Ann. sc. math. Québec, **14** (2), 1990, 145–152.

UN THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION DE LEBESGUE SUR L'ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE ORDONNÉ ORTHOMODULAIRE

Brahim HADJOU

RÉSUMÉ. On présente une version algébrique du théorème de décomposition de Lebesgue, qui nous permet d'unifier plusieurs résultats récents.

ABSTRACT. The main result of this paper is an algebraic and non-commutative version of the Lebesgue decomposition theorem, which unifies several recent results.

0. Introduction. Il est bien connu qu'une classe particulière des ensembles ordonnés orthomodulaires se retrouve dans l'axiomatique de la Mécanique Quantique élaboré par von Neumann dans sa monographie classique de 1932 [**8**].

Dans cet article nous allons établir une version algébrique du fameux théorème de décomposition de Lebesgue pour certains sous-ensembles d'un ensemble ordonné orthomodulaire quelconque.

L'article est organisé en trois sections. Dans la section 1, on présente les notions de base d'une théorie algébrique des ensembles ordonnés orthomodulaires dont les détails se trouvent, en général, dans les monographies assez récentes de Beran [**2**] et Kalmbach [**7**]. Dans la section 2 se trouve notre théorème de décomposition de Lebesgue. On y montre que ce théorème contient un résultat récent de [**11**] qui, à son tour, contient des résultats établis dans [**4, 6**]. Dans la dernière section on en déduit un théorème de décomposition pour une fonction définie sur un ensemble ordonné orthomodulaire et à valeurs dans un semi-groupe commutatif. On y montre ensuite que ce théorème contient strictement les théorèmes récents de décomposition apparaissant dans [**5, 11**]. Dans le cas particulier d'un semi-groupe uniforme on en déduit finalement une décomposition d'une fonction exhaustive. Cette décomposition nous permet de formuler, sous une forme plus générale, le théorème de décomposition de Lebesgue établi dans [**9**]. Insistons sur le fait que dans [**9**] se trouve une décomposition de Lebesgue pour les états normaux d'une algèbre JBW associative.

Reçu le 19 avril 1989 et, sous forme révisée, le 15 novembre 1989.

1. Notions préliminaires. On suppose que $(L, \leq)$ est un ensemble ordonné. Si M est un sous-ensemble non-vide de L, le supremum (resp. l'infimum) de M, s' il existe, sera noté $\vee M$ (resp. $\wedge M$) et on dira que $\vee M$ (respectivement $\wedge M$) existe. On note aussi $\vee\{p, q\} = p \vee q$ et $\wedge\{p, q\} = p \wedge q$.

Soit $(L, \leq)$ un ensemble ordonné contenant un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1 avec $0 \neq 1$. Une application $'$ de L dans lui-même est dite une *orthocomplémentation* sur L si $'$ est idempotente, décroissante et $p \wedge p' = 0$ pour tout $p \in L$.

Soit $'$ une orthocomplémentation sur L. On peut montrer facilement la loi de De Morgan suivante: si $p, q \in L$ et $p \vee q$ existe, alors $p' \wedge q'$ existe et $p' \wedge q' = (p \vee q)'$.

On dit que le système $(L, \leq, ', 0, 1)$ est un *ensemble ordonné orthomodulaire* si les axiomes suivants sont vérifiés:

(i) $'$ est une orthocomplémentation sur L.
(ii) Si $p, q \in L$ et $p \leq q'$, alors $p \vee q$ existe.
(iii) Si $p, q \in L$ et $p \leq q$, alors $q = p \vee (p \vee q')'$.

Dans toute la suite de ce travail la lettre L désignera un ensemble ordonné orthomodulaire $(L, \leq, ', 0, 1)$.

Il est facile de vérifier que $0' = 1$, $1' = 0$ et $p \vee p' = 1$ pour tout $p \in L$. De plus les axiomes (i), (ii) et la loi de De Morgan entraînent $(p \vee q')' = p' \wedge q$ pour tout $p, q \in L$ tels que $p \leq q$. On obtient ainsi par l'axiome (iii) l'*identité orthomodulaire*: si $p, q \in L$ et $p \leq q$, alors $q = p \vee (p' \wedge q)$.

