Ann. sc. math. Québec, **14** (2), 1990, 131–143.

SUR LE BIAIS D'UN ESPACE DE BANACH

JOCELYN DESBIENS

RÉSUMÉ. Nous définissons ici une mesure du degré de symétrie de la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James dans un espace de Banach quelconque. Nous donnons ensuite une caractérisation métrique des espaces de Hilbert et une application de cette mesure aux opérateurs pseudo-contractants.

ABSTRACT. We define below a measure of the degree of symmetry of Birkhoff-James' orthogonality relation in a Banach space. We then give a metric characterization of inner product spaces and an application of this measure to pseudocontractive operators.

1. Notation. Dans cet article nous utiliserons les notations suivantes:

$\#X$ La cardinalité de l'ensemble X.

$(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ Espace de Banach réel.

$\mathcal{O}$ Le vecteur origine de l'espace $\mathcal{B}$.

$\mathcal{S}(x;\rho)$ La sphère de centre x et de rayon ρ, c'est-à-dire

$$\mathcal{S}(x;\rho) = \{y \in \mathcal{B} \mid \|x-y\| = \rho\}, \rho > 0.$$

$\mathcal{B}(x;\rho)$ La boule de centre x et de rayon ρ, c'est-à-dire

$$\mathcal{B}(x;\rho) = \{y \in \mathcal{B} \mid \|x-y\| \leq \rho\}, \rho > 0.$$

$\mathcal{S}$ La sphère unité de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{O};1)$.

$\mathcal{C}(x,y)$ Le cercle unité du plan $\mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est le plan contenant les vecteurs indépendants x et y et l'origine $\mathcal{O}$. Donc $\mathcal{C}(x,y) = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$. Nous le noterons par $\mathcal{C}$ lorsque le contexte sera clair.

$\dim(\mathcal{B})$ La dimension algébrique de $\mathcal{B}$.

$[x,y]$ Le segment de droite ayant les vecteurs x et y comme extrémités.

T_γ L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\gamma \geq 1$ et à l'application $T\colon X \to \mathcal{B}$, c'est-à-dire $T_\gamma = \{x \in \mathcal{B} \mid T(x) = \gamma x\}$.

$\mathrm{F}(T)$ L'ensemble des points fixes de l'application $T\colon X \to \mathcal{B}$. Donc $\mathrm{F}(T) = T_1$.

2. Introduction. Rappelons en premier lieu la définition suivante:

DÉFINITION 1. (Birkhoff [**2**], page 169) Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $(x,y) \in \mathcal{B}^2$. Nous dirons que x est *orthogonal à y au sens de Birkhoff-James*, ce que nous noterons par $x \perp_{BJ} y$, si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

La définition originale de la relation de Birkhoff-James a été donnée par Birkhoff [**2**] en 1935. Elle fut reprise un peu plus tard par Fortet [**13**] et James [**16**] et utilisée par Joly [**18**] en 1969 dans sa définition de la mesure de convexité d'un espace de Banach. C'est ce qu'il a dénommé la "constante rectangle" d'un espace vectoriel normé. En voici la définition formelle:

Reçu le 13 juin 1989 et, sous forme révisée, le 28 octobre 1989.

DÉFINITION 2. (Joly [**18**], définition 2) Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On définit la *constante rectangle* de l'espace $\mathcal{B}$, que l'on dénote $\mu(\mathcal{B})$, par la formule

$$\mu(\mathcal{B}) = \sup_{x \perp_{BJ} y} \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x+y\|}.$$

Joly a montré que $\sqrt{2} \leq \mu(\mathcal{B}) \leq 3$. On a en fait la caractérisation suivante[1]:

PROPOSITION. *(Del Rio et Benitez [**11**], théorème, page 18) Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Pour que la norme soit issue d'un produit scalaire il faut et il suffit que $\mu(\mathcal{B}) = \sqrt{2}$.*

C'est dans le même esprit que nous introduisons une constante associée à un espace de Banach[2] $\mathcal{B}$, que nous noterons $\beta(\mathcal{B})$, et qui nous donnera la possibilité d'énoncer une caractérisation métrique des espaces de Hilbert (Théorème 7).

DÉFINITION 3. Soit $\mathcal{B}$ une espace de Banach. On définit le *biais* de l'espace $\mathcal{B}$, que l'on dénote $\beta(\mathcal{B})$, par la formule

$$\beta(\mathcal{B}) = \sup\{\gamma \in \mathbb{R} \mid x + \gamma y \perp_{BJ} y; 0 < \|x\| \leq \|y\|; x, y \in \mathcal{B}\}.$$

La constante rectangle de Joly n'est pas l'unique mesure du degré de symétrie de la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James ou du degré de convexité d'un espace de Banach. Mentionnons à cet effet le "module de convexité" de Clarkson [**7**] et le "skewness" de Fitzpatrick et Reznick [**12**] qui peuvent servir à de telles fins. Nous nous proposons dans un article ultérieur d'étudier les relations mathématiques unissant ces différentes mesures.

3. Rappels. Nous aurons besoin, au cours des démonstrations qui suivront, de la définition et des résultats suivants:

DÉFINITION 4. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Nous dirons que $\mathcal{B}$ est *strictement convexe*[3] si pour tout couple de vecteurs non colinéaires $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ on a que

$$\|x + y\| < \|x\| + \|y\|.$$

LEMME 1. *(James [**16**], Corollaire 2.2 et Théorème 2.3) Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Alors pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ on a que i) $x \perp_{BJ} y \Longrightarrow \alpha x \perp_{BJ} \beta y$, $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, ii) il existe au moins un couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x + \alpha y \perp_{BJ} y$ et $x \perp_{BJ} \beta x + y$.*

LEMME 2. *(James [**17**], Théorème 1) Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach avec $\dim(\mathcal{B}) \geq 3$. Pour que la norme sur $\mathcal{B}$ soit issue d'un produit scalaire il faut et il suffit que la relation d'orthogonalité de $Birkhoff - James$ soit symétrique.*

LEMME 3. *(James [**16**], Théorème 2.3) Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $(x, y) \in \mathcal{B}^2$. Définissons $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0, \infty[$ par la formule*

$$\varphi(\lambda) = \|x + \lambda y\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

[1] Joly n'a vérifié cette assertion que dans le cas où $\dim(\mathcal{B}) \geq 3$ ([**18**], proposition, page 307).

