Ann. sc. math. Québec, **14** (2), 1990, 121–129.

FORMULES D'INTERSECTION EN ANALYSE NON LISSE

F.H. CLARKE ET N. RAISSI

RÉSUMÉ. Une nouvelle formule d'intersection est obtenue reliant le gradient généralisé de la fonction distance de l'intersection, à la somme des gradients généralisés des fonctions distance. Dans la littérature, les seules formules connues relient les cônes normaux. La formule d'intersection d'Aubin-Ekeland [1984] peut-être obtenue à partir de la nôtre en dimension finie, et en dimension infinie, notre formule s'applique dans des cas où celle de Rockafellar [1979] ne s'applique pas.

ABSTRACT. A new formula is proven which relates the generalized gradients of the distance functions of individual sets to that of their intersection. This differs from earlier results, which are expressed in terms of normal cones, and applies to infinite dimensional cases. The intersection formula yields the earlier one of Aubin and Ekeland [1984] as a special case, and applies to certain cases not covered by the results of Rockafellar [1983].

1. Introduction. Le cône normal à un sous-ensemble fermé d'un espace de Hilbert, introduit par Clarke en 1973, peut-être construit à partir d'objets géométriques relativement simples, les proximales. Cette méthode de construction appelée **analyse proximale**, qui était l'approche originale de Clarke, a donné suite à de nombreuses applications récemment, dont font partie les résultats de cet article. Dans tout ce qui suit, H désignera un espace de Hilbert, son produit scalaire sera noté $\langle\ ,\ \rangle$ et C est un sous-ensemble fermé de H.

DÉFINITION 1.1: Un élément β de H est une proximale à C en un point x, si et seulement s'il existe une constante $\sigma > 0$, telle que pour tout $c \in C$,

$$-\langle \beta, c\rangle + \sigma|c-x|^2 \geq -\langle \beta, x\rangle.$$

L'ensemble des proximales à C en x est noté $PN_C(x)$. Il résulte de la définition précédente que pour tout point x sur la frontière de C, $PN_C(x)$ est un cône convexe qui contient toujours 0. Sans hypothèse de convexité, nous ne pouvons affirmer l'existence d'une proximale non triviale. Cependant, d'un résultat dû à Lau et basé sur le principe variationnel d'Ekeland (voir aussi Edelstein), nous pouvons déduire que l'ensemble des points de C admettant une proximale non nulle est dense sur la frontière de C.

Le cône normal à C en x, $N_C(x)$ est relié aux proximales par la formule suivante

$$N_C(x) = \overline{\text{co}}\left\{\underset{i\to\infty}{\text{w-lim}}\,\beta_i,\ \beta_i \in PN_C(x_i),\ x_i \to x \text{ dans } C\right\} \tag{1.1}$$

où $\overline{\text{co}}$ désigne l'enveloppe convexe fermée et w-lim est la limite relative à la topologie faible de H.

Reçu le 8 août 1988 et, sous forme révisée, le 8 novembre 1989.
Ce rapport a été publié en partie grâce à une subvention du fonds FCAR pour l'aide et le soutien à la recherche

Lorsque C est l'épigraphe d'une fonction f définie sur H, à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, s.c.i., le gradient généralisé de f en un point x est défini par

$$\xi \in \partial f(x) \Longleftrightarrow (\xi, -1) \in N_C(x, f(x)). \tag{1.2}$$

La fonction distance à un sous-ensemble C fermé de H, définie par

$$d_C(x) := \operatorname{Inf}\{|x-c|,\ c \in C\}$$

est une fonction lipschitzienne; son gradient généralisé en un point x de C est relié aux proximales par la formule suivante

$$\partial d_C(x) = \overline{\mathrm{co}}\left(\{0\} \cup \left\{\operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \beta_i,\ \beta_i \in PN_C(x_i),\ |\beta_i| = 1,\ x_i \to x \text{ dans } C\right\}\right). \tag{1.3}$$

La formule (1.3) est due à Clarke [1973] en dimension finie. Elle a été généralisée par Borwein-Giles [1986] dans le cas d'un espace de Hilbert, à partir des résultats de Borwein-Strojwas [1986].