Considérons la relation binaire $\perp$ sur L: $p \perp q$ si $p \leq q'$. Puisque $p \leq q' \iff q \leq p'$, la relation $\perp$ est symétrique. Par conséquent si $p \perp q$, on dira que p et q sont *orthogonaux*. Notons que pour tout $p \in L$, $p \perp p \iff p = 0$.

Soient $p \in L$ et M un sous-ensemble non-vide de L. Si $p \perp q$ pour tout $q \in M$, on écrit $p \perp M$. On dit que M est *orthogonal* si M contient un seul élément ou bien $q \perp M \setminus \{q\}$ pour tout $q \in M$. L'axiome (ii) entraîne que si M est un sous-ensemble orthogonal et fini de L, alors $\vee M$ existe.

On dit que:

(a) L est *un treillis orthomodulaire* si $(L, \leq)$ est un treillis.
(b) L est une *algèbre de Boole* si L est un treillis orthomodulaire et $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ pour tout $p, q, r \in L$.

Nous renvoyons les lecteurs aux monographies [**1, 2, 7**] pour des exemples d'ensembles ordonnés orthomodulaires qui ne sont pas des treillis orthomodulaires et des treillis orthomodulaires qui ne sont pas des algèbres de Boole.

Considérons la relation binaire C sur L: $p \,\mathrm{C}\, q$ (on dit alors que p commute avec q) s'il existe un ensemble orthogonal $\{x, y, z\} \subseteq L$ tel que $p = x \vee z$ et $q = y \vee z$. Il est clair que C est réflexive et que $\perp \subseteq \mathrm{C}$.

Si M est un sous-ensemble non-vide de L, on écrit $\mathrm{C}(M) = \{p \in L \mid p \,\mathrm{C}\, q$ pour tout $q \in M\}$ (dit le centre de M). Il est facile de voir que $0, 1 \in \mathrm{C}(M)$.

LEMME 1.1. *Soient $p, q \in L$. On a:*

(i) *Si $p \,\mathrm{C}\, q$, alors $p \,\mathrm{C}\, q'$, $p' \,\mathrm{C}\, q$ et $p' \,\mathrm{C}\, q'$.*
(ii) *$p \,\mathrm{C}\, q \iff p \wedge q$, $p \wedge q'$ existent et $p = (p \wedge q) \vee (p \wedge q')$.*

DÉMONSTRATION: Voir [**1**], p. 126 ou [**2**], pp. 307–309. □

Remarquons deux conséquences immédiates du lemme précédent:

(a) $p \in \mathrm{C}(M) \implies p' \in \mathrm{C}(M)$;
(b) $\mathrm{C}(M) = \mathrm{C}(M')$, où $M' = \{q' \mid q \in M\}$.

LEMME1.2. *Soit M un sous-ensemble non-vide de L tel que $\vee M$ existe. Si $p \in \mathrm{C}(M)$ et $\vee\{p \wedge q \mid q \in M\}$ existe, alors $p\,\mathrm{C}(\vee M)$ et $p \wedge (\vee M) = \vee\{p \wedge q \mid q \in M\}$.*

DÉMONSTRATION: Voir à nouveau [**1**], p. 127 ou [**2**], p. 310. $\square$

LEMME 1.3. *Pour tout sous-ensemble non-vide M de $L, (\mathrm{C}(M), \leq,', 0, 1)$ est un ensemble ordonné orthomodulaire.*

DÉMONSTRATION: Il suffit de vérifier l'axiome (ii). Soient $p, q \in \mathrm{C}(M)$ tels que $p \perp q$ et soit $r \in M$. Alors $(p \wedge r) \perp (r \wedge p)$. Donc $(p \vee q)$ et $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ existent (dans L). Par le lemme 1.2, on a $r\,\mathrm{C}(p \vee q)$. Alors $p \vee q \in \mathrm{C}(M)$. $\square$

LEMME 1.4. $(\mathrm{C}(L), \leq,', 0, 1)$ *est une algèbre de Boole.*

DÉMONSTRATION: Par les lemmes 1.1 et 1.3 il est facile de voir que $(\mathrm{C}(L), \leq,', 0, 1)$ est un treillis orthomodulaire. Soient $p, q, r \in \mathrm{C}(L)$. Puisque les éléments $q \vee r$, $p \wedge q$, $p \wedge r$ appartiennent à $\mathrm{C}(L)$, on a que $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ existe. Donc, d'après le lemme 1.2, $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. $\square$

2. Théorème de décomposition de Lebesgue. Si p $\in L$, on écrit $[0,p] = \{q \in L \mid q \leq p\}$. Soientt M un sous-ensemble non-vide de L et $N \subseteq M$. On dit que:

(a) M est *normal* si $[0,p] \subseteq M$ pour tout p $\in M$.
(b) N est *orthomajoré* dans M si $N = \emptyset$ ou bien tout sous-ensemble orthogonal de N est majoré dans M.