[2] Tout comme la constante rectangle, cette mesure du degré de symétrie peut être définie dans tout espace vectoriel normé. La complétion de l'espace en question n'est pas requise.

[3] Géométriquement, la convexité stricte signifie qu'aucun segment de droite "non dégénéré" n'est inclus dans la sphère unité.

Alors φ est continue et convexe sur tout $\mathbb{R}$. De plus pour que $\gamma \in \mathbb{R}$ soit un minimum absolu de la fonction φ il faut et il suffit que $x + \gamma y \perp_{BJ} y$.

LEMME 4. *(DeFigueiredo et Karlovitz [**9**], Proposition 3). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Pour que la relation d'orthogonalité de $Birkhoff - James$ soit symétrique (c'est-à-dire que $x \perp_{BJ} y \Longrightarrow y \perp_{BJ} x$, $\forall(x,y) \in \mathcal{B}^2$) il faut et il suffit que pour tout couple de vecteurs non nuls (x,y) et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ les relations $\|x\| = \|y\|$ et $\|x - \lambda_0 y\| \leq \|x - \lambda y\|$ entraînent que $|\lambda_0| \leq 1$.*[4]

4. Quelques propriétés du biais d'un espace de Banach.

THÉORÈME 1. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Alors*

$$1 \leq \beta(\mathcal{B}) \leq 2.$$

DÉMONSTRATION: Le lemme 1.*ii* affirme que $\{\gamma \in \mathbb{R} \mid x + \gamma y \perp_{BJ} y; 0 < \|x\| \leq \|y\|\} \neq \emptyset$. Montrons que $\beta(\mathcal{B}) \geq 1$. Soit $x \in \mathcal{B}$ avec $x \neq \mathcal{O}$. Posons $y = -x$. Alors $\|x\| \leq \|y\|$. Si $\gamma = 1$ alors $\mathcal{O} = x + \gamma y$. Or $\mathcal{O} \perp_{BJ} y$. Par conséquent, $\beta(\mathcal{B}) \geq 1$. Montrons maintenant que $\beta(\mathcal{B}) \leq 2$. Pour ce, soit $0 < \|x\| \leq \|y\|$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ avec $x + \gamma y \perp_{BJ} y$. Par définition,

$$\|x + \gamma y + \lambda y\| \geq \|x + \gamma y\|$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\lambda = -\gamma$. Alors $\|x\| \geq \|x + \gamma y\|$. Ainsi $\|x\| \geq \|x + \gamma y\| \geq |\gamma| \cdot \|y\| - \|x\|$, c'est-à-dire que $2\|x\| \geq |\gamma| \cdot \|y\|$ ou encore que

$$|\gamma| \leq \frac{2\|x\|}{\|y\|} \leq 2$$

car $\|x\| \leq \|y\|$. Ainsi $\beta(\mathcal{B}) \leq 2$. □

THÉORÈME 2. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Alors*

$$\beta(\mathcal{B}) = \sup\{\gamma \in \mathbb{R} \mid x + \gamma y \perp_{BJ} y; 0 < \|x\| = \|y\|; x, y \in \mathcal{B}\}.$$

DÉMONSTRATION: Posons

$$B_1 = \{\gamma \in \mathbb{R} \mid x + \gamma y \perp_{BJ} y; 0 < \|x\| \leq \|y\|\}$$

et

$$B_2 = \{\gamma \in \mathbb{R} \mid x + \gamma y \perp_{BJ} y; 0 < \|x\| = \|y\|\}.$$

Puisque $B_2 \subset B_1$ alors $\sup(B_2) \leq \sup(B_1)$. Montrons que l'inégalité inverse est vraie. Soit donc $x, y \in \mathcal{B}$ avec $0 < \|x\| \leq \|y\|$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $x + \gamma y \perp_{BJ} y$. Par définition $\|x + \gamma y + \lambda y\| \geq \|x + \gamma y\|$, et ce pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\lambda = -\gamma$. Alors $\|x\| \geq \|x + \gamma y\|$. Comme $\|y\| \geq \|x\|$ on a alors que $\|y\| \geq \|x + \gamma y\|$. La convexité de la sphère $\mathcal{S}(\mathcal{O}; \|y\|)$ dans $\mathcal{B}$ entraîne que le segment de droite $[x, x + \gamma y]$ est inclus dans $B(\mathcal{O}; \|y\|)$. La demi-droite issue du point $x + \gamma y$ et passant par le point x doit donc rencontrer $\mathcal{S}(\mathcal{O}; \|y\|)$ en un point $z = x + \xi y$ avec $\xi \leq 0$. Or $x + \gamma y = x + \xi y + (\gamma - \xi) y = z + (\gamma - \xi) y$. Puisque, par hypothèse, $x + \gamma y \perp_{BJ} y$ alors $z + (\gamma - \xi) y \perp_{BJ} y$. Mais $\|z\| = \|y\|$ et $\gamma - \xi \geq \gamma$. Pour tout couple

[4] Baptisée propriété $\mathcal{P}$ par DeFigueiredo et Karlovitz.