Des formules (1.1) et (1.3), il résulte que

$$N_C(x) = \mathrm{cl}\left(\bigcup \lambda\, \partial d_C(x),\ \lambda > 0\right), \tag{1.4}$$

où cl désigne la fermeture. Un exemple dû à Rockafellar (§4) démontre que la fermeture dans la formule (1.4) est nécessaire.

La formule d'intersection que nous énonçons au prochain paragraphe est basée sur la formule (1.3). La démonstration de ce résultat fait l'objet du paragraphe 3. Au dernier paragraphe, nous comparons notre formule aux autres formules de la littérature, celle d'Aubin-Ekeland [1984], puis celle de Rockafellar [1979].

2. Formule d'intersection. Nous démontrons la formule d'intersection pour une nouvelle classe d'ensembles introduite dans cet article. Soient C_1, C_2 deux sous-ensembles fermés de H, et x un point de $C_1 \cap C_2$.

DÉFINITION 2.1: Les ensembles C_1, C_2 sont dits **indépendants** en x si pour tout $\kappa > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall\, c_i \in C_i \cap (x + \delta B)$, $\forall\, u_i \in \partial d_{C_i}(c_i)$, $i = 1, 2$ tel que

$$|u_1| + |u_2| > \kappa \quad \text{alors} \quad |u_1 + u_2| > \delta. \tag{2.1}$$

REMARQUE: Cette définition se généralise de façon évidente au cas de n ensembles, $n > 2$.

PROPOSITION 2.2.

(a) Soit $g_i : H \to \mathbb{R}$, $(i = 1, 2)$, des fonctions de classe C^1 et soient

$$C_i := \{y \in H : g_i(y) \le 0\},\ i = 1, 2.$$

Soit x tel que $g_i(x) = 0$, $i = 1, 2$. Alors les ensembles C_i sont indépendants en x si et seulement si

$$\{\nabla g_i(x)\}_{i=1,2} \quad \text{sont positivement linéairement indépendants} \tag{2.2}$$

(condition de Mangasarian-Fromowitz en programmation mathématique).

(b) Quand $H = \mathbb{R}^n$, C_1 et C_2 sont indépendants en x si et seulement si

$$\partial d_{C_1} \cap (-\partial d_{C_2}(x)) = \{0\}. \tag{2.3}$$

PREUVE: D'après le Théorème 2.4.7, Corollaire 2, de Clarke [1983], il suit que dans le contexte de (a), on a

$$\partial d_{C_i}(x) = \{\lambda \nabla g_i(x) : \lambda \geq 0\} \cap \overline{B},$$

où $\overline{B}$ est la boule unité fermée. Suite à ceci, la démonstration est facile. Pour (b), notons premièrement que l'indépendance implique évidemment (2.3). Il suffit de démontrer le contraire. Raisonnons par l'absurde en supposant que (2.3) soit vérifié sans que l'indépendance le soit. Puisque l'indépendance n'est pas présente, on peut trouver pour un certain $\kappa > 0$ et pour tout indice j, des vecteurs u_1^j et u_2^j appartenant à $\partial d_{C_1}(c_1^j)$ et à $\partial d_{C_2}(c_2^j)$ respectivement (et donc à $\overline{B}$), où c_1^j et c_2^j convergent vers x, tels que $|u_1^j| + |u_2^j| > \kappa$, $|u_1^j + u_2^j| < 1/j$.

Quand H est de dimension finie, on peut choisir des sous-suites convergeantes de $\{u_1^j\}$ et de $\{u_2^j\}$. Les limites u_1^∞, u_2^∞ sont forcément telles que $u_2^\infty = -u_1^\infty \neq 0$. D'autre part, la semicontinuité supérieure des correspondances $\partial d_{C_i}(\cdot)$ (Clarke [1983, Proposition 2.1.5b]) implique

$$0 \neq u_1^\infty \in \partial d_{C_1}(x) \cap (-\partial d_{C_2}(x)),$$

ce qui contredit (2.3). □

Nous allons démontrer une formule d'intersection moyennant l'une ou l'autre des hypothèses suivantes:

Hypothèses

(H) L'ensemble C_1 est compact, C_2 est fermé.

