

CALCUL DE LA MESURE DE HAUSDORFF DES ENSEMBLES PARFAITS HOMOGÈNES LINÉAIRES

JACQUES MARION

RÉSUMÉ. Les ensembles parfaits homogènes linéaires de type (ν, ξ) (cf. [3]) sont des cas particuliers de fractals à similitude interne (cf. [4]). Nous les étudions du point de vue de leur mesure de Hausdorff. Au départ, nous formulons en termes géométriques simples une condition nécessaire et suffisante pour que la mesure de Hausdorff $H^\alpha(E)$ d'un parfait homogène linéaire E de type (ν, ξ) et de dimension $\alpha = \log \nu / \log \xi^{-1}$ soit maximale. Puis, nous déterminons les conditions sur E pour que $H^\alpha(E)$ soit minimale. Nous démontrons ensuite une formule générale permettant un calcul explicite de $H^\alpha(E)$ pour tout parfait homogène linéaire E . On retrouve alors, sous forme de cas particuliers, des résultats de Best [1], Gierl [2] et Wegmann [6] sur le calcul de $H^\alpha(E)$ lorsque E peut être défini par une caractéristique du développement q -adique de ses éléments.

Dans une étude détaillée du cas $\nu = 3$, nous montrons comment varie $H^\alpha(E)$ en fonction de paramètres géométriques qui décrivent la structure de E , pour ensuite obtenir la valeur minimale de $H^\alpha(E)$ lorsque E est de type $(3, \xi)$. L'article se termine par la démonstration d'une formule qui exprime (dans le cas général) $H^\alpha(E)$ à partir du module de continuité de la fonction de Cantor-Lebesgue associée à E (cf. [3]).

ABSTRACT. The object of this paper is the computation of the Hausdorff measure of certain self-similar fractal subsets of an interval on the real line. These fractals, called homogeneous perfect sets, are generalizations of the classical "Cantor ternary set". We prove a general formula for the Hausdorff measure of these sets based on their geometric structure, and we show how this measure varies with certain parameters defining the construction of the fractals.

1. Introduction. Lors d'un premier article ([4]), nous avons étudié dans un cadre général la structure et les caractéristiques des ensembles fractals appelés *ensembles parfaits à similitude interne*. Nous définissons un tel ensemble comme étant un compact $E \subset \mathbb{R}^N$ pour lequel il existe une famille finie $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$ d'au moins deux similitudes de \mathbb{R}^N telle que $E = \bigcup_{i=1}^\nu \varphi_i(E)$. Pour faire suite à ce travail initial nous porterons notre attention plus particulièrement sur une classe importante de fractals linéaires à similitude interne, les *ensembles parfaits homogènes*. Ces derniers sont définis dans [3], une première fois par le biais d'un processus de "dissection" d'intervalle, puis redéfinis de façon intrinsèque en faisant appel au concept de similitude interne.

Reprenons la formulation proposée dans [4] du processus de dissection par lequel on construit un parfait homogène linéaire. Soit $K = [a, b]$ un intervalle compact et $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$ une famille de ν transformations de \mathbb{R} (où $\nu \geq 2$), chacune s'écrivant

$$\varphi_i(x) = \xi x + \eta_i,$$

où $0 < \xi < \nu^{-1}$, et telles que $\varphi_i(K) \subset K$ pour $i = 1, \dots, \nu$ avec $\varphi_i(K) \cap \varphi_j(K) = \emptyset$ si $i \neq j$. Les compacts $\varphi_i(K)$, qui sont appelés *intervalles fondamentaux* (intervalles "blancs" dans [3]) *d'ordre 1*, sont des intervalles qui "restent" après une première dissection effectuée sur K . On refait une dissection du même type sur chacun des intervalles fondamentaux $\varphi_i(K)$, pour ne conserver de $[a, b]$ que les ν^2 intervalles fondamentaux *d'ordre 2* $\varphi_i \circ \varphi_j(K)$, et ainsi de suite, de telle sorte qu'à la n -ième étape du processus, il ne reste de $[a, b]$ que les ν^n intervalles fondamentaux *d'ordre n* $\varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(K)$, deux à deux disjoints, dont la

réunion est un compact noté E_n . De cette façon $E_n \supset E_{n+1}$ et le parfait homogène E de type (ν, ξ) est défini par

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Nous pouvons définir les parfaits homogènes sur $[a, b]$ d'une manière un peu plus large en admettant que (pour $i \neq j$) $\varphi_i(K) \cap \varphi_j(K)$ puissent être, soit vide, soit réduit à un seul point. Donc, dans ce cas plus général, les intervalles fondamentaux d'un même ordre sont deux à deux disjoints ou "bout à bout". Nous adoptons désormais cette définition plus large des parfaits homogènes linéaires.

Lorsque la contrainte supplémentaire

$$\varphi_i(K) \cap \varphi_j(K) = \emptyset \text{ pour tout } i \neq j$$

sera imposée, nous parlerons alors expressément de parfaits homogènes *au sens strict*.

Pour compléter la terminologie, signalons que les intervalles ouverts (deux à deux disjoints) dont la réunion constitue l'ensemble $]a, b[\setminus E$ seront appelés *intervalles complémentaires* à E (intervalles "noirs" dans [3]).

