\mathcal{N}^{(2)})$. On peut remplacer $\mathcal{G}_X$ par $\mathcal{G}_X^*$ dans la résolution précédente. On obtient $\dim_{\mathbb{Q}} H^j(\mathcal{G}_X^*;\mathbb{Q}) = \operatorname{rang} K_j^*$ et comme $\mathcal{G}_X^* \approx \mathcal{L}_X$ on a $\dim_{\mathbb{Q}} H^j(\mathcal{L}_X;\mathbb{Q}) = \operatorname{rang} K_j^*$. Comme $H^j(\mathcal{M}(1)) \approx H^j(X;\mathbb{Q})$ pour $j \geq 1$, on obtient $\operatorname{rang} K_j = j^{\text{ième}}$ nombre de Betti de X. Soit K_j^p la composante homogène de degré p de K_j, $j \geq 0$, dans les suites exactes d'espaces vectoriels

$$\ldots \to K_j^p \xrightarrow{\partial_j} K_{j-1}^{p+1} \to \ldots$$

On obtient le résultat. □

REMARQUE. T. Kohno et T. Oda **[31]** étudient la situation suivante: Soit R une surface de Riemann de genre g et $F_{0,n}R = \{(z_1,\ldots,z_n) \in \prod^n R \mid z_i \neq z_j \text{ si } i \neq j\}$. $F_{0,n}R$ est un $K(\pi,1)$-espace où π est le groupe de tresses colorées à n brins de la surface de Riemann R. Alors:

$$\begin{aligned}\prod_{j\geq 1}(1-t^j)^{\varphi_{j-1}} &= (1-2gt+t^2)\prod_{i=0}^{n-2}(1-(2g+i)t)\\ &= \sum_{i=0}^{2\dim F_{0,n}R}(-1)^i b_i(F_{0,n}R)t^i\end{aligned}$$

où $b_i(F_{0,n}R)$ est le $i^{\text{ème}}$ nombre de Betti de $F_{0,n}R$ et $\varphi_{j-1} = \operatorname{rang}(\Gamma_{j-1}\pi_1(F_{0,n}(R))/\Gamma_j\pi_1(F_{0,n}R))$, ainsi que l'analogue arithmétique de ce résultat.

2.2. Compléments: Le problème de Riemann-Hilbert. Ce paragraphe a pour but de montrer comment la théorie développée précédemment s'insère dans un cadre plus général connu comme le problème de Riemann-Hilbert ou $21^{\text{ème}}$ problème de Hilbert. D'autre part ces considérations nous ramèneront assez naturellement aux arrangements d'hyperplans et aux représentations de monodromie des groupes de tresses liées aux équations de Yang-Baxter, questions étudiées en détail par T. Kohno **[28, 29, 30]**. Nous suivons R. Hain **[16]**

et nous recommandons la lecture de l'exposé au séminaire Bourbaki de P. Cartier [**6**]. Commençons par un exemple illustrant une relation entre la topologie et l'analyse. Le groupe fondamental $\pi_1(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_N\})$ est un groupe libre à N générateurs. Considérons le système d'équations différentielles:

$$z_j'(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{N} \frac{A_{ij}^k}{t - t_k} z_i(t), \quad j = 1, \ldots, m; A_{ij}^k \in \mathbb{C} \tag{*}$$

dont la solution est une fonction "multiforme" sur $P_1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_N\}$ à valeurs dans $\mathrm{GL}(m; \mathbb{C})$; d'où la représentation du monodromie:

$$\rho: \pi_1(P_1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_N\}) \to \mathrm{GL}(m; \mathbb{C}).$$

Le 21ème problème de Hilbert consiste à se demander si chaque représentation linéaire comme ci-dessus est une représentation de monodromie. Notons $\alpha = (\alpha_{ij})$ la 1-forme sur $P_1(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathrm{gl}(m; \mathbb{C})$ définie par

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_{ij}^k}{t - t_k} dt, \quad i, j = 1, \ldots, m.$$