Notons que $[0,p]$ est normal pour tout $p \in L$ et que si M possède un plus grand élément, alors N est orthomajoré dans M pour tout $N \subseteq M$.

Soient $p \in L$ et M un sous-ensemble non-vide de L. On écrit $M_p = L \setminus \{q \in L \mid q \wedge p$ existe et $q \wedge p \in L \setminus M\}$. Notons que $M_1 = M$ et que $M_0 = L$ si $0 \in M$.

Soit M un sous-ensemble non-vide de L. On écrit $M^* = \{p \in L \mid M_p = L\}$. Notons que $M^* \subseteq M$ et que $M^* \neq \emptyset$ si $0 \in M$.

LEMME 2.1. *Soient $p \in L$ et M, N deux sous-ensembles non-vides de L tels que $N \subseteq M$. On a:*

(i) $N_p \subseteq M_p$.
(ii) *Si M est normal, alors $M \subseteq M_p$.*
(iii) *Si $0 \in M$, alors M^* est le plus grand sous-ensemble normal de M.*

DÉMONSTRATION: (i) Il suffit de remarquer que $\{q \in L \mid q \wedge p$ existe et $q \wedge p \in L \setminus M\} \subseteq \{q \in L \mid q \wedge p$ existe et $q \wedge p \in L \setminus N\}$.

(ii) Soit $q \in L \setminus M_p$. Alors $q \wedge p$ existe et $q \wedge p \in L \setminus M$. Donc $[0,q] \cap (L \setminus M) \neq \emptyset$. Puisque M est normal, $q \in L \setminus M$.

(iii) Pour montrer la normalité de M^* il suffit d'établir l'implication: $[0,q] \cap (L \setminus M^*) \neq \emptyset \implies q \in L \setminus M^*$. Soit $r \in [0,q] \cap (L \setminus M^*)$. Alors $r \in L \setminus M^*$ et donc $L \setminus M_r \neq \emptyset$. Soit $t \in L \setminus M_r$. Alors $t \wedge r$ existe et $t \wedge r \in L \setminus M$. Mais $q \wedge (t \wedge r) = t \wedge r \in L \setminus M$. Alors $L \setminus M_q \neq \emptyset$, et par conséquent $q \in L \setminus M^*$.

Soit P un sous-ensemble normal de M et soit $q \in L \setminus M^*$. Alors $L \setminus M_q \neq \emptyset$. Soit $r \in L \setminus M_q$. Donc $r \wedge q$ existe et $r \wedge q \in L \setminus M \subseteq L \setminus P$. Par conséquent $[0,q] \cap (L \setminus P) \neq \emptyset$. La normalité de P entraîne $q \in L \setminus P$. $\square$

LEMME 2.2. *Soient M et N deux sous-ensembles de L tels que M est normal, $N \subseteq M$ et $0 \in N$. Si $M \setminus N$ est orthomajoré dans M, alors il existe $p \in M$ tel que $M \subseteq N_{p'}$.*

DÉMONSTRATION: Si $M = N$, il suffit de choisir $p = 0$. Supposons que $M \setminus N \neq \emptyset$. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles orthogonaux de $M \setminus N$. Si $q \in M \setminus N$, alors $\{q\} \in \mathcal{O}$. Il est clair que le système $(\mathcal{O}, \subseteq)$ est un ensemble ordonné. Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{O}$ et soit $D = \cup\{C \mid C \in \mathcal{C}\}$. Alors $D \in \mathcal{O}$ et D est un majorant de $\mathcal{C}$. D'après le lemme de Zorn, il existe un sous-ensemble orthogonal maximal E de $M \setminus N$. Puisque $M \setminus N$ est orthomajoré dans M, E possède un majorant $p \in M$. Le lemme 2.1 et la normalité de M entraînent $M \subseteq M_{p'}$. Pour terminer la preuve il suffit d'établir que $M_{p'} \setminus N_{p'} = \emptyset$. Supposons le contraire. Alors il existe $q \in M_{p'} \setminus N_{p'}$. Puisque $q \in L \setminus N_{p'}, p' \wedge q$ existe et $p' \wedge q \in L \setminus N$. Donc $p' \wedge q \in M \setminus N$. Comme $p' \wedge q \perp p$ et p est un majorant de E, on a que $p' \wedge q \perp E$. La maximalité de E implique que $p' \wedge q = 0$, une contradiction. □