Le parfait homogène E , comme tout parfait à similitude interne (paragraphe 2 de [4]), est entièrement déterminé par l'ensemble de similitudes $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$ qui lui est associé. Il ne dépend donc pas du choix de l'intervalle $[a, b]$ à partir duquel commence le processus de dissection (ce choix n'étant pas unique). Par commodité et pour fixer les idées, nous conviendrons que $a \in E$ et $b \in E$ lorsqu'un parfait homogène sera dit "obtenu par dissection de l'intervalle $[a, b]$ ", ou encore "porté par $[a, b]$ ", de sorte que $[a, b]$ soit l'enveloppe convexe de E .

Soulignons de plus que les parfaits homogènes (avec la définition plus large convenue) sont des fractals à similitude interne déterminées par des familles $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$ de similitudes de \mathbb{R} qui vérifient la condition de Moran (Remarque 2 de [4]), à savoir l'existence d'un ouvert $O \subset \mathbb{R}$ tel que $\bigcup \varphi_i(O) \subset O$ avec $\varphi_i(O) \cap \varphi_j(O) = \emptyset$ si $i \neq j$.

Les démonstrations présentées ici sont des versions sensiblement modifiées des démonstrations originales (non publiées) obtenues par l'auteur pour sa thèse (Université d'Ottawa, 1978).

2. Reformulations, pour le cas particulier des parfaits homogènes, de résultats généraux sur les parfaits à similitude interne.

Nous conservons les notations utilisées dans [4]. En outre, $|\Delta|$ désigne le diamètre d'un ensemble $\Delta \subset \mathbb{R}$. Soit E un parfait à similitude interne défini par une famille $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$ de similitudes de \mathbb{R} (de rapports ξ_1, \dots, ξ_ν respectivement) qui vérifie la condition de Moran. Notons α la dimension d'homothétie de E , c'est-à-dire le nombre réel tel que $\xi_1^\alpha + \dots + \xi_\nu^\alpha = 1$. Pour $\Lambda = \{1, 2, \dots, \nu\}$, Λ^n désigne $\Lambda \times \dots \times \Lambda$ (n fois).

- (i) **Formule préliminaire pour $H^\alpha(E)$** : Nous avons démontré (Théorème 6.2 de [4]) que la mesure de Hausdorff de E (mesure en dimension α), notée $H^\alpha(E)$, est donnée par la formule

$$H^\alpha(E) = \inf \{ |A_\lambda|^\alpha / f_n(\lambda) : n \geq 1 \text{ et } \lambda \subset \Lambda^n \}, \quad (1)$$

où

$$A_\lambda = \bigcup_{(i_1, \dots, i_n) \in \lambda} \varphi_{i_1} \circ \dots \circ \varphi_{i_n}(E) \text{ et } f_n(\lambda) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \lambda} (\xi_{i_1} \dots \xi_{i_n})^\alpha.$$

De plus, nous avons établi que

$$0 < H^\alpha(E) < \infty$$

de sorte que $\alpha = \dim E$, la dimension de Hausdorff de E . Dans le cas particulier qui nous intéresse maintenant, c'est-à-dire lorsque E est un parfait homogène linéaire de type (ν, ξ) porté par $[a, b]$, la dimension α de E vérifie l'équation $\nu\xi^\alpha = 1$, d'où

$$\alpha = -\log \nu / \log \xi.$$

Aussi, en notant $d_{k,n}$ la longueur minimale d'un sous-intervalle de $[a, b]$ contenant k intervalles fondamentaux d'ordre n , la formule (1) devient

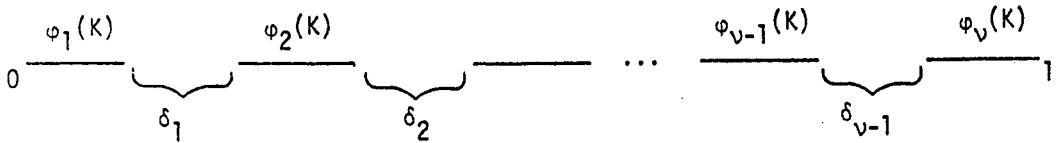
$$H^\alpha(E) = \inf_{n \geq 1} \min_{1 \leq k \leq n} k^{-1} \nu^n d_{k,n}^\alpha = \inf_{k \geq 1} \inf_{n \geq n_k} k^{-1} \nu^n d_{k,n}^\alpha \tag{2}$$

où $n_k = \min\{n \geq 1 : \nu^n \geq k\}$. En effet, l'infimum des quotients $|A_\lambda|/f_n(\lambda)$ demeure le même si l'on se restreint aux n -tuplets λ pour lesquels A_λ est une réunion d'intervalles fondamentaux "consécutifs" d'ordre n , et si ces intervalles sont au nombre de k , alors $|A_\lambda| = d_{k,n}$ et $f_n(\lambda) = k\nu^{-n}$.