$(x,y) \in \mathcal{B}^2$ avec $\|x\| \leq \|y\|$ et pour tout nombre $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $x + \gamma y \perp_{BJ} y$ on a alors trouvé un couple de vecteurs $(x', y') \in \mathcal{B}^2$ avec $\|x'\| = \|y'\|$ et un nombre $\gamma' \in \mathbb{R}$ tels que

$$i) \;\; x' + \gamma' y' \perp_{BJ} y';$$
$$ii) \;\; \gamma' \geq \gamma.$$

Donc $\sup(B_1) \leq \sup(B_2)$ et en conclusion,

$$\beta(\mathcal{B}) = \sup(B_1) = \sup(B_2). \quad \square$$

Soit $k > 0$. Il est facile d'établir (lemme 1.i) que

$$x + \gamma y \perp_{BJ} y \iff kx + \gamma ky \perp_{BJ} ky.$$

En combinant cette relation avec le théorème précédent, on obtient le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Alors*

$$\beta(\mathcal{B}) = \sup\{\gamma \in \mathbb{R} \mid x + \gamma y \perp_{BJ} y; x, y \in \mathcal{S}\}.$$

LEMME 5. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $x, y \in \mathcal{S}$ avec $[x,y] \subset \mathcal{S}$. Alors*

$$\beta(\mathcal{B}) \geq \|x - y\|.$$

DÉMONSTRATION: Posons $p = \|x - y\|$. Si $p = 0$ il n'y a rien à montrer. Soit donc $p > 0$ et $\lambda \in [0,1]$. Posons

$$\begin{aligned} \omega_\lambda &= \lambda x + (1-\lambda) y \\ &= x - (1-\lambda)x + (1-\lambda)y \\ &= x + (1-\lambda)(y - x) \\ &= x + p(1-\lambda)\frac{y - x}{\|x - y\|}. \end{aligned}$$

Posons $z = \frac{y-x}{\|x-y\|}$. Alors $\|z\| = 1 = \|x\|$. Montrons que $\omega_\lambda \perp_{BJ} z$, et ce pour tout $\lambda \in [0,1]$. On a que $\|x + p(1-\lambda)z + kz\| = \|x + (p(1-\lambda) + k)z\| \geq 1$, $\forall k \in \mathbb{R}$, car la droite

$$\Delta = \{\lambda x + (1-\lambda) y \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

est une droite de "support" de la sphère $\mathcal{S}$ aux points x et y. Donc $\|x + p(1-\lambda)z + kz\| \geq 1 = \|x + p(1-\lambda)z\|$, $\forall k \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $x + p(1-\lambda)z \perp_{BJ} z$, $\forall \lambda \in [0,1]$. Posons maintenant $\lambda = 0$. Dans ce cas, $x + \|x - y\| z \perp_{BJ} z$. En conclusion, $\beta(\mathcal{B}) \geq \|x - y\|$. $\square$

Cette borne inférieure grossière peut être combinée avec le résultat suivant pour caractériser les espaces de Banach dont le biais est égal à 2.

COROLLAIRE 2. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach avec* $\dim(\mathcal{B}) = 2$. *Pour que $\beta(\mathcal{B}) = 2$ il faut et il suffit que le cercle unité $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ soit un parallélogramme.*

DÉMONSTRATION:

$\boxed{\Longleftarrow}$ Conséquence directe du lemme 5.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\beta(\mathcal{B}) = 2$. On peut alors trouver un couple de vecteurs $(x,y) \in \mathcal{S}^2$ tel que $x + 2y \perp_{BJ} y$. Donc $\|x + \lambda y\| \geq \|x + 2y\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\lambda = 0$. Alors $\|x + 2y\| \leq \|x\| = 1$. Mais $2 = 2\|y\| = \|2y\| = \|x + 2y - x\| \leq \|x + 2y\| + \|x\| = \|x + 2y\| + 1$. Donc $\|x + 2y\| \geq 1$, c'est-à-dire que $\|x + 2y\| = 1$. Soit maintenant $\lambda \in [0,2]$. Alors $\|x + \lambda y\| \geq 1 = \|x + 2y\|$, $\forall \lambda \in [0,2]$, car $x + 2y \perp_{BJ} y$. D'un autre côté, le cercle unité étant convexe, $\|x + \lambda y\| \leq 1$, $\forall \lambda \in [0,2]$. Le segment de droite $[x, x + 2y]$ est par conséquent une arête du cercle unité $\mathcal{C}$ (en effet, $\|(x + 2y) - x\| = \|2y\| = 2\|y\| = 2$). Puisque $\|(x + 2y) - x\| = 2$ le cercle unité contient aussi le segment $[x, -(x + 2y)]$. C'est donc un parallélogramme. $\square$

EXEMPLE 1.

- Les espaces suivants sont des exemples d'espace de Banach ayant un biais égal à 2.

1) L'espace m des suites réelles bornées.
2) L'espace C des suites réelles convergentes.
3) L'espace l^1 des suites réelles sommables.
4) L'espace $C(X)$ des applications continues de X dans $\mathbb{R}$.

Il existe aussi des espaces de Banach dont le biais est minimal, c'est-à-dire tels que $\beta(\mathcal{B}) = 1$. Ce sont les espaces pour lesquels la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James est symétrique. Tout autre espace a un biais supérieur à 1. En voici la démonstration.

THÉORÈME 3. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Pour que la relation d'orthogonalité de $Birkhoff-James$ définie dans cet espace soit symétrique il faut et il suffit que $\beta(\mathcal{B}) = 1$.*

DÉMONSTRATION:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ avec $0 < \|x\| \leq \|y\|$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $x + \gamma y \perp_{BJ} y$.[5] Par hypothèse, $y \perp_{BJ} x + \gamma y$ et donc, par définition, $\|y + \lambda(x + \gamma y)\| \geq \|y\|, \forall\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $\lambda = -\frac{1}{\gamma}$. Alors $\frac{1}{|\gamma|}\|x\| \geq \|y\|$ c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} |\gamma| &\leq \frac{\|x\|}{\|y\|} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

car $\|x\| \leq \|y\|$. En conclusion, $\beta(\mathcal{B}) = 1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\beta(\mathcal{B}) = 1$. Soit $x, y \in \mathcal{B}$ avec $\|x\| = \|y\|$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ avec $\|x - \gamma y\| \leq \|x - \lambda y\|$.[5] Donc γ est un minimum absolu de la fonction $\lambda \longmapsto \|x + \lambda y\|, \lambda \in \mathbb{R}$. Par le lemme 3, $x + \gamma y \perp_{BJ} y$. Mais $|\gamma| \leq \beta(\mathcal{B}) = 1$. Il suffit maintenant d'appliquer le lemme 4. $\square$

EXEMPLE 2.