$(H)'$ Les ensembles C_1 et C_2 sont faiblement fermés.

THÉORÈME 2.3. *Soit $x \in C := C_1 \cap C_2$ tel que les ensembles C_1, C_2 soient indépendants en x et vérifient l'hypothèse (H) ou $(H)'$. Alors il existe une constante $M \geq 1$, dépendant uniquement de la géométrie des ensembles C_i au voisinage de x telle que:*

$$\partial d_C(x) \subseteq M\left\{\partial d_{C_1}(x) + \partial d_{C_2}(x)\right\}. \tag{2.4}$$

Une conséquence immédiate du Théorème 2.3 est une formule d'intersection en termes de cônes normaux et par polarité, une formule en termes de cônes tangents.

COROLLAIRE 1. *Sous les hypothèses du théorème on a*

$$N_C(x) \subseteq \mathrm{cl}\,(N_{C_1}(x) + N_{C_2}(x)) \tag{2.5}$$

$$T_C(x) \supseteq T_{C_1}(x) \cap T_{C_2}(x). \tag{2.6}$$

REMARQUES:

(1) La formule (2.4) a lieu avec $M = 3/\min(\delta, 1)$, δ étant la constante correspondant à $\kappa = 2/3$ dans la condition d'indépendance des ensembles C_1, C_2 en x.

(2) Le Théorème 2.3 se généralise au cas de n ensembles, $n > 2$; dans l'hypothèse (H) il suffira de supposer que l'un des n ensembles est compact.

(3) La fermeture dans la formule (2.5) n'est pas nécessaire moyennant l'hypothèse supplémentaire suivante:

$$\text{il existe } \tau > 0 \text{ telle que pour tout } u_i \in N_{C_i}(x),\ |u_i| = 1,\ (i = 1, 2), \text{ on ait} \\ |u_1 + u_2| > \tau, \tag{H_c}$$

une condition qui en dimension finie, équivaut à

$$N_{C_1}(x) \cap (-N_{C_2}(x)) = \{0\}.$$

Cette dernière condition est strictement plus forte que la condition d'indépendance comme le montre l'exemple 4.1. Le fait que l'hypothèse (H_c) implique que le cône $N_{C_1}(x) + N_{C_2}(x)$ soit fermé découle d'un résultat de Rockafellar dans le cas de la dimension finie qui a été généralisé à des espaces de Hilbert dans Raïssi [1987].

Les formules d'intersection (2.4), (2.5) ou (2.6) s'appliquent à des problèmes d'optimisation pour obtenir des conditions nécessaires. Dans cette optique, considérons le problème de programmation mathématique où l'ensemble des contraintes est décomposé de la façon suivante:

$$\operatorname{Min}\{f(x),\ x \in C = C_1 \cap C_2\} \tag{P}$$

où $f : H \to \mathbb{R}$ est une fonction localement lipschitzienne. A partir du Théorème 2.3, nous pouvons obtenir une condition nécessaire normale (c.–à–d. où la fonction f apparaît) en termes de C_1, C_2 séparément.

Corollaire 2. *Soit x une solution du problème (P) telle que C_1, C_2 soient indépendants en x et vérifient l'hypothèse (H) ou $(H)'$. Alors il existe $M \geq 1$ tel que*

$$0 \in \partial f(x) + MK\left\{\partial d_{C_1}(x) + \partial d_{C_2}(x)\right\}, \tag{2.7}$$

K étant une constante de Lipschitz de f au voisinage de x.