Avant d'introduire la notion de la singularité remarquons que si P et Q sont deux sous-ensembles non-vides de L, alors $P \cap Q' \neq \emptyset \implies P' \cap Q \neq \emptyset$.

Soient M et N deux sous-ensembles de L contenant 0. Si $M^* \cap (N^*)' \neq \emptyset$, on dit que M et N sont *singuliers* et on écrit $M \perp N$.

THÉORÈME 2.3. *Soient M et N deux sous-ensembles non-vides de L tels que M est normal et $0 \in N$. Si $M \setminus N$ est orthomajoré dans M, alors il existe $p \in M$ tel que $M \subseteq N_{p'}$ et $M \perp N_p$.*

DÉMONSTRATION: Puisque $0 \in M \cap N$ et $M \setminus N = M \setminus (M \cap N)$, d'après le lemme 2.2 il existe $p \in M$ tel que $M \subseteq (M \cap N)_{p'}$. Alors le lemme 2.1 entraîne que $M \subseteq N_{p'}$ et $M^* = M$. Pour compléter la preuve il suffit de vérifier que $p' \in (N_p)^*$, c'est-à-dire que $L \setminus (N_p)_{p'} = \emptyset$. Supposons le contraire. Alors il existe $q \in L \setminus (N_p)_{p'}$. Donc $q \wedge p'$ existe et $q \wedge p' \in L \setminus N_p$. Alors $0 = (q \wedge p') \wedge p \in L \setminus N$, une contradiction. □

Soient M un sous-ensemble non-vide de L et $\varkappa$ un nombre cardinal infini. On dit que:

(a) M est un *orthoidéal* s'il satisfait les deux conditions suivantes:
  (i) M est normal.
  (ii) Si $p, q \in M$ et $p \perp q$, alors $p \vee q \in M$.

(b) M est *$\varkappa$-orthocomplet* si, pour tout sous-ensemble orthogonal D de M avec $\text{card}(D) \leq \varkappa$, le supremum de D existe et $\vee D \in M$.

(c) M satisfait *la condition de la $\varkappa$-chaîne* si, pour tout sous-ensemble orthogonal D de M, on a que $\text{card}(D) \leq \varkappa$.

Notons que si L est une algèbre de Boole, alors tout orthoidéal est un idéal. Si de plus M est un sous-ensemble non-vide de L et $\varkappa$ est un nombre cardinal infini, alors M est dit *$\varkappa$-complet* si, pour tout sous-ensemble D de M tel que $\text{card}(D) \leq \varkappa$, le supremum de D existe et $\vee D \in M$.

COROLLAIRE 2.4 ([**11**]). *Supposons que L est une algèbre de Boole. Soient M et N deux sous-ensembles de L et $\varkappa$ un nombre cardinal infini tels que:*

(i) *M est un idéal $\varkappa$-complet.*
(ii) *$0 \in N$.*
(iii) *$M \setminus N$ satisfait la condition de la $\varkappa$-chaîne.*

Alors il existe $p \in M$ tel que $M \subseteq N_{p'}$ et $M \perp N_p$. □

REMARQUE 2.5. Le corollaire 2.4 contient le théorème de décomposition de Lebesgue de [4], p. 55–56.

3. Décomposition d'une fonction définie sur un ensemble ordonné orthomodulaire. Dans la suite $S = (S, +, 0)$ désigne un semi-groupe commutatif avec l'élément neutre 0. Soient $\mu \in S^L$ et $p \in L$. On définit $\mu_p \colon \mathrm{C}(\{p\}) \to S$ par la formule $\mu_p(q) = \mu(p \wedge q)$. Soit $\mu \in S^L$ tel que $\mu(0) = 0$. On écrit $N(\mu) = \{p \in L \mid \mu/_{[0,p]} = 0\}$. Il est clair que $N(\mu)$ est normal.