1) Un espace de Hilbert a un biais égal à 1. En effet, dans de tels espaces, la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James se réduit à la relation d'orthogonalité bien connue $x \perp_{BJ} y \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$. Elle est donc symétrique.
2) Soit $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^2$ et $r, s \geq 1$ deux nombres réels conjugués, c'est-à-dire tels que $r^{-1} + s^{-1} = 1$. Définissons une norme sur $\mathcal{B}_r$ par la formule

$$\|(x, y)\|_r = \begin{cases} (|x|^r + |y|^r)^{1/r} & \text{si } \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y), \\ (|x|^s + |y|^s)^{1/s} & \text{si } \operatorname{sgn}(x) \neq \operatorname{sgn}(y). \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que, pour $r \geq 1$, l'orthogonalité de Birkhoff-James est symétrique dans $\mathcal{B}_r$ [**8**], Corollaires 6.2 et 6.3). Donc, par le théorème 3, $\beta(\mathcal{B}_r) = 1$. Par contre, pour $r = 1$, l'orthogonalité n'a pas la propriété d'unicité. $\mathcal{B}_1$ n'est donc pas hilbertien.

[5] L'existence d'un tel nombre γ est assuré par le lemme 1.*ii*.

5. Une propriété supplémentaire.

DÉFINITION 5. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Nous dirons que $\mathcal{B}$ *a la propriété* $\mathcal{P}'$ si pour tout scalaire $\gamma > 1$ et pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in \mathcal{B}^2$, l'implication suivante est vraie,

$$\|x\| \leq \|y\| \Longrightarrow \|x + y\| \leq \|x + \gamma y\|.$$

THÉORÈME 4. *Tout espace de Banach dont le biais est égal à 1 possède la propriété* $\mathcal{P}'$.

DÉMONSTRATION: On peut supposer que $x \neq \mathcal{O}$ car autrement la relation est trivialement vérifiée. Soit donc $\mathcal{B}$ un espace de Banach tel que $\beta(\mathcal{B}) = 1$ et x, y deux vecteurs de $\mathcal{B}$ avec $0 < \|x\| \leq \|y\|$. Définissons une fonction numérique $\varphi\colon \mathbf{R} \to [0, \infty[$ par la formule

$$\varphi(\lambda) = \|x + \lambda y\|$$

et ce pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. La fonction φ est *i*) continue, *ii*) convexe et *iii*) $\varphi(\lambda) \to \infty$ lorsque $\lambda \to \pm\infty$. Elle atteint donc son minimum absolu sur un intervalle $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$. Soit $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Alors $x + \gamma y \perp_{BJ} y$ par le lemme 3. Or $|\gamma| \leq \beta(\mathcal{B}) = 1$. La convexité de la fonction φ fait donc en sorte que $\|x + \lambda y\| > \|x + y\|$ dès que $\lambda > 1$. □

LEMME 6. *Soit* $\mathcal{B}$ *un espace de Banach. Si* $\mathcal{B}$ *a la propriété* $\mathcal{P}'$ *et que* $\beta(\mathcal{B}) > 1$ *alors* $\mathcal{B}$ *n'est pas strictement convexe.*

DÉMONSTRATION: Posons $p = \beta(\mathcal{B}) > 1$. On peut alors trouver deux vecteurs $x, y \in \mathcal{B}$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$ (corollaire 1) tels que $x + py \perp_{BJ} y$. Donc

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x + py\| \tag{*}$$

et ce pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. Puisque $p > 1$ alors, par hypothèse, $\|x + py\| \geq \|x + y\| > 0$. Alors $\|x + y\| = \|x + py\|$. En conséquence, $\|x + \lambda y\| = \|x + py\|, \forall\lambda \in [1, p]$. En effet, la convexité de la norme entraîne que $\|x + \lambda y\| \leq \|x + py\|, \forall\lambda \in [1, p]$. L'inégalité inverse provient de la relation $(*)$. Par conséquent, la sphère $\mathcal{S}(\mathcal{O}; \|x + py\|)$ contient un segment de droite. $\mathcal{B}$ n'est donc pas strictement convexe. □

COROLLAIRE 2. *Le fait qu'un espace de Banach strictement convexe ait un biais égal à 1 est équivalent au fait qu'il possède la propriété* $\mathcal{P}'$.

EXEMPLE 3.

- L'inverse du lemme 6 est faux. En effet l'ensemble $\mathcal{B} = \mathbf{R}^2$ muni de la norme

$$\|(x, y)\| = \begin{cases} |x| + |y| & \text{si } \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y), \\ \max\{|x|, |y|\} & \text{si } \operatorname{sgn}(x) \neq \operatorname{sgn}(y), \end{cases}$$

  est un espace de Banach *i*) non strictement convexe, *ii)* dont le biais est égal à 1 (exemple 2.2) et *iii*) possédant la propriété $\mathcal{P}'$ (théorème 4).

6. Première application: caractérisation des espaces hilbertiens. Donnons auparavent la définition suivante.

DÉFINITION 6. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach, $0 < \epsilon \leq 1$, $x \in \mathcal{S}$ et $z \in \mathcal{S}(\mathcal{O}; \epsilon)$. Parcourons le segment $[x, z]$ dans le sens de x à z et notons par y le premier point de contact entre le segment $[x, z]$ et la sphère $\mathcal{S}(\mathcal{O}; \epsilon)$.[6] Nous dirons alors que $\mathcal{B}$ *possède la propriété* $\mathcal{P}''$ si, quel que soit le choix du rayon ϵ et des vecteurs x et z, l'inégalité

$$\|x - y\| \leq 1$$

est toujours vérifiée.[7]

Comme dans le cas des espaces de biais égal à 1, les espaces pour lesquels la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James est symétrique possèdent aussi la propriété $\mathcal{P}''$.