Le système d'équations différentielles $(*)$ s'écrit

$$dz = z\alpha \quad \text{où} \quad z = (z_1, \ldots, z_m)^t.$$

Comme $\alpha \wedge \alpha = d\alpha = 0, \alpha$ définit une *connexion holomorphe intégrable* sur le fibré trivial $\mathbb{C}^m \times (P_1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_N\}) \to P_1(\mathbb{C}) \setminus \{t_1, \ldots, t_N\}$ avec des points singuliers réguliers en t_j, $j = 1, \ldots, N$. Différentes généralisations ont été étudiées (*cf* Deligne, Hain, ...). Bien entendu, nous nous limitons au cas du complément X d'un arrangement d'hyperplans A de $\mathbb{C}^n$. Une 1-forme $\alpha \in \mathcal{R}^1 \otimes \mathrm{gl}(m, \mathbb{C})$, où $\mathcal{R}^1$ est la composante homogène de degré 1 de l'algèbre des formes différentielles associées à l'arrangement A (*cf* [**20**]), définit une *connexion* ∇ sur le fibré trivial $\mathbb{C}^m \times X \longrightarrow X$ par $\nabla f = df - f\alpha$ où $f: X \to \mathbb{C}^m$ est une section de ce fibré. Cette section est *horizontale* si et seulement si $df = f\alpha$, c'est-à-dire $\nabla f = 0$. *La condition d'intégrabilité* de la connexion s'exprime par:

$$d\alpha + \alpha \wedge \alpha = 0$$

et elle entraîne l'existence de la représentation de monodromie:

$$\rho: \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(m; \mathbb{C}).$$

Nous allons, d'une part, préciser cette condition d'intégrabilité à l'aide de *l'algèbre d'holonomie de Lie de X* et, d'autre part, définir la représentation de monodromie en utilisant les *intégrales itérées* de K.T. Chen.

Tout d'abord, soit $\alpha = \sum_{j=1} \alpha_j A_j$ où $A_j \in \mathrm{gl}(m; \mathbb{C})$ et $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ une base de $\mathcal{R}^1$ que nous pouvons prendre de la forme $\alpha_j = (1/2\pi i) d \log \varphi_j$ où $\ker \varphi_j = H_j \in A$. Comme α_j est une 1-forme fermée, on a $d\alpha_j = 0$ et la condition d'intégrabilité se réduit à $\alpha \wedge \alpha = 0$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i \wedge \alpha_j A_i A_j &= \sum_{1 \leq i < j \leq m} \alpha_i \wedge \alpha_j [A_i, A_j] \\ &= 0, \end{aligned}$$

ici $[A_i, A_j] = A_iA_j - A_jA_i$. Grâce à l'isomorphisme d'algèbre

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\rightarrow H^*(X) \\ \alpha &\mapsto \omega \end{aligned}$$

on obtient $\alpha \wedge \alpha = 0$ si et seulement si

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} (\omega^i \cup \omega^j)[A_i, A_j] = 0$$

où $\cup: H^1(X) \times H^1(X) \rightarrow H^2(X)$ est l'homomorphisme cup-produit. Soit $\{\gamma^1, \ldots, \gamma^p\}$ une base de $H^2(X)$; alors $\omega^i \cup \omega^j = \sum_{k-1}^{p} a_k^{ij} \gamma^k$. En définitive $\alpha \wedge \alpha = 0$ si et seulement si

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} a_k^{ij} [A_i, A_j] = 0$$

pour $k = 1, \ldots, p$. D'où la proposition:

PROPOSITION. *La 1-forme $\alpha = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j A_j \in \mathcal{R}^1 \otimes \mathrm{gl}(m; \mathbb{C})$ est intégrable si et seulement si $\sum_{1 \leq i < j \leq m} a_k^{ij} [A_i, A_j] = 0$ pour tout $k = 1, \ldots, p$.* □

Ce résultat suggère la construction suivante: Soit W_p le dual de $H^p(X)$, c'est-à-dire $W_p \approx H_p(X)$ et soit $\delta: W_2 \rightarrow W_1 \otimes W_1$ le morphisme dual du cup-produit. Soit $\{X_1, \ldots X_m\}$ la base de W_1 duale de la base $\{\omega^1, \ldots, \omega^m\}$ de $H^1(X)$ et considérons

$$\mathbb{C}\langle\langle W_1 \rangle\rangle = \mathbb{C}\langle\langle X_1, \ldots, X_m \rangle\rangle$$

l'anneau des séries formelles d'indéterminées $X_1, \ldots, X_m$ non commutatives. L'idéal R de $\mathbb{C}\langle\langle W_1 \rangle\rangle$ engendré par l'image de δ est l'idéal engendré par les éléments