- (ii) **Valeur maximale et condition de maximalité de $H^\alpha(E)$** : Par ailleurs, pour tout parfait à similitude interne E , on a $H^\alpha(E) \leq |E|^\alpha$, où $\alpha = \dim E$ (Corollaire 4.2 de [4]). Si le parfait $E \subset \mathbb{R}$ déterminé par les similitudes $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$ vérifie $\varphi_i(E) \cap \varphi_j(E) = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ (i.e. si E est un parfait isotypique), on a (Théorème 7.2 de [4])

$$H^\alpha(E) = |E|^\alpha \Leftrightarrow \min_{\lambda \subset A} |A_\lambda|^\alpha / f_1(\lambda) = |E|^\alpha. \tag{3}$$

Lorsque E est en particulier un parfait homogène au sens strict porté par $[a, b]$, la valeur de $\min_{\lambda \subset A} |A_\lambda|^\alpha / f_1(\lambda)$ coïncide avec $\min_{1 \leq k \leq \nu} k^{-1} \nu d_{k,1}^\alpha$. De plus, sans perte de généralité, on peut supposer que $[a, b] = [0, 1]$ (d'où $|E| = 1$) car pour toute similitude ψ de rapport t on a $H^\alpha(\psi(E)) = t^\alpha H^\alpha(E)$. La position des intervalles fondamentaux d'ordre 1 (i.e. $\varphi_1(K), \dots, \varphi_\nu(K)$, où $K = [0, 1]$) est illustrée au diagramme suivant:



où $\delta_i = \text{dist}(\varphi_i(K), \varphi_{i+1}(K))$, ($i = 1, \dots, \nu - 1$) et $|\varphi_i(K)| = \xi$, ($i = 1, \dots, \nu$). La relation (3) se reformule alors

$$\begin{aligned} H^\alpha(E) = 1 &\Leftrightarrow \min_{3 \leq j+k \leq \nu+1} k^{-1} \nu (k\xi + \delta_j + \dots + \delta_{j+k-2})^\alpha \geq 1 \\ &\Leftrightarrow (k\xi + \delta_j + \dots + \delta_{j+k-2})^\alpha \geq k\xi^\alpha \text{ (si } 3 \leq j+k \leq \nu+1). \end{aligned} \tag{4}$$

De ce résultat, nous allons déduire le

COROLLAIRE 2.1. Soit E un parfait homogène de type (ν, ξ) . Si les intervalles fondamentaux d'ordre 1 sont séparés par des intervalles complémentaires de même longueur (i.e. si $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{\nu-1}$), alors $H^\alpha(E) = |E|^\alpha$.

DÉMONSTRATION: On suppose toujours sans perte de généralité que $[a, b] = [0, 1]$ (d'où $|E| = 1$). Alors par hypothèse, on a

$$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{\nu-1} = (1 - \nu\xi)/(\nu - 1).$$

Donc, si $3 \leq j + k \leq \nu + 1$, on a

$$\begin{aligned} (k\xi + \delta_j + \dots + \delta_{j+k-2})^\alpha &= \left[k\xi + (k-1) \frac{(1 - \nu\xi)}{(\nu - 1)} \right]^\alpha \\ &= \left[\left(\frac{k-1}{\nu-1} \right) + \left(\frac{\nu-k}{\nu-1} \right) \xi \right]^\alpha \\ &\geq \left(\frac{k-1}{\nu-1} \right) 1^\alpha + \left(\frac{\nu-k}{\nu-1} \right) \xi^\alpha \text{ (concavité de la fonction } t^\alpha) \\ &= \frac{k-1}{\nu-1} + \frac{\nu-k}{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{k}{\nu} = k\xi^\alpha \end{aligned}$$

et, en vertu de (4), le corollaire est démontré. \square

REMARQUE 2.2. Pour le cas $\nu = 2$, on a donc automatiquement $H^\alpha(E) = 1$ tel que précisé auparavant dans [4].

3. Application aux ensembles "de Cantor" considérés par Best [1], Gierl [2] et Wegmann [6]. Certains parfaits homogènes contenus dans $[0, 1]$ peuvent se définir (à la manière de l'ensemble triadique de Cantor classique) comme ensemble des nombres réels de $[0, 1]$ dont le développement q -adique (pour une base donnée q) ne peut comporter que certains chiffres parmi $\{0, 1, \dots, q-1\}$.

Considérons le cas suivant: soit q et ν des entiers vérifiant $q \geq 3$ et $1 \leq \nu \leq q-1$, et r, s et p des éléments de $\{0, 1, \dots, q-1\}$ tels que $\nu + r + s + (\nu - 1)p = q$. Posons

$$A = \{r + k(p + 1) : k = 0, 1, \dots, \nu - 1\}.$$

Soit $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$ les ν similitudes de \mathbb{R} de rapport q^{-1} qui transforment respectivement l'intervalle $[0, 1]$ dans les ν intervalles $\left[\frac{a}{q}, \frac{a+1}{q} \right]$ où $a \in A$.

Le parfait homogène E de type (ν, q^{-1}) défini par $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\nu\}$ est en fait l'ensemble des nombres réels de $[0, 1]$ s'écrivant $\sum_{j=1}^\infty \frac{a_j}{q^j}$ avec $a_j \in A$ pour tout $j \geq 1$. On a

$$\dim E = \alpha = \log \nu / \log q.$$

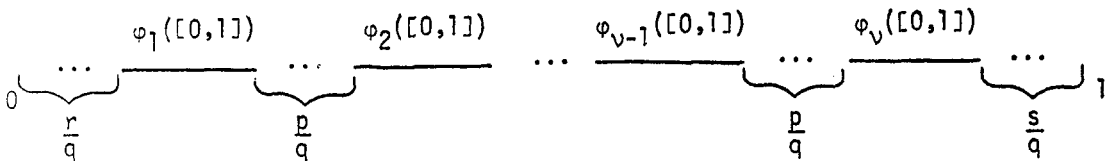


Diagramme de la première étape

De plus, l'enveloppe convexe de E est l'intervalle

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} \frac{r}{q^j}, 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s}{q^j} \right] = \left[\frac{r}{q-1}, 1 - \frac{s}{q-1} \right],$$