Preuve du Corollaire 2: Du lemme d'exacte pénalisation, Proposition 2.4.3 p. 51, Clarke [1983], nous pouvons déduire que x est un minimum local de la fonction $g := f + Kd_C$. Il en résulte que

$$0 \in \partial g(x) \subseteq \partial f(x) + K\,\partial d_C(x). \tag{2.8}$$

Par ailleurs, le Théorème 2.3 s'applique, la conclusion (2.7) résulte alors des inclusions (2.8) et (2.4).

3. Preuve du théorème 2.3. Notons que la condition d'indépendance est une condition locale. De plus, si les ensembles C_1, C_2 sont indépendants en x, alors ils sont indépendants en tout point d'un voisinage de x.

D'autre part sous l'hypothèse $(H)'$ il n'y a aucune perte de généralité à supposer que l'ensemble $C_1 \cap C_2$ est borné, quitte à remplacer C_1 par $C_1 \cap (x + r\bar{B})$, la conclusion du théorème ne change pas.

Moyennant la formule des proximales (1.3), il suffira de démontrer que l'ensemble P défini par

$$P := \left\{\operatorname*{w-lim}_{i\to\infty} \beta_i,\ \beta_i \in PN_C(x_i),\ |\beta_i| = 1,\ x_i \to x\right\},$$

est inclus dans $M\{\partial d_{C_1}(x) + \partial d_{C_2}(x)\}$. En effet, ce dernier ensemble est convexe fermé et contient 0.

Soit β une proximale à C en un point y suffisamment voisin de x pour que les ensembles C_1, C_2 soient indépendants en y et telle que $|\beta| = 1$. Alors il existe $\sigma > 0$ tel que

$$-\langle \beta, c\rangle + \sigma|c-y|^2 \geq -\langle \beta, y\rangle, \qquad \forall\, c \in C.$$

L'élément y est alors l'unique solution du problème d'optimisation suivant

$$\operatorname{Min}\{-\langle \beta, c\rangle + \sigma|c-y|^2;\ c \in C\}. \tag{P}$$

Afin d'obtenir une condition nécessaire en termes de C_1, C_2 séparément, nous perturbons le problème (P) de la façon suivante. A chaque point α dans H, est associé le problème $P(\alpha)$ suivant:

$$\operatorname{Min}\{-\langle \beta, c\rangle + \sigma|c-y|^2;\ c \in C_1 \cap (C_2+\alpha)\}. \tag{$P(\alpha)$}$$

Soit V la fonction valeur associée à cette perturbation, définie par

$$V(\alpha) := \operatorname{Inf} P(\alpha).$$

De l'hypothèse (H) ou $(H)'$, nous pouvons déduire que pour chaque α dans H, une solution du problème $P(\alpha)$ existe. Les conditions nécessaires relatives au problème (P) sont reliées au gradient généralisé de V en 0. La preuve du théorème consiste à construire un élément de $\partial V(0)$. Pour cela il suffira de construire un vecteur $[\xi, -\epsilon]$ normal à l'épigraphe de V au point $(0, V(0))$ tel que $\epsilon \neq 0$, et grâce à la formule (1.2) définissant le gradient généralisé, nous aurons

$$\xi/\epsilon \in \partial V(0).$$

Un tel vecteur normal est construit à l'aide de la formule de proximales (1.1). Plus précisément,

$$[\xi, -\epsilon] = \underset{i\to\infty}{\text{w-lim}}\, [\xi_i, -\epsilon_i]$$

où pour tout $i \geq 1$, $[\xi_i, -\epsilon_i] \in PN_{\text{épi}\,V}(\alpha_i, V(\alpha_i))$, $|\xi_i| + \epsilon_i = 1$, et où $\{(\alpha_i, V(\alpha_i))\}_{i\geq 1}$ est une suite convergeant vers $(0, V(0))$ dans $H \times R$.

1$^{\text{ère}}$ ÉTAPE: Propriétés de V

LEMME 1.

(i) la fonction V est s.c.i.

(ii) si $\{(\alpha_i, V(\alpha_i))\}_{i\geq 1}$ est une suite convergeant vers $(0, V(0))$ dans $H \times R$, alors pour chaque $i \geq 1$, il existe une solution y_i de $P(\alpha_i)$ telle que la suite $\{y_i\}_{i\geq 1}$ converge vers y.