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} a_k^{ij} [X_i, X_j], \quad k = 1, \ldots, p.$$

Notons $A = \mathbb{C}\langle\langle W_1 \rangle\rangle / R$. R. Hain **[16]** définit les séries $\sum_I a_I X_I \in \mathbb{C}\langle\langle W_1 \rangle\rangle$ *universellement convergentes* par $\sum_I |a_I| r^{|I|} < +\infty$ pour tout $r \in \mathbb{R}^+$ où $|I|$ est la longueur du multi-indice I : soit $\mathbb{C}\{W_1\}$ la sous-algèbre des séries universellement convergentes de $\mathbb{C}\langle\langle W_1 \rangle\rangle$. Notons $\mathcal{A}$ l'image de $\mathbb{C}\{W_1\}$ dans A par l'application canonique. En établissant une bijection entre l'ensemble des homomorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres : $\mathcal{A} \rightarrow \mathrm{gl}(m; \mathbb{C})$ et l'ensemble des applications $\mathbb{C}$-linéaires $\varphi : W_1 \rightarrow \mathrm{gl}(m; \mathbb{C})$ telles que le composé:

$$W_2 \xrightarrow{\delta} W_1 \otimes W_1 \xrightarrow{\varphi \otimes \varphi} \mathrm{gl}(m; \mathbb{C}) \otimes \mathrm{gl}(m; \mathbb{C}) \xrightarrow{mult} \mathrm{gl}(m; \mathbb{C})$$

soit nul, où φ est déterminé par $\mathcal{A} \rightarrow \mathrm{gl}(m; \mathbb{C})$, on obtient:

PROPOSITION **[16]**. *Il existe une bijection entre l'ensemble des 1-formes $\alpha \in \mathcal{R}^1 \otimes \mathrm{gl}(m; \mathbb{C})$ vérifiant la condition d'intégrabilité et les homomorphismes de $\mathcal{C}$-algèbres $\mathcal{A} \rightarrow \mathrm{gl}(m; \mathcal{C})$.* □

Ainsi, grâce à cette proposition, on est amené à considérer $\mathcal{R}^1 \otimes \mathcal{A}$. En particulier, la forme $\widehat{\alpha} = \sum_i \alpha_i X_i$, qui est intégrable correspond à Id $\in \mathrm{Hom}(\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^1) \approx \mathcal{R}^1 \otimes W_1$, et est donc indépendante de la base choisie. La connexion associée est universelle parmi les connexions intégrables. Venons-en à la représentation de monodromie. La méthode qui consiste à utiliser les intégrales itérées d'une connexion remonte à H. Poincaré et elle doit sa forme actuelle à K.T. Chen, [**7**]. Citons, à ce propos, la très élégante présentation due à P. Cartier [**6**].

A une connexion ∇ sur un fibré trivial $\mathbb{C}^m \times X \to X$ sur une variété X, on associe la *fonction transport*:

$$T: PX \to \mathrm{GL}(m; \mathbb{C})$$

où PX est l'espace des chemins $\gamma: [0,1] \to X$, différentiables par morceaux et muni de la topologie compacte-ouverte. $T(\gamma)$ est la solution pour $t = 1$, de l'équation différentielle:

$$dF(1) = F(t)\gamma^*\alpha \quad \text{avec} \quad F(0) = \mathrm{Id},$$

où α et la 1-forme de la connexion ∇. Par la suite X sera le complément d'un arrangement A de $\mathbb{C}^n$. Un calcul explicite de T est donné en termes de α.