et par conséquent

$$|E| = 1 - \frac{r+s}{q-1}.$$

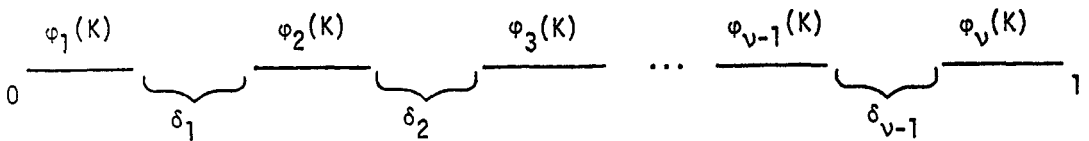
En considérant E comme parfait homogène construit à partir de l'intervalle $K = \left[\frac{r}{q-1}, 1 - \frac{s}{q-1} \right]$, les intervalles fondamentaux d'ordre 1, $\varphi_1(K), \dots, \varphi_\nu(K)$ sont séparés par des intervalles complémentaires de longueur commune $\delta = \frac{1}{q} \left(p + \frac{r+s}{q-1} \right)$. En vertu du Corollaire 2.1, on a donc

$$H^\alpha(E) = \left(1 - \frac{r+s}{q-1} \right)^\alpha. \tag{5}$$

Cas particulier En posant $p = 0, r = 1$ et $s = 0$ ou encore $p = 0, r = 0$ et $s = 1$, on retrouve, pour les ensembles E correspondants, une formule parue dans [1], [2] et [6], à savoir

$$H^\alpha(E) = \left(\frac{q-2}{q-1} \right)^\alpha. \tag{6}$$

4. Position des intervalles fondamentaux d'ordre 1 pour que $H^\alpha(E)$ soit minimal. Soit E un parfait homogène de type (ν, ξ) porté par $K = [0, 1]$. Posons comme précédemment $\delta_i = \text{dist}(\varphi_i(K), \varphi_{i+1}(K)), i = 1, \dots, \nu - 1$, de sorte que δ_i représente (s'il est $\neq 0$) la longueur d'un intervalle complémentaire séparant 2 intervalles fondamentaux consécutifs d'ordre 1.



THÉORÈME 4.1. Si $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{\nu-2} = 0$ (d'où $\delta_{\nu-1} = 1 - \nu\xi$), ou si $\delta_2 = \delta_3 = \dots = \delta_{\nu-1} = 0$ (d'où $\delta_1 = 1 - \nu\xi$), alors $H^\alpha(E)$ est minimal.

DÉMONSTRATION: Notons E_0 un parfait homogène de type (ν, ξ) porté par $[0, 1]$ vérifiant l'une ou l'autre des hypothèses du théorème. Soit E un quelconque parfait homogène de type (ν, ξ) porté par $[0, 1]$. Montrons que $H^\alpha(E) \geq H^\alpha(E_0)$. Utilisant les notations du paragraphe 2, il nous suffit en vertu de (2), de vérifier que

$$d_{k,n}(E) \geq d_{k,n}(E_0) \tag{7}$$

pour tout $n \geq 1$ et tout k tel que $1 \leq k \leq \nu^n$.

On procède par récurrence sur n . Pour $n = 1$ l'inégalité (7) est immédiate. De plus, pour tout $n \geq 1$,

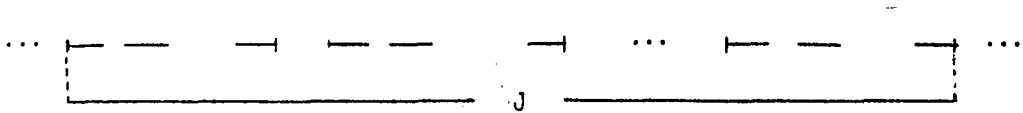
$$d_{\nu^n,n}(E) = d_{\nu^n,n}(E_0) = 1.$$

Hypothèse de récurrence: Supposons que pour un certain entier $n \geq 2$ et pour tout $k \leq \nu^{n-1}$ l'on ait

$$d_{k,n-1}(E) \geq d_{k,n-1}(E_0).$$

Étape de récurrence: Soit k un entier vérifiant $1 \leq k \leq \nu^n - 1$. Alors $k = q\nu + j$, avec $j \in \{0, 1, \dots, \nu - 1\}$ et $q \in \{0, 1, \dots, \nu^{n-1} - 1\}$. Soit J un intervalle de longueur $d_{k,n}(E)$ contenant k intervalles fondamentaux d'ordre n de la construction de E . Pour la position de J , 3 situations sont possibles:

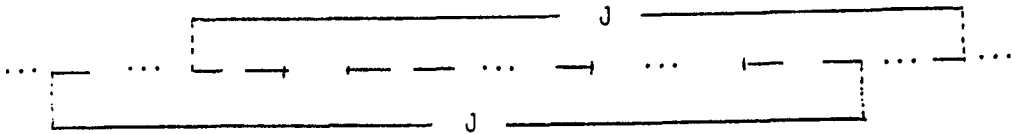
Situation 1. Les extrémités de J sont aussi des extrémités d'intervalles fondamentaux d'ordre $n - 1$.