THÉORÈME 5. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Si, dans cet espace, la relation d'orthogonalité de $Birkhoff - James$ est symétrique alors celui-ci espace possède la propriété $\mathcal{P}''$.*

DÉMONSTRATION: On peut, sans perte de généralité, supposer que $\dim(\mathcal{B}) = 2$. Plaçons-nous dans les conditions de la définition 6 et, partant du point x, déplaçons-nous le long du segment $[x, z]$ dans la direction du point z. Traversons entièrement le cercle $\mathcal{C} = \mathcal{S}(\mathcal{O}; \epsilon)$. La droite

$$\Delta = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$$

que nous sommes en train de décrire est une droite de "support"en un certain point ω d'un cercle contenu entièrement dans le cercle $\mathcal{C}$.[8] Il se peut que $\omega = \mathcal{O}$. Dans tous les cas, le point y est un point du segment $[x, \omega]$. Donc $y = \lambda x + (1 - \lambda)\omega$ pour un certain $\lambda \in [0, 1]$. Par conséquent, $\|x - y\| = (1 - \lambda)\|x - \omega\| \leq \|x - \omega\|$. Mais $\omega \perp_{BJ} x - \omega$. Par hypothèse de symétrie, $x - \omega \perp_{BJ} \omega$ ou encore $\|x - \omega + \lambda\omega\| \geq \|x - \omega\|$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$. Posons $\lambda = 1$. Alors $\|x - \omega\| \leq \|x\| = 1$. En définitive, $\|x - y\| \leq \|x - \omega\| \leq 1$. L'espace $\mathcal{B}$ possède bien la propriété $\mathcal{P}''$. $\square$

LEMME 7. *Soit x, y deux vecteurs d'un espace de Banach $\mathcal{B}$ et $\gamma > 1$. Posons $X = x + \gamma y$ et $Y = x + y$. Alors*

$$\|x\| \leq \|y\| \Longrightarrow \|x + y\| \leq \|x + \gamma y\|$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\|X - \gamma Y\| \leq \|X - Y\| \Longrightarrow \|Y\| \leq \|X\|.$$

DÉMONSTRATION: Il suffit d'effectuer les transformations indiquées. $\square$

Voici le théorème qui est à la base du résultat principal de cet article.

THÉORÈME 6. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach strictement convexe. Pour que l'espace $\mathcal{B}$ puisse posséder la propriété $\mathcal{P}'$ il suffit qu'il possède aussi la propriété $\mathcal{P}''$.*

DÉMONSTRATION: Soit $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ et $\gamma > 1$. Appliquons les transformations du lemme 7 et notons à nouveau les vecteurs X et Y par, respectivement, x et y. Nous devons alors démontrer que $\|x - \gamma y\| \leq \|x - y\| \Longrightarrow \|y\| \leq \|x\|$. Nous pouvons supposer d'emblée que $x \neq \mathcal{O}$ et $y \neq \mathcal{O}$ car, dans le cas contraire, la relation à vérifier est trivialement vraie. Nous sommes donc dans le cas où $x \neq \mathcal{O}$ et $y \neq \mathcal{O}$. Supposons que $\|y\| > \|x\|$. Posons

$$\Delta = \{x + \gamma y \mid \gamma \geq 1\}.$$

[6] Nous n'écartons pas le fait que le point y puisse coïncider avec le point z. De plus, nous supposons que $x \neq z$ car, dans le cas contraire, la relation serait trivialement vraie.

[7] Géométriquement, la propriété $\mathcal{P}''$ signifie que, pour un observateur placé en un point x de la sphère unité $\mathcal{S}$, tous les points visibles de la sphère $\mathcal{S}(\mathcal{O}; \epsilon)$ $(0 < \epsilon \leq 1)$ appartiennent à la boule $\mathcal{B}(x; 1)$.

[8] En effet, la fonction $\|\cdot\|$, continue et convexe sur l'ensemble convexe Δ, atteint son minimum absolu en au moins un point ω de cet ensemble. Elle est dons une droite de "support" de ce cercle au point ω. En d'autres termes $\omega \perp_{BJ} \Delta$, et ce même dans le cas où $\omega = \mathcal{O}$.

La fonction $\varphi\colon [1,\infty[\to [0,\infty[$ définie par

$$\varphi(\gamma) = \|x - \gamma y\|,$$

et ce pour tout $\gamma \geq 1$, est *i*) définie sur un intervalle fermé de $\mathbf{R}$ ($[1,\infty[$), *ii*) continue et convexe sur tout cet intervalle et *iii*) $\varphi(\gamma) \to \infty$ lorsque $\gamma \to \infty$. Elle atteint donc son minimum absolu en un point γ' du fermé $[1,\infty[$. Par convexité stricte de l'espace $\mathcal{B}$, ce point de norme minimale est unique. Montrons que sous l'hypothèse $\|y\| > \|x\|$, ce point n'est autre que le point $x - y$. Posons

$$\Delta' = \{(1-\lambda)x + \lambda(x-y) \mid \lambda \geq 0\} \subset \Delta.$$

Evidemment Δ' est la demi-droite issue du point x et passant par le point $x-y$ (qui est différent de x car $y \neq \mathcal{O}$). Posons de plus

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}(\mathcal{O}; \|x-y\|), \quad \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(\mathcal{O}; \|x-y\|).$$

Puisque $x - y \in \mathcal{S}_1$ alors $\#(\Delta' \cap \mathcal{S}_1) \geq 1$. Mais, par convexité stricte, $\#(\Delta' \cap \mathcal{S}_1) \leq 2$. Examinons chaque possibilité.

Premier cas: $\#(\Delta' \cap \mathcal{S}_1) = 1$. Alors $\{(1-\lambda)x + \lambda(x-y) \mid \lambda > 1\} \subset \{z \in \mathcal{B} \mid \|z\| \geq \|x-y\|\} \Longrightarrow \|(1-\gamma)x + \gamma(x-y)\| = \|x - \gamma y\| \geq \|x-y\|, \forall\gamma > 1$. Par minimalité, $\|x - \gamma y\| > \|x-y\|, \forall\gamma > 1$.