DÉFINITION [**7**]. Soit B une algèbre associative, $\alpha_1, \ldots, \alpha_2 \in \mathcal{R}^1 \otimes B$ et soit $\gamma \in PX$. On définit

$$\int_\gamma \alpha_1 \ldots \alpha_r = \int_{0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_r \le 1} \int A_1(t_1)A_2(t_2) \ldots A_r(t_r)\, dt_1 \ldots dt_r$$

où $\gamma^*\alpha_j = A_j(t)\, dt$. Une *intégrale itérée* est une application

$$\int \alpha_1 \ldots \alpha_r: PX \to B.$$

LEMME. *Soit $\alpha \in \mathcal{R}^1 \otimes \mathrm{gl}(m; \mathbb{C})$. Pour tout $\gamma \in PX$, il existe m>0 tel que*

$$\| \int_\gamma \overbrace{\alpha \ldots \alpha}^{r \text{ fois}} \| = \sigma\left(\frac{m^r}{r!}\right). \quad \square$$

Ainsi $I + \int_\gamma \alpha + \int_\gamma \alpha\alpha + \ldots$ est une série absolument convergente et le transport $T: PX \to \mathrm{GL}(m; \mathbb{C})$ de la connexion sur $\mathbb{C}^m \times X \to X$ est donné par:

$$T(\gamma) = I + \int_\gamma \alpha + \int_\gamma \alpha\alpha + \ldots.$$

Remarquons que si α est intégrable, la valeur $T(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ, d'où la représentation de monodromie:

$$\begin{aligned} \rho: \pi_1(X) &\to \mathrm{GL}(m; \mathbb{C}) \\ [\gamma] &\mapsto T(\gamma). \end{aligned}$$

Tout ceci s'applique à la connexion universelle $\widehat{\alpha}$, qui est intégrable, pour obtenir la représentation (universelle) de monodromie:

$$\begin{aligned} \theta: \pi_1(X) &\to A \\ [\gamma] &\mapsto I + \int_\gamma \widehat{\alpha} + \int_\gamma \widehat{\alpha}\widehat{\alpha} + \ldots. \end{aligned}$$

Notons que l'image de θ est contenue dans $\mathcal{A}$ et rappelons que pour $\alpha = \sum_j \alpha_j A_j \in \mathcal{R}^1 \otimes \mathrm{gl}(m; \mathbb{C})$, qui est intégrable, il existe $\varphi: \mathcal{A} \to \mathrm{gl}(m; \mathbb{C})$ tel que $\varphi(X_j) = A_j$, homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres; d'où le théorème:

THÉORÈME[**16**]. *Une représentation $\rho: \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(m; \mathbb{C})$ est la représentation de monodromie d'une 1-forme intégrable $\alpha \in \mathcal{R}^1 \otimes \mathrm{gl}(m; \mathbb{C})$ si et seulement s'il existe $\varphi: \mathcal{A} \to \mathrm{gl}(m; \mathbb{C})$ homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres tel que le diagramme suivant soit commutatif:*

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(X) & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{GL}(m; \mathbb{C}) \\
\downarrow \Theta & & \downarrow \\
\mathcal{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{gl}(m; \mathbb{C})
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
[\gamma] & \longrightarrow & \rho([\gamma]) = T(\gamma) = \sum_{r \geq 0} \int_\gamma \overbrace{\alpha \ldots \alpha}^{r \text{ fois}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
1 + \sum_i \int_\gamma \alpha_i X_i + \ldots & \longrightarrow & 1 + \sum_i \int_\gamma \alpha_i A_i + \ldots.
\end{array} \quad \square$$

D'un autre côté, soit $\mathbb{C}\pi_1(X)$ l'algèbre de groupe de $\pi_1(X)$ et J le noyau du morphisme d'augmentation $\varepsilon: \mathbb{C}\pi_1(X) \to \pi_1(X)$ défini par $\varepsilon(g) = 1$ pour tout $g \in \pi_1(X)$ (c'est-à-dire que J est l'idéal de $\mathbb{C}\pi_1(X)$ engendré par les relations $\sum_g a_g = 0$). La complétion J-adique

$$\mathbb{C}\pi_1(X)\hat{} = \varprojlim \mathbb{C}\pi_1(X)/J^s$$

admet une structure naturelle d'algèbre de Hopf complète [**37**] où

$$\Delta: \mathbb{C}\pi_1(X)\hat{} \to \mathbb{C}\pi_1(X)\hat{}\,\hat{\otimes}\,\mathbb{C}\pi_1(X)\hat{}$$

est l'application continue induite par l'application $\mathbb{C}\pi_1(X) \to \mathbb{C}\pi_1(X) \otimes \mathbb{C}\pi_1(X)$ qui associe à g l'élément $g \otimes g$. Afin d'établir le théorème homotopique de De Rham, nous allons définir selon K.T. Chen, la *bar-construction.*