Dans ce cas $j = 0$ et $d_{k,n}(E) = d_{q,n-1}(E)$. Puisque par hypothèse de récurrence $d_{q,n-1}(E) \geq d_{q,n-1}(E_0)$, et que par ailleurs $d_{q,n-1}(E_0) \geq d_{k,n}(E_0)$ (car ici $k = q\nu$), on a bien

$$d_{k,n}(E) \geq d_{k,n}(E_0).$$

Situation 2. Une seule des extrémités de J coïncide avec une extrémité d'intervalle fondamental d'ordre $n - 1$.



Alors $k = q\nu + j$ avec $1 \leq j \leq \nu - 1$, et

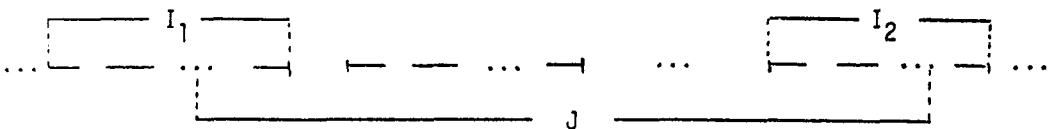
$$|J| = d_{k,n}(E) \geq d_{q+1,n-1}(E) - \xi^{n-1} + j\xi^n.$$

Par hypothèse de récurrence, $d_{q+1,n-1}(E) \geq d_{q+1,n-1}(E_0)$, d'où

$$d_{k,n}(E) \geq d_{q+1,n-1}(E_0) - \xi^{n-1} + j\xi^n \geq d_{k,n}(E_0),$$

la dernière inégalité dépendant expressément de la position des intervalles fondamentaux dans la construction de E_0 .

Situation 3. Aucune extrémité de J ne coïncide avec une extrémité d'intervalle fondamental d'ordre $n - 1$.

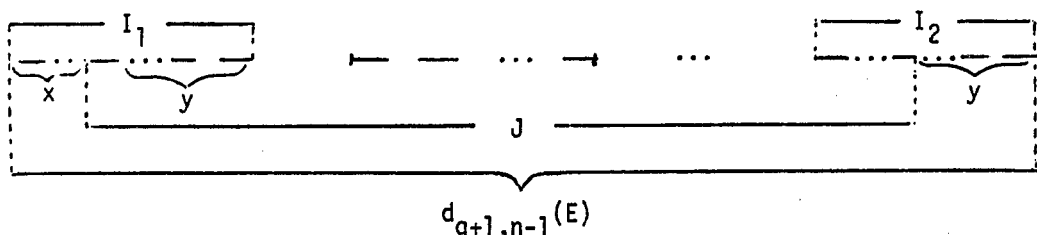


Soient I_1 et I_2 les 2 intervalles fondamentaux d'ordre $n - 1$ qui contiennent les extrémités de J , soient j_1 et j_2 les nombres d'intervalles fondamentaux d'ordre n situés respectivement dans $I_1 \cap J$ et $I_2 \cap J$.

Distinguons 3 cas:

- (a) Supposons $j_1 + j_2 > \nu$. Alors $k = q\nu + j$ avec $1 \leq j \leq \nu - 2$, et J contient exactement $q - 1$ intervalles fondamentaux d'ordre $n - 1$. En comptant I_1 et I_2 , J rencontre donc $q + 1$ intervalles fondamentaux d'ordre $n - 1$, et

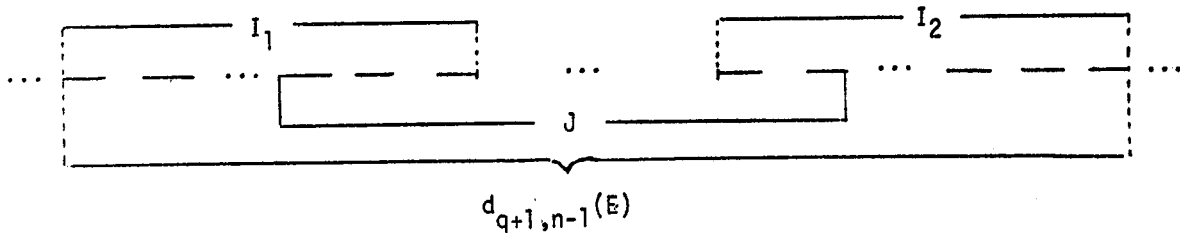
$$|J| = d_{k,n}(E) \geq d_{q+1,n-1}(E) - \xi^{n-1} + j\xi^n.$$



(N.B.: En se reportant au diagramme ci-dessus, on a $x + y \leq \xi^{n-1} - j\xi^n$.) Par hypothèse de récurrence, $d_{q+1,n-1}(E) \geq d_{q+1,n-1}(E_0)$, d'où

$$d_{k,n}(E) \geq d_{q+1,n-1}(E_0) - \xi^{n-1} + j\xi^n \geq d_{k,n}(E_0).$$

- (b) Supposons que $j_1 + j_2 = \nu$. Alors $k = q\nu$ et ici encore J rencontre $q + 1$ intervalles fondamentaux d'ordre $n - 1$.