(i) Soit $\{(\alpha_i, r_i)\}_{i\geq 1}$ une suite dans l'épigraphe de V convergeant vers (α, r), et pour chaque $i \geq 1$ soit c_i une solution de $P(\alpha_i)$. Alors

$$r = \lim_{i\to\infty} r_i \geq \liminf_{i\to\infty} V(\alpha_i) = \liminf_{i\to\infty} \left\{-\langle \beta, c_i\rangle + \sigma|c_i - y|^2\right\}. \tag{3.1}$$

Grâce à l'hypothèse de compacité (faible sous l'hypothèse $(H)'$, voir la remarque au début de ce paragraphe) de l'ensemble C_1, nous pouvons extraire de la suite $\{c_i\}_{i\geq 1}$ une sous-suite convergeant (faiblement sous l'hypothèse $(H)'$) vers un élément c admissible pour $P(\alpha)$. D'où

$$\liminf_{i\to\infty}\left\{-\langle\beta,c_i\rangle+\sigma|c_i-y|^2\right\}\geq-\langle\beta,c\rangle+\sigma|c-y|^2\geq V(\alpha). \tag{3.2}$$

Des inégalités (3.1) et (3.2), nous déduisons que $r\geq V(\alpha)$ et par suite l'épigraphe de V est un sous-ensemble fermé de $H\times R$.

(ii) Pour chaque $i\geq 1$, soit y_i une solution de $P(\alpha_i)$. La suite $\{y_i\}_{i\geq 1}$ admet une sous-suite (notée $\{y_i\}$) convergeant (faiblement sous $(H)'$) vers un élément c admissible pour (P). Alors

$$V(0)=\lim_{i\to\infty}V(\alpha_i)=\lim_{i\to\infty}\left\{-\langle\beta,y_i\rangle+\sigma|y_i-y|^2\right\}\geq-\langle\beta,c\rangle+\sigma|c-y|^2\geq V(0). \tag{3.3}$$

Par conséquent c est une solution de (P) et par unicité de la solution de (P), nous déduisons que $c=y$. L'assertion *(ii)* est alors établie sous l'hypothèse (H); il suffit de vérifier que la convergence est forte sous l'hypothèse $(H)'$. Grâce à l'équation (3.3), nous pouvons conclure que

$$-\langle\beta,y\rangle=V(0)=\lim_{i\to\infty}\left\{-\langle\beta,y_i\rangle+\sigma|y_i-y|^2\right\}=\lim_{i\to\infty}-\langle\beta,y_i\rangle.$$

La suite $\{|y_i-y|^2\}_{i\geq 1}$ converge alors vers 0, et le Lemme 1 est démontré.

2$^{\text{ème}}$ ÉTAPE: Caractérisation d'une proximale à épi$V$

LEMME 2. *Soit* $[\xi,-\epsilon]\in PN_{\text{épi}V}(\alpha,V(\alpha))$ *tel que* $|\xi|+\epsilon=1$, *et soit* x_α *une solution de* $P(\alpha)$. *Alors*

$$\begin{cases}\xi+\epsilon\beta-2\epsilon\sigma(x_\alpha-y)\in\{1+2\epsilon\sigma|x_\alpha-y|\}\partial d_{C_1}(x_\alpha)\\[2ex] -\xi\in\partial d_{C_2}(x_\alpha-\alpha).\end{cases} \tag{3.4}$$

Soit $[\xi,-\epsilon]\in PN_{\text{épi}V}(\alpha,V(\alpha))$; il existe $\lambda>0$ tel que pour tout $(\alpha',r')\in\text{épi}V$

$$-\langle\xi,\alpha'\rangle+\epsilon r'+\lambda|\alpha'-\alpha|^2+\lambda|r'-V(\alpha)|^2\geq-\langle\xi,\alpha\rangle+\epsilon V(\alpha). \tag{3.5}$$