Soit A^* une $\mathbb{C}$-algèbre différentielle graduée munie d'une augmentation $\varepsilon: A^* \to \mathbb{C}$ et notons $IA^* = \ker \varepsilon$. Notons $B^{s,t}(A^*) = [\otimes^s IA^*]^t$ et $[a_1 | \ldots | a_s] = a_1 \otimes \cdots \otimes a_s$. Soit $B(A^*) = (\otimes_{s,t \geq 0} B^{-s,t}(A^*), d = d_I + d_C)$ le complexe total associé au bicomplexe où:

$$d_I([a_1 | \ldots | a_s]) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^i [Ja_1 | \ldots | Ja_{i-1} | Ja_i \wedge a_{i+1} | a_{i+2} | \ldots | a_s]$$

est la différentielle $d_I: B^{-s,t} \to B^{-s,t+1}$

$$d_C([a_1 | \ldots | a_s]) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^{i+1} [Ja_1 | \ldots | Ja_{i-1} | Ja_i \wedge a_{i+1} | a_{i+2} | \ldots | a_s]$$

avec $Ja = (-1)^{\deg a} a$ la différentielle $d_C: B^{-s,t} \to B^{-s,t+1}$. $B(A^*)$ est appelé la *bar-construction* de A^*. C'est une algèbre de Hopf où

$$\Delta: B(A^*) \to B(A^*) \otimes B(A^*)$$

$$[a_1 | \ldots | a_s] \mapsto \sum_{i-1}^{s} [a_1 | \ldots | a_i] \otimes [a_{i+1} | \ldots | a_s]$$

et

$$\begin{aligned}\wedge\colon B(A^*)\otimes B(A^*) &\to B(A^*)\\ [a_1|\dots|a_i]\otimes[a_{i+1}|\dots|a_r] &\mapsto \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)[a_{\sigma(1)}|\dots|a_{\sigma(r+1)}]\end{aligned}$$

avec σ mixage de type (r,s) et $\varepsilon(\sigma)=\pm1$ en prenant comme degré de a dans $B(A^*)$ le nombre $-1+\deg a$. Ainsi $[a_1|\dots|a_s]$ est de degré $-s+\sum_{i-1}^{s}\deg a_i$. On définit une filtration de $B(A^*)$:

$$B(A^*)\supseteq\cdots\supseteq B^{-2}\supseteq B^{-1}\supseteq B^0\supseteq \mathbb{C}$$

par

$$B^{-s}=\otimes_{u\le s}B^{-u,\cdot}$$

qui induit une filtration sur $H(B(A^*))$

$$HB(A^*)\supseteq\cdots\supseteq B_1HB(A^*)\supseteq B_0HB(A^*)\supseteq\mathbb{C}.$$

Nous considérerons le cas où $A^*=\mathcal{R}$. Notons $\mathcal{S}_0(PX)$ le complexe des chaînes singulières de l'espace topologique PX. Le couplage:

$$\begin{aligned}B(\mathcal{R})\otimes H_0(P_xX) &\to \mathbb{C}\\ [\alpha_1|\dots|\alpha_r]\otimes c &\mapsto \int_C \alpha_1\dots\alpha_r\end{aligned}$$

(où P_xX est l'espace des lacets de X en x) induit un couplage:

$$H^0B(\mathcal{R})\otimes H_0(P_xX)\to\mathbb{C}.$$

En remarquant que $H_0(P_xX)\cong\mathbb{C}\pi_1(X)$, on obtient le couplage d'algèbres de Hopf:

$$H^0B(\mathcal{R})\otimes\mathbb{C}\pi_1(X)\to\mathbb{C}.$$

THÉORÈME (CHEN). *Pour ce couplage, la filtration de $H^0B(\mathcal{R})$ est duale de la filtration*