Second cas: $\#(\Delta' \cap \mathcal{S}_1) = 2$. Le cas $\|x\| < \|x-y\|$ est à rejeter sinon $\#(\Delta' \cap \mathcal{S}_1) = 1$. On peut donc supposer que $\|x-y\| \leq \|x\|$. Ainsi $\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|y-x\| + \|x\| \leq 2\|x\|$. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= \mathcal{S}(x; \|y\|), \quad \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(x; \|y\|) \\ \mathcal{S}_3 &= \mathcal{S}(\mathcal{O}; \|x\|), \quad \mathcal{B}_3 = \mathcal{B}(\mathcal{O}; \|x\|) \end{aligned}$$

et

$$\Lambda = \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3.$$

Trivialement $x \in \Lambda$. Aussi $x - y \in \Lambda$ car $\|x-y\| \leq \|x\|$. Par convexité, le segment de droite fermé $[x, x-y]$ est complètement inclus dans l'ensemble Λ. Comme $x - y \in \mathcal{S}_2$ on a que $(1-\lambda)x + \lambda(x-y) \notin \Lambda$ dès que $\lambda > 1$. Notons par ω l'autre point (différent de $x-y$) de $\Delta' \cap \mathcal{S}_1$. Alors $\omega = (1-\lambda)x + \lambda(x-y)$ pour un certain $\lambda \geq 0$, et $\|\omega\| = \|x-y\| \leq \|x\|$. Supposons que $x - y \in [x, \omega]$. Alors

$$\begin{aligned} \|y\| &= \|(x-y) - x\| \\ &\leq \|x\| \end{aligned}$$

car l'espace $\mathcal{B}$ possède par hypothèse la propriété $\mathcal{P}''$.[9] Ce qui est impossible car $\|x\| < \|y\|$. Donc $\omega \in [x, x-y] \Longrightarrow \omega \in \mathcal{B}_2 \cap \mathcal{B}_3 = \Lambda \Longrightarrow \lambda < 1$ (car ω est différent de $x-y$). Ainsi $\{(1-\lambda)x + \lambda(x-y) \mid \lambda > 1\} \subset \{z \in \mathcal{B} \mid \|z\| \geq \|x-y\|\} \Longrightarrow \|(1-\gamma)x + \gamma(x-y)\| = \|x - \gamma y\| \geq \|x-y\|, \forall\gamma > 1$. Par minimalité, $\|x-\gamma y\| > \|x-y\|$, $\forall\gamma > 1$. En conclusion,

$$\|x - \gamma y\| \leq \|x-y\| \Longrightarrow \|y\| \leq \|x\|.$$

C'est ce que nous voulions montrer. □

[9] On peut évidemment se ramener aux conditions strictes de la définition 6 en normalisant tous les vecteurs considérés, c'est-à-dire en divisant chaque vecteur par $\|x\|$.

THÉORÈME 7. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach strictement convexe*[10]. *Les conditions suivantes sont alors équivalentes:*

1) *La relation d'orthogonalité de $Birkhoff - James$ définie sur $\mathcal{B}$ est symétrique.*
2) $\beta(\mathcal{B}) = 1$.
3) *$\mathcal{B}$ possède la propriété $\mathcal{P}'$.*
4) *$\mathcal{B}$ possède la propriété $\mathcal{P}''$.*

DÉMONSTRATION: $1 \Longrightarrow 4$: Théorème 5. $4 \Longrightarrow 3$: Théorème 6. $3 \Longrightarrow 2$: Corollaire 2. $2 \Longrightarrow 1$: Théorème 3. □

COROLLAIRE 3. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach strictement convexe*[11] avec $\dim(\mathcal{B}) \geq 3$. *Les conditions suivantes sont alors équivalentes:*

1) *La norme sur $\mathcal{B}$ est issue d'un produit scalaire.*
2) *La relation d'orthogonalité de $Birkhoff - James$ définie sur $\mathcal{B}$ est symétrique.*
3) $\beta(\mathcal{B}) = 1$.
4) *$\mathcal{B}$ possède la propriété $\mathcal{P}'$.*
5) *$\mathcal{B}$ possède la propriété $\mathcal{P}''$.*

DÉMONSTRATION: Conséquence immédiate du théorème 7 et du lemme 2. □

EXEMPLE 4.

- L'exemple 2.2 montre que la condition $\dim(\mathcal{B}) \geq 3$ est nécessaire pour que la conclusion du corollaire 3 soit vraie. En effet si $r > 1$ ($r \neq 2$) alors $\mathcal{B}_r$ est un espace strictement convexe de biais égal à 1. Le théorème 7 s'applique donc dans ce cas. En conséquence, les conditions 2,3,4 et 5 du corollaire 3 sont équivalentes. Evidemment $\mathcal{B}_r$ n'est pas un espace de Hilbert. Sa norme ne peut donc être issue d'un produit scalaire.

7. Deuxième application: géométrie de l'ensemble des vecteurs propres des applications pseudo-contractantes.

DÉFINITION 7. Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach, $X \subset \mathcal{B}$ et $T: X \to \mathcal{B}$ une application. Nous dirons que T est *contractante* si $\forall (x,y) \in X^2$ on a que

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$$

et *pseudo-contractante* si $\forall (x,y) \in X^2$ et $\forall r > 0$ on a que

$$\|x - y\| \leq \|(1+r)(x-y) - r(T(x) - T(y))\|.$$

Il est facile de voir que la définition des applications pseudo-contractantes est plus générale que celle des applications de type contractant. Elles tirent leur importance du lien qui les unit aux opérateurs *accrétifs*. Plus spécifiquement

LEMME 8. *(Kato [**19**], page 508) Une application $T: X \to \mathcal{B}$ est pseudo-contractante si et seulement si l'opérateur $I - T$ est accrétif, c'est-à-dire si pour tout couple de vecteurs $(x,y) \in X^2$ il existe une transformation linéaire $j \in J(x-y)$*[12] *telle que*

$$\langle T(x) - T(y), j \rangle \leq \|x - y\|^2.$$

[10] La condition de convexité stricte n'est pas nécessaire pour montrer que $1 \Longleftrightarrow 2$.