Notons que pour tout $(c_1,c_2)\in C_1\times C_2$, nous avons

$$[c_1-c_2,-\langle\beta,c_1\rangle+\sigma|c_1-y|^2]\in\text{épi}V.$$

En particulier $[c_1-(x_\alpha-\alpha),-\langle\beta,c_1\rangle+\sigma|c_1-y|^2]$ et $[x_\alpha-c_2,-\langle\beta,x_\alpha\rangle+\sigma|x_\alpha-y|^2]$ appartiennent à l'épigraphe de V où x_α est une solution de $P(\alpha)$. En les substituant un à un dans l'inéquation (3.5) et en regroupant les termes, nous obtenons

$$\begin{aligned}-\langle\xi+\epsilon\beta,c_1\rangle+\epsilon\sigma|c_1-y|^2+\lambda|c_1-x_\alpha|^2+\lambda|\langle-\beta+\sigma(c_1+x_\alpha-2y),c_1-x_\alpha\rangle|^2\geq\\ -\langle\xi+\epsilon\beta,x_\alpha\rangle+\epsilon\sigma|x_\alpha-y|^2\quad\forall c_1\in C_1\end{aligned}$$

et

$$\langle\xi,c_2\rangle+\lambda|x_\alpha-\alpha-c_2|^2\geq\langle\xi,x_\alpha-\alpha\rangle\quad\forall c_2\in C_2.$$

La conclusion du Lemme 2 découlera du lemme d'exacte pénalisation (Proposition 2.4.3, p. 51, Clarke [1983]) et de la condition nécessaire qui s'ensuit, appliquée aux inéquations précédentes.

$3^{\text{ème}}$ ÉTAPE:

Supposons que $\{(\alpha, V(\alpha))\}$ converge vers $(0, V(0))$ et pour chaque α, soit x_α une solution de $P(\alpha)$. Du Lemme 1, nous pouvons déduire qu'il existe une sous-suite de x_α qui converge vers y. Pour une telle suite de α, soit

$$[\xi_\alpha, -\epsilon_\alpha] \in PN_{\text{épi}\, V}(\alpha, V(\alpha))$$

tel que $|\xi_\alpha| + \epsilon_\alpha = 1$, et tel que $\epsilon_\alpha \to \epsilon \geq 0$.

Soit δ la constante correspondant à $\kappa = 2/3$ dans la définition de l'indépendance des ensembles C_1, C_2 en y. On voudrait démontrer

$$\epsilon \geq \min(\delta, 1)/3. \tag{3.6}$$

Pour voir ceci, on peut supposer que $\epsilon_\alpha < 1/3$ pour chaque α suffisamment petit, et donc $|\xi_\alpha| \geq 2/3$. La somme des normes des vecteurs

$$\frac{\xi_\alpha + \epsilon_\alpha \beta - 2\epsilon_\alpha \sigma (x_\alpha - y)}{1 + 2\epsilon_\alpha \sigma |x_\alpha - y|}, \ -\xi_\alpha$$

est donc supérieur à $2/3$ (pour α petit), et vu (3.4) et le choix de δ on déduit que la norme de leur somme est supérieure à δ. Pour α petit cette dernière conséquence entraîne

$$|\epsilon_\alpha \beta| > \delta/2,$$

ce qui donne (3.6) puisque $|\beta| = 1$.

Dans les inclusions (3.4), passons à la limite lorsque $\{(\alpha, V(\alpha))\}$ converge vers $(0, V(0))$ et faisons la somme. Nous obtenons tenant compte du fait que les multifonctions $\partial d_{C_1}(.)$, $i = 1, 2$ sont fermées,

$$\epsilon\beta \in \partial d_{C_1}(y) + \partial d_{C_2}(y).$$

Divisons l'inclusion précédente par ϵ. Sachant que (3.6) est vérifié,

$$\beta \in 1/\epsilon \{\partial d_{C_1}(y) + \partial d_{C_2}(y)\} \subseteq M\{\partial d_{C_1}(y) + \partial d_{C_2}(y)\},$$

avec $M := 3/\min(\delta, 1)$.