On a

$$d_{k,n}(E) \geq d_{q+1,n-1}(E) - 2\xi^{n-1} + \nu\xi^n,$$

et puisque, par hypothèse d'induction, $d_{q+1,n-1}(E) \geq d_{q+1,n-1}(E_0)$, on obtient

$$d_{k,n}(E) \geq d_{q+1,n-1}(E_0) - 2\xi^{n-1} + \nu\xi^n \geq d_{k,n}(E_0).$$

- (c) Supposons que $j_1 + j_2 < \nu$. Alors $k = q\nu + j$ avec $2 \leq j \leq \nu - 1$ et J contient exactement q intervalles fondamentaux d'ordre $n - 1$. Tenant compte de I_1 et I_2 , J rencontre donc $q + 2$ intervalles fondamentaux d'ordre $n - 1$, et

$$\begin{aligned} d_{k,n}(E) &\geq d_{q+2,n-1}(E) - 2\xi^{n-1} + j\xi^n \\ &\geq d_{q+2,n-1}(E_0) - 2\xi^{n-1} + j\xi^n \\ &\geq d_{k,n}(E_0) \end{aligned}$$

ce qui complète l'étape de récurrence et termine la démonstration. \square

REMARQUE 4.2. La valeur minimale de $H^\alpha(E)$ ne peut s'exprimer aussi simplement que sa valeur maximale (qui est $|E|^\alpha$) en fonction des seuls paramètres $|E|, \alpha, \nu$ et ξ . Toutefois, pour le cas $\nu = 3$, nous obtiendrons plus loin des expressions donnant le minimum de $H^\alpha(E)$ (sur l'ensemble des positions possibles des intervalles fondamentaux d'ordre 1) en fonction de ξ .

5. Formule générale donnant $H^\alpha(E)$ en fonction de la position des intervalles fondamentaux d'ordre au plus $\nu + 2$. Compte tenu de nos conventions sur la définition d'un parfait homogène E , tout intervalle de longueur $d_{k,n}$ contenant k intervalles fondamentaux (de la construction de E) d'ordre n contient également $k\nu$ intervalles fondamentaux d'ordre $n + 1$, de sorte que $d_{k,n} \geq d_{k\nu, n+1}$, d'où

$$\min_{1 \leq k \leq \nu^n} k^{-1} \nu^n d_{k,n}^\alpha \geq \min_{1 \leq k \leq \nu^{n+1}} k^{-1} \nu^{n+1} d_{k,n+1}^\alpha.$$

Par conséquent, (2) peut s'écrire

$$H^\alpha(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq k \leq \nu^n} k^{-1} \nu^n d_{k,n}^\alpha. \quad (8)$$

Par la formule (2) ou (8), le calcul de $H^\alpha(E)$ doit tenir compte de la position d'une infinité d'intervalles fondamentaux. En d'autres termes, l'évaluation de $H^\alpha(E)$ par cette formule préliminaire dépend d'une infinité d'étapes de dissection et comporterait un "passage à la limite". Nous montrerons dans cette section que ce passage n'est qu'apparent, et qu'en fait

$$\min_{1 \leq k \leq \nu^{n+1}} k^{-1} \nu^{n+1} d_{k,n+1}^\alpha = \min_{1 \leq k \leq \nu^n} k^{-1} \nu^n d_{k,n}^\alpha$$

à partir d'un certain $n \leq \nu + 2$. En posant toujours $n_k = \min\{n \geq 1 : \nu^n \geq k\}$, notre résultat principal sera:

THÉORÈME 5.1. Soit E un parfait homogène de type (ν, ξ) porté par $[0, 1]$. La mesure de Hausdorff de E en dimension $\alpha = -\log \nu / \log \xi$ est donnée par la formule

$$H^\alpha(E) = \min_{1 \leq k \leq \nu^m} k^{-1} \nu^{n_k+1} d_{k, n_k+1}^\alpha, \quad (9)$$

où

$$m = \begin{cases} \nu, & \text{si } \nu = 3 \text{ ou } 4 \\ \nu + 1, & \text{si } \nu \geq 5. \end{cases}$$

Pour démontrer ce résultat, nous ferons appel aux 4 lemmes suivants:

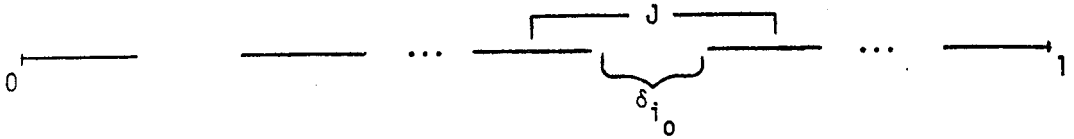
LEMME 5.2. Pour tout $k \geq 1$ et $l \geq 1$, on a

$$d_{k, n_k+l} \leq \xi^l d_{k, n_k} \text{ et } d_{k, n_k+l+1} = \xi^l d_{k, n_k+1}.$$

DÉMONSTRATION: Tout intervalle fondamental d'ordre l contient une réduction dans le rapport ξ^l de toute réunion de k intervalles fondamentaux consécutifs d'ordre n_k , cette réduction étant elle-même une réunion de k intervalles fondamentaux consécutifs d'ordre $n_k + l$. Par conséquent

$$d_{k, n_k+l} \leq \xi^l d_{k, n_k}.$$

Supposons que $d_{k,n_k+1} < \xi d_{k,n_k}$. Soit J un intervalle de longueur d_{k,n_k+1} contenant k intervalles fondamentaux d'ordre $n_k + 1$. Notons toujours $\delta_1, \dots, \delta_{\nu-1}$ les longueurs respectives (certaines possiblement nulles) des $\nu - 1$ intervalles complémentaires d'ordre 1 (certains possiblement vides). Alors J contient un intervalle complémentaire d'ordre 1 de longueur minimale, disons δ_{i_0} , et J doit être contenu dans la réunion de cet intervalle complémentaire avec 2 intervalles fondamentaux contigus d'ordre 1.