[11] La condition de convexité stricte n'est pas nécessaire pour montrer que $1 \Longleftrightarrow 2 \Longleftrightarrow 3$.

[12] L'*application de dualité normalisée* $J: \mathcal{B} \to 2^{\mathcal{B}^*}$ est l'application multivoque définie par la formule

$$J(x) = \{j \in \mathcal{B}^* \mid \langle x, j \rangle = \|x\|^2 = \|j\|^2\}$$

et ce pour tout $x \in \mathcal{B}$. Ici $\mathcal{B}^*$ dénote l'espace dual topologique de $\mathcal{B}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire canonique. Nous renvoyons le lecteur à la référence [**15**] (pp. 245–275) pour plus de détails.

La solution des équations différentielles non linéaires est la raison d'être des opérateurs accrétifs [**3, 4, 5, 6, 19, 20**].

EXEMPLE 5.

- Soit $T: X \to \mathcal{B}$ une application continue et pseudo-contractante. Supposons que X soit un sous-ensemble convexe, fermé et borné de $\mathcal{B}$. Soit $\gamma > 1$ et (α, β) un couple de nombres réels tels que *i)* $0 < \alpha, \beta < 1$, *ii)* $\alpha + \beta < 1$ et *iii)* $\gamma = (1-\beta)/\alpha$. Définissons une application $S: X \to \mathcal{B}$ par la formule

$$S(x) = \beta x + \alpha T(x), \quad \forall x \in X.$$

Soit $(x, y) \in X^2$ et $j \in J(x-y)$ tel que

$$\langle T(x) - T(y), j \rangle \leq \|x - y\|^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}(x) - \mathcal{S}(y), j \rangle &= \langle \beta(x-y) + \alpha(T(x) - T(y)), j \rangle \\ &= \beta\langle x - y, j \rangle + \alpha\langle T(x) - T(y), j \rangle \\ &\leq \beta\|x-y\|^2 + \alpha\|x-y\|^2 \\ &= (\alpha + \beta)\|x-y\|^2. \end{aligned}$$

Par [**10**] (Corollaire 2) S possède un unique point fixe ω. Donc

$$T(\omega) = \left(\frac{1-\beta}{\alpha}\right)\omega = \gamma\omega.$$

Par conséquent, $T_\gamma \neq \emptyset, \forall \gamma > 1$.

THÉORÈME 8. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach strictement convexe de biais égal à 1 et $T: X \to \mathcal{B}$ une application pseudo-contractante telle que $T_\gamma \neq \emptyset$ pour tout $\gamma \in]1, \tau] \subset \mathbb{R}$ avec $\tau > 1$. Il existe alors une application $\Phi:]1, \tau] \to X$ définie par*

$$\Phi(\gamma) = \omega_\gamma \Longleftrightarrow \omega_\gamma \in T_\gamma, \quad \forall \gamma \in]1, \tau]$$

ayant les propriétés suivantes:

1) Φ *est continue sur tout* $]1, \tau]$.
2) $\gamma \leq \mu \Longrightarrow \|\Phi(\mu)\| \leq \|\Phi(\gamma)\|$.
3) $\sup\{\|\Phi(\gamma)\| \mid \gamma \in]1, \tau]\} \leq \inf\{\|x\| \mid x \in F(T)\}$.[13]
4) $\mathcal{O} \in X$ *et* $\gamma \to \infty \Longrightarrow \Phi(\gamma) \to \mathcal{O}$.
5) La fonction $h:]1, \tau] \to [0, \infty[$ *définie par*

$$h(\gamma) = \|\Phi(\gamma) - T(\Phi(\gamma))\|, \quad \forall \gamma \in]1, \tau]$$

[13] Morales [**21**] (page 753) a estimé que

$$\sup\{\|\Phi(\gamma)\| \mid \gamma \in]1, \tau]\} \leq 2 \cdot \inf\{\|x\| \mid x \in F(T)\}.$$

Notre estimation est donc meilleure, bien qu'elle ne soit valable que pour les espaces dont le biais est égal à 1.

est non décroissante.

DÉMONSTRATION: Faisons auparavant deux remarques:

- En combinant la définition 5 avec le lemme 7 et en remplacant le terme y par y/γ on peut facilement obtenir la définition équivalente suivante: *$\mathcal{B}$ possède la propriété $\mathcal{P}'$ si et seulement si pour tout $0 < \lambda < 1$ et tout couple de vecteurs $(x, y) \in \mathcal{B}^2$ on a que*

$$\|x - y\| \leq \|x - \lambda y\| \Longrightarrow \|\lambda y\| \leq \|x\|.$$

- La fonction Φ est bien définie. En effet si $\omega_1, \omega_2 \in T_\gamma$ alors

$$\begin{aligned} \gamma\|\omega_1 - \omega_2\|^2 &= \gamma\langle \omega_1 - \omega_2, j\rangle \\ &= \langle \gamma\omega_1 - \gamma\omega_2, j\rangle \\ &= \langle T(\omega_1) - T(\omega_2), j\rangle \\ &\leq \|\omega_1 - \omega_2\|^2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \omega_1 = \omega_2$ car $\gamma > 1$. Donc $\#(T_\gamma) = 1$, $\forall \gamma \in]1, \tau]$ et Φ est bien définie.