On dit qu'une fonction $\mu \in S^L$ est *additive* si elle satisfait les conditions suivantes:

(a) $\mu(0) = 0$.
(b) Si $p, q \in L$ et $p \perp q$, alors $\mu(p \vee q) = \mu(p) + \mu(q)$.

L'ensemble des fonctions additives de L dans S sera noté $a(L, S)$.

LEMME 3.1. *Soient $p \in L$ et $\mu \in S^L$ tel que $\mu(0) = 0$. On a:*

(i) $N(\mu_p) = (N(\mu))_p \cap \mathrm{C}(\{p\})$.
(ii) *Si, de plus, $\mu \in a(L, S)$, alors $\mu_p, \mu_{p'}$ sont additives et $\mu/_{\mathrm{C}(\{p\})} = \mu_p + \mu_{p'}$.*

DÉMONSTRATION: (i) Il suffit de remarquer que $N(\mu_p) = \{q \in \mathrm{C}(\{p\}) \mid \mu_p/_{[0,q] \cap \mathrm{C}(\{p\})} = 0\} = \{q \in \mathrm{C}(\{p\}) \mid \mu/_{[0,p \wedge q]} = 0\} = (N(\mu))_p \cap \mathrm{C}(\{p\})$.

(ii) L'additivité de μ_p découle immédiatement du lemme 1.2. L'égalité $\mu/_{\mathrm{C}(\{p\})} = \mu_p + \mu_{p'}$ est une conséquence du lemme 1.1 (ii). □

Soient M un sous-ensemble non-vide de L et $\mu \in S^L$ tel que $\mu(0) = 0$. On dit que:

(a) μ est *absolument continue* par rapport à M si $M \subseteq N(\mu)$. On écrit alors $\mu << M$.
(b) μ est *singulière* par rapport à M si $N(\mu) \perp M$. On écrit alors $\mu \perp M$.

LEMME 3.2. *Soient M un sous-ensemble normal de L et $\mu \in a(L, S)$. Si ξ et η sont deux éléments de $a(L, S)$ tels que $\mu = \xi + \eta, \xi << M$ et $\eta \perp M$, alors il existe $p \in M$ tel que $\xi/_{\mathrm{C}(\{p\})} = \mu_{p'}$ et $\eta/_{\mathrm{C}(\{p\})} = \mu_p$.*

DÉMONSTRATION: Puisque $\eta \perp M$ et $\xi << M$, il existe $p \in M \subseteq N(\xi)$ tel que $p' \in N(\eta)$. Il est alors facile de vérifier que p satisfait les conditions du lemme. □

LEMME 3.3. *Soient M un sous-ensemble normal de L et $\mu \in a(L, S)$. Si p et q sont deux éléments de $M \cap \mathrm{C}(L)$ tels que $\mu_{p'} << M$ et $\mu_{q'} << M$, alors $\mu_p = \mu_q$ et $\mu_{p'} = \mu_{q'}$.*

DEMONSTRATION: Notons d'abord que $p \wedge q, p \wedge q'$ et $p' \wedge q$ existent et appartiennent à $\mathrm{C}(L)$. De plus, puisque $\mu_{p'}, \mu_{q'} << M$, on en déduit que $p \wedge q', p' \wedge q \in N(\mu)$. Soit $r \in L$. Une application des lemmes 1.1 et 1.4 donne $\mu_p(r) = \mu(p \wedge r) = \mu((p \wedge r \wedge q) \vee (p \wedge r \wedge q')) = \mu(p \wedge r \wedge q) + \mu(p \wedge r \wedge q') = \mu(p \wedge r \wedge q) = \mu(p \wedge r \wedge q) + \mu(p' \wedge r \wedge q) = \mu((p \wedge r \wedge q) \vee (p' \wedge r \wedge q)) = \mu(r \wedge q) = \mu_q(r)$. Donc $\mu_p = \mu_q$. L'égalité $\mu_{p'} = \mu_{q'}$ se montre de la même façon. □

THÉORÈME 3.4. *Supposons que M est un sous-ensemble normal de L, que $\mu \in S^L$ est tel que $\mu(0) = 0$ et que $M \setminus N(\mu)$ est orthomajoré dans M. Alors:*