Nous avons démontré qu'il existe une constante $M \geq 3$ telle que pour tout y dans un voisinage de x, nous avons

$$\bar{B} \cap PN_C(y) \subseteq M\{\partial d_{C_1}(y) + \partial d_{C_2}(y)\}. \tag{3.7}$$

De l'inclusion (3.7) et grâce au lemme suivant, nous pouvons déduire que

$$P \subseteq M\{\partial d_{C_1}(x) + \partial d_{C_2}(x)\}.$$

LEMME 3. *La multifonction $y \longrightarrow \partial d_{C_1}(y) + \partial d_{C_2}(y)$ est faiblement fermée.*

Soient $\{y_i\}_{i\geq 1}$ une suite convergeant dans H vers y, et $\{\beta_i\}_{i\geq 1}$ une suite convergeant faiblement vers β telles que pour tout $i \geq 1$,

$$\beta_i \in \partial d_{C_1}(y_i) + \partial d_{C_2}(y_i).$$

Pour chaque $i \geq 1$, il existe donc des éléments $\beta_i' \in \partial d_{C_1}(y_i)$ et $\beta_i'' \in \partial d_{C_2}(y_i)$ tels que

$$\beta_i = \beta_i' + \beta_i''.$$

De la propriété de semi-continuité forte des multifonctions $\partial d_{C_j}(.)$, nous pouvons déduire qu'il existe une sous-suite de $\{\beta_i'\}_{i\geq 1}$ (respectivement $\{\beta_i''\}_{i\geq 1}$) convergeant faiblement vers $\beta' \in \partial d_{C_1}(y)$ (respectivement $\beta'' \in \partial d_{C_2}(y)$). Par unicité de la limite, nous avons

$$\beta = \beta' + \beta'' \in \partial d_{C_1}(y) + \partial d_{C_2}(y).$$

Ceci achève la preuve du Lemme 3 ainsi que celle du Théorème 2.3. □

4. Comparaison avec les autres formules d'intersection. En dimension finie, Aubin-Ekeland [1984, p. 441] démontrent la formule d'intersection (2.6) moyennant l'hypothèse suivante

$$0 \in \operatorname{int}(T_{C_1}(x) - T_{C_2}(x)). \tag{4.1}$$

Par polarité, l'hypothèse (4.1) est équivalente à la condition suivante

$$N_{C_1}(x) \cap (-N_{C_2}(x)) = \{0\}. \tag{4.2}$$

En particulier l'hypothèse (4.1) implique que les ensembles C_1, C_2 sont indépendants en x. L'exemple suivant montre que l'implication est stricte.

EXEMPLE 4.1: Soit C l'épigraphe de la fonction f définie $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) := \begin{cases} y^2/2|x| & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0, \\ +\infty & \text{si} \quad x = 0 \;\text{ et }\; y \neq 0. \end{cases}$$

Rockafellar a construit cet ensemble pour démontrer que le cône engendré par $\partial d_C(.)$ n'est pas nécessairement fermé. En effet, le cône (non fermé) engendré par $\partial d_C(0)$ coïncide avec la réunion de l'axe des x et du demi-espace ouvert des z négatifs. Nous renvoyons à Raïssi [1987] Proposition 4, p. 14 pour les détails.

Soit maintenant D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$D := [-1, +1] \times \{0\} \times [-1, +1].$$

Alors les ensembles C, D sont indépendants en 0 en ne vérifient pas l'hypothèse (4.2). En effet, nous avons

$$N_C(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\; z \leq 0\} \quad \text{et} \quad N_D(0) = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Par conséquent,

$$N_C(0) \cap (-N_D(0)) = N_D(0) \neq \{0\},$$

mais

$$\partial d_C(0) \cap (-\partial d_D(0)) \subseteq (\{z < 0\} \cup \{y = z = 0\}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}) = \{0\}.$$

Cet exemple démontre que notre hypothèse (indépendance) est plus faible que celle d'Aubin-Ekeland (4.1). Notons aussi qu'ils obtiennent une formule d'intersection en dimension finie, en termes des cônes tangents et que leur formule n'admet pas d'extension au cas de plus de deux ensembles. D'autres résultats pertinents sont dûs à Ioffe et à Mordukhovich; voir Ioffe [1986].