1) La continuité de la fonction Φ sur l'intervalle $]1, \tau]$ découle de l'inégalité suivante, valide pour tout couple $(\gamma, \mu) \in]1, \tau]^2$:

$$\|\Phi(\gamma) - \Phi(\mu)\| \leq \|\omega_\mu\| \left(\frac{|\gamma - \mu|}{\gamma - 1}\right).$$

2) Soit $\gamma, \mu \in]1, \tau]$ avec $\gamma \leq \mu$. Choisissons $r > 0$ assez petit pour que l'inégalité

$$1 > 1 - r(\gamma - 1) \geq 1 - r(\mu - 1) > 0$$

soit vraie et posons

$$\alpha = \frac{1 - r(\mu - 1)}{1 - r(\gamma - 1)} \in]0, 1[.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|\omega_\gamma - \omega_\mu\| &\leq \|(1 + r)(\omega_\gamma - \omega_\mu) - r(T(\omega_\gamma) - T(\omega_\mu))\| \\ &= \|(1 - r(\gamma - 1))\omega_\gamma - (1 - r(\mu - 1))\omega_\mu\| \\ &= (1 - r(\gamma - 1))\|\omega_\gamma - \alpha\omega_\mu\| \\ &\leq \|\omega_\gamma - \alpha\omega_\mu\|. \end{aligned}$$

Par hypothèse $\beta(\mathcal{B}) = 1$. Appliquant la remarque précédente et le théorème 7 on obtient que

$$\|\alpha\omega_\mu\| \leq \|\omega_\gamma\|$$

et donc que

$$\|(1 - r(\mu - 1))\omega_\mu\| \leq \|(1 - r(\gamma - 1))\omega_\gamma\|.$$

En faisant tendre r vers zéro on obtient que $\|\Phi(\mu)\| = \|\omega_\mu\| \leq \|\omega_\gamma\| = \|\Phi(\gamma)\|$.

3) Si $F(T) = \emptyset$ il n'y a rien à montrer. Supposons alors que $x \in F(T)$. Prenons $\gamma \in]1, \tau]$ et $r > 0$ tels que

$$1 > 1 - r(\gamma - 1) > 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}\|x-\omega_\gamma\| &\leq \|(1+r)(x-\omega_\gamma)-r(T(x)-T(\omega_\gamma))\|\\ &= \|x-(1-r(\gamma-1))\omega_\gamma\|.\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\|(1-r(\gamma-1))\omega_\gamma\| \leq \|x\|$$

car $\beta(\mathcal{B}) = 1$. En faisant tendre r vers zéro on obtient que $\|\omega_\gamma\| \leq \|x\| \Longrightarrow \sup\{\|\Phi(\gamma)\| \mid \gamma \in]1,\tau]\} \leq \inf\{\|x\| \mid x \in F(T)\}$.

4) Cette assertion provient de l'inégalité

$$\|\Phi(\gamma)\| \leq \frac{\|T(\mathcal{O})\|}{\gamma-1}.$$

5) Voir la démonstration du lemme 2.*ii* de [**22**]. □

PROPOSITION. *(Morales [**23**], Corollaire 2.3) Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach strictement convexe, X un convexe fermé de $\mathcal{B}$ et $T: X \to X$ une application continue et pseudo-contractante. Alors $F(T)$ est un convexe fermé de $\mathcal{B}$.*

Géométriquement, nous pouvons donc dire que l'ensemble des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\gamma > 1$ d'une application continue et pseudo-contractante T forme une courbe de Jordan dans l'ensemble $X \subset \mathcal{B}$[14] originant, si X est un convexe fermé de $\mathcal{B}$, de l'unique point fixe de norme minimale de l'application T[15] et tendant progressivement en norme vers l'origine de l'espace $\mathcal{B}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Amir D., "Characterizations of Inner Product Spaces," Birkhäuser, Basel/Boston/Stuttgart, 1986.
2. Birkhoff G., *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J. **1** (1935), 169–172.
3. Browder F., *Nonlinear accretive operators in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 470–476.
4. ———, *Nonlinear equations of evolution and nonlinear accretive operators in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 867–874.
5. ———, *Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 875–882.
6. ———, *Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 660–665.
7. Clarkson J. A., *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc **40** (1936), 396–414.
8. Day M., *Some characterizatioins of inner product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **62** (1947), 320–337.
9. De Figueiredo D.G. et Karlovitz L. A., *On the radial Projection in normed spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 364–368.
10. Deimling K., *Zeros of accretive Operators*, Manuscripta Math. **13** (1974), 365–374.
11. Del Rio M. et Benitez C., *The rectangular constant for two-dimensional spaces*, Jour. Approx. Theory **19** (1977), 15–21.
12. Fitzpatrick S. et Reznick B., *Skewness in Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **275** (1983), 587–597.
13. Fortet R., *Remarques sur les espaces uniformément convexes*, Bull. Soc. Math. France **67** (1939), 23–46.

[14] $\mathcal{B}$ un espace de Banach strictement convexe de biais égal à 1

[15] Nous pourrions sans doute appliquer ici une technique itérative similaire à celle qu'utilise Halpern [**14**] pour localiser le point fixe en question.

14. Halpern B., *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Soc. **73** (1967), 957–961.
15. Istrăţescu V. I., "Fixed Point Theory, An Introduction," Reidel, Dordrecht/Boston/London, 1981.
16. James R., *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 265–292.
17. ———, *Inner products in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 559–566.
18. Joly J. L., *Caractérisation d'espace hilbertien au moyen de la constante rectangle*, Jour. Approx. Theory **2** (1969), 301–311.
19. Kato T., *Nonlinear semigroups and evolution equations*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 508–520.
20. Martin R. H., *Differential equations on closed subsets of a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **179** (1973), 399–414.
21. Morales C., *Pseudo-contractive mappings and the Leray-Schauder boundary conditions*, Comment. Math. Univ. Carolin. **20** (1979), 745–756.
22. ———, *On the fixed-point theory for local k-pseudocontractions*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 71–74.
23. Schöneberg R., *On the structure of fixed point sets of pseudo-contractive mappings*, Comment. Math. Univ. Carolin. **18** (1977), 299–310.

Jocelyn Desbiens
Département d'ingénierie et d'informatique
Collège Militaire Royal de Saint-Jean
Saint-Jean-sur-Richelieu
Québec, Canada
J0J 1R0