Soit I un intervalle de longueur d_{k,n_k+l+1} contenant k intervalles fondamentaux d'ordre $n_k + l + 1$. Alors I n'est pas contenu dans un intervalle fondamental d'ordre $l + 1$ car sinon I serait une réduction de rapport ξ^{l+1} d'une réunion de k intervalles fondamentaux consécutifs d'ordre n_k , ce qui est impossible puisque

$$d_{k,n_k+l+1} \leq \xi^l d_{k,n_k+1} < \xi^{l+1} d_{k,n_k}.$$

Alors I rencontre 2 intervalles fondamentaux consécutifs d'ordre $l + 1$ séparés par le plus court intervalle complémentaire possible, soit celui de longueur $\xi^l \delta_{i_0}$, et I est une réduction dans le rapport ξ^l de l'intervalle J . Par conséquent,

$$|I| = d_{k,n_k+l+1} = \xi^l d_{k,n_k+1} = \xi^l |J|,$$

et le lemme est démontré. \square

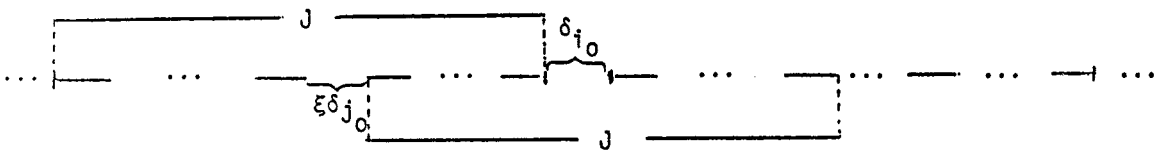
LEMME 5.3. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$d_{\nu^n, n+1} = d_{\nu, 2}.$$

DÉMONSTRATION: Conservant les notations précédentes, posons

$$\delta_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq \nu-1} \delta_i \text{ et } \delta_{j_0} = \max_{1 \leq j \leq \nu-1} \delta_j.$$

Soit J un intervalle de longueur minimale contenant ν intervalles fondamentaux d'ordre 2. Alors J est, soit de longueur ξ (si $\delta_{i_0} > \xi \delta_{j_0}$), soit de longueur $\xi - \xi \delta_{j_0} + \delta_{i_0}$ (si $\xi \delta_{j_0} > \delta_{i_0}$).



Dans le premier cas, $d_{\nu^n, n+1} = \xi = |J| = d_{\nu, 2}$ (tout $n \geq 1$) car $\delta_{i_0} > \xi^n \delta_{j_0}$.

Plaçons-nous dans le second cas, c'est-à-dire sous l'hypothèse $\xi \delta_{j_0} > \delta_{i_0}$. Un intervalle I de longueur minimale contenant ν^n intervalles fondamentaux d'ordre $n + 1$ rencontre alors 2 intervalles fondamentaux d'ordre 1. Puisque $|I|$ est minimal, les extrémités de I doivent être des extrémités d'intervalles fondamentaux d'ordre 2 (car sinon I serait de longueur $\xi - \xi^r \delta_{j_0} + \delta_{i_0}$ pour un r vérifiant $2 \leq r \leq n$) de sorte que

$$|I| = \xi - \xi \delta_{j_0} + \delta_{i_0} = |J|,$$

c'est-à-dire

$$d_{\nu^n, n+1} = d_{\nu, 2},$$

ce qui termine la démonstration. \square

LEMME 5.4. Soit ν un entier ≥ 2 . Pour tout nombre réel positif $\xi < \nu^{-1}$ et tout entier $n \geq 1$, on a

$$(\nu - 1) \sum_{i=1}^{n-1} \xi^i + \nu \xi^n < 1.$$

DÉMONSTRATION: On a

$$\begin{aligned} (\nu - 1) \sum_{i=1}^{n-1} \xi^i + \nu \xi^n &= (\nu - 1) \xi \frac{(1 - \xi^{n-1})}{1 - \xi} + \nu \xi^n \\ &= \frac{(\nu - 1) \xi - (\nu - 1) \xi^n + \nu \xi^n (1 - \xi)}{1 - \xi} \\ &= \frac{(\nu - 1) \xi + \xi^n (1 - \nu \xi)}{1 - \xi} \\ &< \frac{(\nu - 1) \xi + (1 - \nu \xi)}{1 - \xi} = 1 \end{aligned}$$

et le lemme est démontré. \square

LEMME 5.5. Soit n un entier ≥ 1 . Posons

$$p = a_n \nu^n + a_{n-1} \nu^{n-1} + \cdots + a_1 \nu + a_0 + 1,$$

où $a_j \in \{0, 1, \dots, \nu - 1\}$ pour $j = 0, 1, \dots, n$. Alors

$$d_{p, n+2} \geq a_n \xi^2 + a_{n-1} \xi^3 + \cdots + a_1 \xi^{n+1} + (a_0 + 1) \xi^{n+2}.$$