(i) *Il existe $p \in M$ tel que $\mu_{p'} << M \cap \mathrm{C}(\{p\})$ et $\mu_p \perp M \cap \mathrm{C}(\{p\})$.*
(ii) *Si, de plus, $M \subseteq \mathrm{C}(L)$ et $\mu \in a(L, S)$, alors $\mu = \mu_{p'} + \mu_p$ est l'unique décomposition de μ en somme de deux fonctions additives de L dans S, telles que la première est absolument continue par rapport à M et la deuxième est singulière par rapport à M.*

DÉMONSTRATION: (i) D'après le théorème 2.3 il existe $p \in M$ tel que $M \subseteq (N(\mu))_{p'}$ et $M \perp (N(\mu))_p$. Alors $M \cap \mathrm{C}(\{p\}) \subseteq (N(\mu))_{p'} \cap \mathrm{C}(\{p\})$ et $p' \in M \cap (N(\mu))_p$. Par le lemme 3.1 (i), on en déduit que $\mu_{p'} << M \cap \mathrm{C}(\{p\})$ et $\mu_p \perp M \cap \mathrm{C}(\{p\})$.

(ii) Ce fait découle immédiatement de (i) et des lemmes 3.1 (ii), 3.2 et 3.3. □

COROLLAIRE 3.5 ([**11**]). *Supposons que L est une algèbre de Boole. Soient M un sous-ensemble de L, $\varkappa$ un nombre cardinal infini et $\mu \in S^L$ tels que $\mu(0) = 0$, M est un idéal $\varkappa$-complet et $M \setminus N(\mu)$ satisfait la condition de la $\varkappa$-chaîne. Alors on a:*

(i) *Il existe $p \in M$ tel que $\mu_{p'} << M$ et $\mu_p \perp M$.*

(ii) *Si, de plus, $\mu \in a(L, S)$, alors $\mu = \mu_{p'} + \mu_p$ est l'unique décomposition de μ en somme de deux fonctions additives de L dans S, telles que la première est absolument continue par rapport à M et la deuxième est singulière par rapport à M.* □

COROLLAIRE 3.6 ([**5**]). *Soient $\mu \in a(L, S)$ et $\lambda \in a(L, T)$, où T est aussi un semi-groupe commutatif, et $\varkappa$ un nombre cardinal infini tels que $N(\lambda)$ est un orthoidéal $\varkappa$-orthocomplet, $N(\lambda) \subseteq \mathrm{C}(L)$ et $N(\lambda) \setminus N(\mu)$ satisfait la condition de la $\varkappa$-chaîne. Alors il existe une unique paire de fonctions additives ξ et η de L dans S, telle que*

(i) $\xi << N(\lambda)$.

(ii) $\eta \perp N(\lambda)$.

(iii) $\mu = \xi + \eta$. □

REMARQUE 3.7. Les deux exemples qui suivent, montrent que notre théorème 3.4 est une extension stricte des résultats principaux de [**5, 11**].

Considérons l'intervalle $[0,1[$ de la droite réelle et soit $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les réunions finies de sous-intervalles de $[0,1[$ de la forme $[a,b[$ avec $a < b$. Alors $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \subseteq, ^c, \emptyset, [0,1[)$ est une algèbre de Boole (qui n'est pas $\mathcal{N}_0$-complète). Posons $M = [\emptyset, B]$, où $B \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$. Il est clair que M est normal et que tout sous-ensemble de M est orthomajoré dans M. Soit S un semi-groupe commutatif. Alors, pour tout $\mu \in a(\mathcal{A}, S)$, $\mu = \mu_{B^c} + \mu_B$ est l'unique décomposition de μ donnée par le théorème 3.4. Puisque $B \neq \emptyset$, il existe $a, b \in [0,1[$ tels que $a < b$ et $[a,b[\subseteq B$. Soit $B_n = [a + \frac{b-a}{2^n}, a + \frac{b-a}{2^n-1}[$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ On peut vérifier que