$$\mathbb{C}\pi_1(X)\supseteq J\supseteq J^2\supseteq\dots$$

On obtient les isomorphismes d'algèbres de Hopf complètes et filtrées

$$\begin{tikzcd}
 & P_xX \arrow[d] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
 & \mathbb{C}\pi_1(X)\hat{} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathrm{Hom}(H^0B(\mathcal{R});\mathbb{C}) \arrow[rr, "\simeq"] & & \mathcal{A}
\end{tikzcd}$$

où

$$\theta\colon\mathbb{C}\pi_1(X)\hat{}\to\mathcal{A}$$

$$[\gamma]\longmapsto 1+\sum_{r>0}\int_\gamma\overbrace{\alpha\dots\alpha}^{r\text{ fois}}=1+\sum_i\int_\gamma\alpha_iX_i+\sum_{i,j}\int_\gamma\alpha_i\alpha_jX_iX_j+\dots$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\pi_1(X)\hat{\ } &\longrightarrow \mathrm{Hom}(H^0B(\mathcal{R});\mathbb{C})\\ [\gamma] &\longmapsto \text{la fonctionnelle induite sur } H^0 \text{ par la fonctionnelle définie par}\\ &\qquad [\alpha_{i_1}|\dots|\alpha_{i_r}] \mapsto \textstyle\int_\gamma \alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_r}\end{aligned}$$

L'ensemble des *éléments primitifs* de $\mathbb{C}\pi_1(X)\hat{\ }$:

$$g = \{x \in \mathbb{C}\pi_1(X)\hat{\ } \mid \Delta x = 1\hat{\otimes} x + x\hat{\otimes} 1\}$$

est une algèbre de Lie en prenant le commutateur comme crochet de Lie. L'ensemble des "group-like" éléments de $\mathbb{C}\pi_1(X)$:

$$G = \{x \in 1 + J \mid \Delta x = x\hat{\otimes} x\}$$

est un groupe pour le produit. L'application naturelle $\pi_1(X) \to \mathbb{C}\pi_1(X) \to \mathbb{C}\pi_1(X)\hat{\ }$ se factorise à travers G et donne un homomorphisme $\pi_1(X) \to G$. Les applications $\log\colon 1 + J \to J$ et $\exp\colon J \to 1+J$ sont bien définies, inverses l'une de l'autre et donnent les bijections $\log\colon G \to g$ et $\exp\colon g \to G$.

THÉORÈME **[16]**. $\rho\colon \pi_1(X) \to \mathrm{GL}(m;\mathbb{C})$ *est une représentation de monodromie si et seulement si* ρ *se factorise à travers un homomorphisme de groupes de Lie* $G \to \mathrm{GL}(m;\mathbb{C})$. □

DÉFINITION. g est *l'algèbre d'holonomie de Lie* de X dont le groupe de Lie est G.

REMARQUE. On peut démontrer que g correspond à l'algèbre d'holonomie de Lie de X définie en 2.1.

Ainsi, modulo l'isomorphisme $\mathbb{C}\pi_1(X) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{A}$, g peut être considérée comme la partie primitive de $\mathcal{A}$ et on retrouve notre définition précédente (si on remplace $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{C}$).

2.2. Equations de Yang-Baxter. Soit V un espace vectoriel complexe. L'équation classique de Yang-Baxter est une équation fonctionnelle de l'application $r(u) \in \mathrm{End}(V\otimes V)$ où $u \in \mathbb{C}$:

$$[r_{12}(u), r_{13}(u+v)] + [r_{12}(u), r_{23}(v)] + [r_{13}(u+v), r_{23}(v)] = 0 \qquad \text{(Y.B.)}$$

avec $u, v \in \mathbb{C}, r_{ij}(u) \in \mathrm{End}(V_1\otimes V_2\otimes V_3), V_1 = V_2 = V_3 = V$ tel que $r_{ij}(u)$ est la matrice $r(u)$ sur $V_i \otimes V_j$ qui agit comme l'identité sur le troisième espace V_k.

Par exemple $r_{12}(u) = r(u)\otimes 1_V$. L'équation (Y.B.) garde un sens si $r(u)$ est à valeurs dans $g\otimes g$ où g est une algèbre de Lie. A chaque solution à valeurs dans $g\otimes g$,on peut associer une solution de (Y.B.) par $(\rho\otimes\rho)(r(u)) \in \mathrm{End}(V\otimes V)$ en précisant une représentation irréductible $\rho\colon g \to \mathrm{End}(V)$.