En dimension infinie, dans un espace de Banach, Rockafellar [1979] a démontré la formule d'intersection (2.5) pour deux ensembles C_1, C_2 et x vérifiant

$$\begin{cases} T_{C_1}(x) \cap \operatorname{int} T_{C2}(x) \neq \phi, \\ \\ C_2 \text{ admet au moins un vecteur hypertangent en } \; x. \end{cases} \tag{4.3}$$

Nous référons à Clarke [1983] chapitre 2 pour la définition d'un vecteur hypertangent. Il est clair que l'hypothèse (4.3) implique l'hypothèse (4.1). Par conséquent, en dimension finie la condition d'indépendance est strictement plus faible que l'hypothèse de Rockafellar.

En dimension infinie, le lien entre l'hypothèse (4.3) et la condition d'indépendance n'est pas établi. Cependant, un cône tangent d'intérieur non vide est une condition difficile à réaliser, notamment dans les applications en optimisation dynamique. La formule d'intersection de Rockafellar est moins précise que la nôtre, étant en termes de cônes normaux plutôt que des ensembles ∂d_{C_i} qui engendrent ces cônes.

BIBLIOGRAPHIE

1. J.P. Aubin et I. Ekeland, "Applied nonlinear analysis," Wiley-Interscience, New York, 1984.
2. J.M. Borwein et H.M. Strojwas, *Proximal analysis and boundaries of closed sets in Banach space, part I: theory*, Can. J. Math. **38** (1986), 431–452.
3. J.M. Borwein et J.R. Giles, *The proximal normal formula in Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **302** (1987), 371–381.
4. F.H. Clarke, "Necessary Conditions for Nonsmooth Problems in Optimal Control and the Calculus of Variations," Ph.D. thesis, University of Washington, 1973.
5. ———, "Optimization and Nonsmooth Analysis," John Wiley and Sons, New York, 1983 (Reprinted by CRM, Université de Montréal, 1989, and also by SIAM, Philadelphia, 1989).
6. ———, *Perturbed optimal control problems*, IEEE Trans. Auto. Control **AC-31** (1986), 535–542.
7. F.H. Clarke and P.D. Loewen, *The value function in optimal control: sensitivity, controllability, and time-optimality*, SIAM J. Control Optim. **24** (1986), 243–263.
8. F.H. Clarke and N. Raïssi, *Indépendance d'ensembles et conditions nécessaires d'optimalité normales relatives à un problème de programmation mathématique*, Rapport CRM-1396 (1986).
9. M. Edelstein, *Weakly proximinal sets*, J. Approx. Theory **18** (1976), 1–8.
10. A.D. Ioffe, *Approximate subdifferentials and applications II*, Mathematika **33** (1986), 111–128.
11. K.S. Lau, *Best approximation by closed sets in Banach Spaces*, J. of Approx. Theory **23** (1978), 29–36.
12. P.D. Loewen, "Proximal Normal Analysis in Dynamic Optimization," Ph.D. thesis, University of British Columbia, 1985.
13. N. Raïssi, "Analyse proximale en optimisation," Thèse de Ph.D., Université de Montréal, 1987.
14. R.T. Rockafellar, *Directionally Lipschitzian functions and subdifferential calculus*, Proc. London Math. Soc. **39** (1979), 331-355.
15. ———, *Extensions of subgradient calculus with applications to optimization*, Nonlinear Analysis **9** (1985), 665–698.

F.H. Clarke
Centre de recherches mathématiques
Université de Montréal
C.P. 6128 , Succursale "A"
Montréal, Québec, Canada

N. Raïssi
Département de mathématiques et d'informatique
Université Mohammed V
Kenitra, Maroc