$$\bigcup_{n-1}^{\infty} B_n =]a,b[\notin \mathcal{A}.$$

Donc pour tout nombre cardinal infini $\varkappa$, M n'est pas $\varkappa$-orthocomplet. Par conséquent, le corollaire 3.5 ne s'applique pas. Considérons maintenant T l'ensemble de toutes les fonctions réelles définies sur l'intervalle $[0,1[$. Alors $T = (T, +, 0)$ est un groupe commutatif, où $+$ désigne la somme usuelle de deux éléments de T. Soit $\lambda \colon \mathcal{A} \to T$ la fonction définie par la formule: $\lambda(A) = \chi_{B^c \cap A}$, où $\chi_{B^c \cap A}$ désigne la fonction indicatrice de $B^c \cap A$. Il est clair que $\lambda \in a(\mathcal{A}, T)$ et que $N(\lambda) = M$. Puisque $N(\lambda)$ n'est pas $\varkappa$-orthocomplet, le corollaire 3.6 ne s'applique pas.

Soit $S = (S, +, 0)$ un semi-groupe commutatif et soit $\mathcal{U}$ une uniformité sur S. Si la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est uniformément continue de $(S, \mathcal{U}) \times (S, \mathcal{U})$ dans $(S, \mathcal{U})$, on dit que $S = (S, +, 0, \mathcal{U})$ est un semi-groupe uniforme. (Voir à ce propos [**10**]).

Soit $S = (S, +, 0, \mathcal{U})$ un semi-groupe uniforme et soit $\mu \in S^L$ tel que $\mu(0) = 0$. On dit que μ est exhaustive si, pour toute suite $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ telle que $\{p_n \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$ est un sous-ensemble orghogonal de L, on a que

$$\lim_{n \to \infty} \mu(P_n) = 0.$$

COROLLAIRE 3.8. *Soient M un sous-ensemble normal de $L, S = (S, +, 0, \mathcal{U})$ un semi-groupe uniforme séparé et $\mu: L \to S$ une fonction exhaustive. Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de l'uniformité $\mathcal{U}$ telle que tout sous-ensemble orthogonal D de $M \setminus N(\mu)$ de cardinal $\mathrm{card}(D) \leq \mathrm{card}(\mathcal{B})$ soit majoré dans M. Alors:*

(i) *Il existe $p \in M$ tel que $\mu_{p'} << M \cap \mathrm{C}(\{p\})$ et $\mu_p \perp M \cap \mathrm{C}(\{p\})$.*

(ii) *Si, de plus, $M \subseteq \mathrm{C}(L)$ et $\mu \in a(L, S)$, alors $\mu = \mu_{p'} + \mu_p$ est l'unique décomposition de μ en somme de deux fonctions additives et exhaustives de L dans S, telles que la première est absolument continue par rapport à M et la deuxième est singulière par rapport à M.*

DÉMONSTRATION: Notons d'abord que si $\lambda: L \to S$ est une fonction exhaustive et $q \in L$, alors $\lambda_q: \mathrm{C}(\{q\}) \to S$ est aussi exhaustive. Pour compléter la démonstration il suffit de montrer que $M \setminus N(\mu)$ est orthomajoré dans M et d'appliquer ensuite le théorème 3.4. Soit $D = \{d_i \mid i \in I\}$ un sous-ensemble orthogonal de $M \setminus N(\mu)$. Alors pour tout $i \in I$, il existe $c_i \in [0, d_i]$, tel que $\mu(c_i) \neq 0$. Il est clair que $\mathrm{C} = \{c_i \mid i \in I\}$ est un sous-ensemble orthogonal de L. Pour chaque $B \in \mathcal{B}$, posons $I_B = \{i \in I \mid \mu(c_i) \notin B[0]\}$. Puisque μ est exhaustive, chaque I_B est fini. Soit $i \in I$. Comme $(S, \mathcal{U})$ est séparé et $\mu(c_i) \neq 0$, il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(c_i) \notin B[0]$. Alors $I = \cup\{I_B \mid B \in \mathcal{B}\}$. Il en découle de [**3**], corollaire, p. 42 et [**3**], corollaire 3, p. 72–73, que

$$\mathrm{card}(I) \leq \sum_{B \in \mathcal{B}} \mathrm{card}(I_B) \leq \mathrm{card}(\mathcal{B}).$$