Soit g une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{C}$ et $\{I_\alpha\}$ une base orthonormale de g pour la forme de Cartan-Killing. Posons $\Omega = \sum_\alpha I_\alpha \otimes I_\alpha \in g\otimes g$. Alors $r(u) = \frac{\Omega}{u}$ est une solution de l'équation classique de Yang-Baxter. De plus Ω_{ij} défini par $r_{ij}(u) = \frac{\Omega_{ij}}{u}$ vérifie les relations définissant l'algèbre d'holonomie de Lie associée au complément de l'arrangement de Coxeter de type A_2 (après complexification). Plus généralement, soit $\rho_i\colon g \to V_i$, $1 \le i \le n$, une famille de représentations irréductibles de g. Définissons $\Omega_{ij} \in \mathrm{End}(V_1\otimes\cdots\otimes V_n)$ par $\Omega_{ij} = (p_i\otimes\dots p_j)(\Omega)$, $1 \le i \le j \le u$ où ρ_i agit comme l'identité sur les facteurs $V_k, k \neq i$. Alors les matrices Ω_{ij} vérifient les relations définissant l'algèbre d'holonomie de

Lie du complément X de l'arrangement de Coxeter de type A_{n-1} (complexifié) d'où la connexion intégrable sur X:

$$\omega = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \Omega_{ij} d \log(z_i - z_j).$$

Ainsi, à partir d'une algèbre de Lie g, simple, complexe, et d'une famille de représentations linéaires:

$$\rho_i : g \to \mathrm{End}(V_i), \quad 1 \leq i \leq n,$$

on obtient une représentation linéaire du groupe de tresses colorées P_n :

$$\theta : P_n \to \mathrm{GL}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n)$$

comme la monodromie de l'équation différentielle

$$dy = \Omega y.$$

Tout ceci n'est que le début d'une histoire passionnante racontée en particulier par T. Kohno [**28, 29, 30**].

BIBLIOGRAPHIE

1. Aomoto K., *Poincaré series of the holonomy Lie algebra attached to a configuration of lines*, Preprint.
2. Arnold V.I., *The cohomology ring of the colored braid group*, Mat. Zametki (1969), 227–231.
3. Bousfield A. et Guggenheim V., "On PL De Rham theory and rational homotopy type," Mem. AMS, Amer. Math. Soc., Providence, 1976.
4. Bousfield et A. Kan D., "Homotopy limits completions and localizations," Springer Lecture Notes **304**, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
5. Brieskorn E., "Sur les groupes de tresses (d'après V.I. Arnold)," Séminaire Bourbaki, 24$^{\text{ème}}$ année 1971/72, Springer Lecture Notes **317**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
6. Cartier P., "Jacobiennes généralisées, monodromie unipotente et intégrales itérées," Séminaire Bourbaki, 40$^{\text{ème}}$ année 1987/88, **687**.
7. Chen K.T., *Iterated path integrals*, Bull. Ann. Math. Soc. **83** (1977), 831–879.
8. Deligne P., *Les immeubles de groupes de tresses généralisées*, Invent. Math. **17** (1972), 273–302.
9. Deligne P., Griffiths P., Morgan J. et Sullivan D., *Real homotopy theory of Kähler manifolds*, Invent. Math. **29** (1975), 245–274.
10. Fadell E. et Neuwirth L., *Configuration spaces*, Math. Scand. **10** (1962), 111–11.
11. Falk M., *The minimal models of the complement of an arrangement of hyperplanes*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), 543–556.
12. Falk M. et Randell R., *The lower central series of a fiber-type arrangement*, Invent. Math. **82** (1985), 77–88.
13. ——————, *On the homotopy theory of arrangements*, in "Complex Analytic Singularities, Adv. Studies in Pur Math.," North-Holland, Amsterdam, 1986, pp. 101–124.
14. Grünbaum B., *Arrangements of hyperplanes*, in "Proc. Second Louisiana Confrerence on Combinatoric and Graph Theory," Baton Rouge, 1971, pp. 41–106.
15. Griffiths P. et Morgan J., "Rational homotopy theory and differential forms," Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart, 1981.
16. Hain R., *On a generalization of Hilbert's* 21$^{\text{st}}$ *problem*, Ann. Scient. E.N.S. **19** (1986), 609–627.
17. Jambu M., *Fiber-type arrangements and factorization properties*, Advances in Math, **80** (1990), 1–21.
18. ————, *Algèbre d'holonomie de Lie et certaines fibrations topologiques*, C.R. Acad. Sci. Paris **306 (I)** (1988), 479–482.
19. ————, *Arrangements d'hyperplans I: Les groupes de réflexions*, Ann. sc. math. Québec **12** (1988), 73–99.