Donc D est majoré dans M. $\square$

Considérons finalement le semi-groupe uniforme séparé $S = ([0, +\infty[, +, \mathcal{U})$ où $\mathcal{U}$ est la trace sur $[0, +\infty[$ de l'uniformité usuelle de la droite réelle. Soit Δ un sous-ensemble non-vide de $a(L, S)$. On dit que Δ est *fermé par rapport au conditionnement central* si, pour tout $\mu \in \Delta$ et tout $p \in C(L)$ tel que $\mu(p) \neq 0$, on a

$$\frac{\mu_p}{\mu(p)} \in \Delta.$$

Si Δ est un sous-ensemble non-vide de $a(L, S)$, on écrit $R_+ \cdot \Delta = \{t\mu \mid t \in [0, +\infty[$ et $\mu \in \Delta\}$. Le corollaire suivant contient le théorème 3.4 de [**9**], p. 328.

COROLLAIRE 3.9. *Supposons que L est une algèbre de Boole. Soit Δ un sous-ensemble de $a(L, S)$ satisfaisant les conditions suivantes:*

(i) *Δ est fermé par rapport au conditionnement central.*

(ii) *Si $\mu \in \Delta$, alors tout sous-ensemble dénombrable de $N(\mu)$ est orthomajoré dans $N(\mu)$.*

Alors pour tout $(\mu, \lambda) \in \Delta \times \Delta$ il existe un unique couple $(\xi, \eta) \in R_+ \cdot \Delta \times R_+ \cdot \Delta$, tel que $\mu = \xi + \eta, \xi << N(\lambda)$ et $\eta \perp N(\lambda)$.

DÉMONSTRATION: Montrons d'abord que chaque $v \in a(L,S)$ est exhaustive. Soit $\{p_n\}_{n-1}^{\infty}$ une suite telle que $\{p_n \mid n = 1,2,3,\dots\}$ est un sous-ensemble orthogonal de L. Puisque

$$\sum_{k=1}^{n} v(p_k) = v(\vee\{p_k \mid k = 1,2,\dots,n\}) \leq v(1), \quad \text{pour tout } n = 1,2,\dots$$

on a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(p_n) < \infty,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} v(p_n) = 0.$$

Alors on peut appliquer le corrollaire 3.8 en prenant μ et $M = N(\lambda)$. Donc il existe $p \in M$ tel que $\mu = \mu_{p'} + \mu_p$ est l'unique décomposition de μ en somme de deux fonctions additives de L dans S, telles que $\mu_{p'} << N(\lambda)$ et $\mu_p \perp N(\lambda)$. Maintenant, la condition (i) entraîne $\mu_q \in R_+ \cdot \Delta$ pour tout $q \in L$. □

BIBLIOGRAPHIE

1. Beltrametti E.G. et Cassinelli G., "The Logic of Quantum Mechanics," Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1981.
2. Beran L., *Orthomodular Lattices Algebraic Approach*, Academia (1984), Praha.
3. Bourbaki N., "Théorie des ensembles, Chapitre 3," Actuel. Scient. Ind. **1243**, Hermann, Paris, 1963.
4. Capek P., *Decomposition Theorems in Measure Theory*, Math. Slovaca **31** (1981), 53–69.
5. D'Andrea A.B., De Lucia P. et Morales P., *The Lebesgue Decomposition Theorem and the Nikodym Convergence Theorem on an Orthomodular Poset*, Mat. Atti. Sem. Mat. Fis. (à paraître) (1989), Univ. Modena.
6. Ficker V., *An abstract formulation of the Lebesgue decomposition theorem*, J. Austral. Math. Soc. **12** (1971), 101–105.
7. Kalmbach G., "Orthomodular Lattices," Academic Press, London, 1983.
8. von Neumann J., "Mathematischie Grundlagen der Quantenmechanik," Julius Springer, Berlin, 1932.
9. Rüttimann G. et Schindler C., *The Lebesgue Decomposition of Measures on an Orthomodular Posets*, Quart. J. Math. Oxford **37** (1986), 321–345.
10. Sion M., "A Theory of Semigroup Valued Measures," Lect. Notes Math. **355**, Springer–Verlag, Berlin, 1973.
11. Tarantino C., *Decomposition Theorems for Finitely Additive Functions*, Ricerche Mat. (1988). A paraître.

B. Hadjou
Département de mathématiques et d'informatique
Université de Sherbrooke
Sherbrooke, Québec
Canada, J1K 2R1