20. ________, *Arrangements d'hyperplans II: Topologie et géométrie (première partie)*, Ann. sc. math. Québec **14** (1990), 37–63.
21. Jambu M. et Leborgne D., *Fonctions de Mobius et arrangements d'hyperplans*, C.R. Acad. Sci. Paris **303 (I)** (1986), 311–314.
22. Jambu M. et Terao H., *Free arrangements of hyperplanes and supersolvable lattices*, Advances in Math. **52** (1984), 248–258.
23. ________, *Arrangements of hyperplanes and broken-circuits*, Contemporary Math **90** (1989), 147–162, R. Randel, Ed.
24. Kohno T., *On the holonomy Lie algebra and the nilpotent completion of the fundamental group of complement of hypersurfaces*, Nagoya Math. J. **92** (1985), 21–37.
25. Kohno T., *Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures*, Invent. Math. **82** (1985), 57–75.
26. Kohno T., *Poincaré series of the Malcev completion of generalized pure braid groups*, Preprint.
27. Kohno T., *Rational $K(\pi,1)$-arrangements satisfy the lower central series formula*, Preprint.
28. Kohno T., *Linear representations of braid groups and classical Yang-Baxter equations*, Contemp. Math. **78** (1988).
29. Kohno T., *Hecke algebra representations of braid groups and classical Yang-Baxter equations*, Preprint.
30. Kohno T., *Monodromy representation of braid groups and Yang-Baxter equations*, Ann. Inst. Fourier. **37** (1987), 139–160.
31. Kohno T. et Oda T., *The lower central series of the pure braid group of an algebraic curve*, Adv. Studies in Pure Math. **12** (1987), 201–219.
32. Lehmann D., *Théorie homotopique des formes différentielles (d'après D. Sullivan)*, Soc. Math. France, Astérisque **45** (1977).
33. Magnus W., Karrass A. et Solitar D., "Combinatorial group theory.," John Wiley and Sons, New York, 1966.
34. Morgan J., *The algebraic topology on smooth algebraic varieties*, Publi. Math. I.H.E.S. **48** (1979), 137–204.
35. Orlik P., "Introduction to arrangements," CBMS Lecture Notes 72, Amer. Math. Soc., 1989.
36. Orlik P. et Solomon L., *Unitary reflection groups and cohomology*, Invent. Math. **59** (1980), 77–94.
37. Quillen D., *Rational homotopy theory*, Ann. of Maths **90** (1969), 205–295.
38. Randell R., *The fundamental group of the complement of a union of complex hyperplanes*, Invent. Math. **69** (1982), 103–108; *The fundamental group of the complement of a union of complex hyperplanes: correction*, Invent. Math. **80** (1985), 467–468.
39. Saito K., *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), 265–291.
40. Salvetti M., *Topology of the complement of real hyperplanes in* $\mathbb{C}^N$, Invent. Math. **88** (1987), 603–618.
41. Sullivan D., *Infenitesimal computations in topology*, Public. Math I.H.E.S. **47** (1977), 269–331.
42. Terao H., *Arrangements of hyperplanes and their freeness I*, J. Fac. Sci.: Univer. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), 293–312.
43. Arrola W., "The fundamental group of the complement of an arrangement of complex hyperplanes," Thesis, University of Wisconsin, 1990.

M. Jambu
Département de mathématiques et d'informatique
Faculté des sciences et techniques
Université de Nantes
2 rue de la Houssinière
44072 Nantes Cedex 03 (France)