DÉMONSTRATION: Tout intervalle fondamental d'ordre 2 contient exactement ν^n intervalles fondamentaux d'ordre $n + 2$. Soit J un intervalle de longueur $d_{p, n+2}$ contenant p intervalles fondamentaux d'ordre $n + 2$. Alors, puisque $a_n \nu^n + 1 \leq p \leq (a_n + 1) \nu^n$, le nombre $r (\geq 0)$ d'intervalles fondamentaux d'ordre 2 contenus dans J est, soit $a_n + 1$, a_n ou $a_n - 1$. Appelons I l'enveloppe convexe (vide si $r = 0$) de la réunion de ces r intervalles fondamentaux d'ordre 2.

Si $I = J$, alors $r = a_n + 1$, $a_j = \nu - 1$ pour $j = 0, 1, \dots, n - 1$, $p = (a_n + 1) \nu^n$ et

$$d_{p, n+2} \geq r \xi^2 = a_n \xi^2 + \xi^2.$$

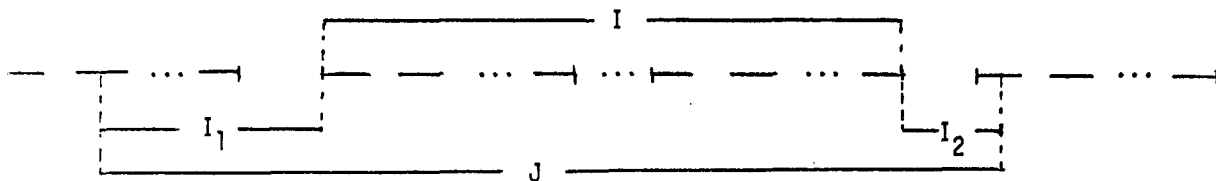
De plus, en vertu du Lemme 5.4

$$\begin{aligned} \xi^2 &> (\nu - 1) \xi^3 + (\nu - 1) \xi^4 + \cdots + (\nu - 1) \xi^{n+1} + \nu \xi^{n+2} \\ &= a_{n-1} \xi^3 + a_{n-2} \xi^4 + \cdots + a_1 \xi^{n+1} + (a_0 + 1) \xi^{n+2}, \end{aligned}$$

d'où

$$d_{p, n+2} \geq a_n \xi^2 + a_{n-1} \xi^3 + \cdots + a_1 \xi^{n+1} + (a_0 + 1) \xi^{n+2}.$$

D'autre part, si $I \neq J$ alors $r \neq a_n + 1$ et l'ensemble $J \setminus I$ est composé d'un ou de deux sous-intervalles de J , disons I_1 et I_2 (avec la possibilité qu'un des deux soit \emptyset) situés de part et d'autre de I .



Distinguons 2 cas:

- (a) Supposons que $r = a_n$. Alors $I_1 \cup I_2$ contient exactement $q_1 = a_{n-1}\nu^{n-1} + \dots + a_1\nu + a_0 + 1$ intervalles fondamentaux d'ordre $n + 2$. Même si ces derniers ne sont pas consécutifs (ils ne sont pas consécutifs seulement si $r \neq 0$, $I_1 \neq \emptyset$ et $I_2 \neq \emptyset$), par construction, $|I_1| + |I_2|$ est supérieur ou égal au diamètre d'au moins une réunion de q_1 intervalles fondamentaux consécutifs d'ordre $n + 2$ (en effet, si $r \neq 0$ avec I_1 et I_2 non vides, la réunion des intervalles fondamentaux d'ordre $n + 2$ situés dans I_2 possède une image homothétique dans l'intervalle fondamental d'ordre 2 contigu à I_1 et contenu dans I). Par conséquent

$$d_{p,n+2} = |J| = |I| + |I_1| + |I_2| \geq a_n \xi^2 + d_{q_1,n+2}.$$

- (b) Supposons que $r = a_n - 1$. Alors $I_1 \cup I_2$ contient exactement $\nu^n + q_1$ intervalles fondamentaux d'ordre $n + 2$, et par conséquent

$$|I_1| + |I_2| \geq \xi^2 + d_{q_1,n+2},$$

d'où

$$\begin{aligned} d_{p,n+2} &= |I| + |I_1| + |I_2| \\ &\geq (a_n - 1)\xi^2 + \xi^2 + d_{q_1,n+2} \\ &= a_n \xi^2 + d_{q_1,n+2}. \end{aligned}$$

Tout intervalle fondamental d'ordre 3 contient exactement ν^{n-1} intervalles fondamentaux d'ordre $n + 2$. Reprenant le même raisonnement que plus haut avec q_1 plutôt que p , on obtient immédiatement

$$d_{q_1,n+2} \geq a_{n-1} \xi^3 + d_{q_2,n+2}$$

avec $q_2 = a_{n-2}\nu^{n-2} + \dots + a_1\nu + a_0 + 1$, ou bien directement

$$d_{q_1,n+2} \geq a_{n-1} \xi^3 + a_{n-2} \xi^4 + \dots + a_1 \xi^{n+1} + (a_0 + 1) \xi^{n+2}.$$

Donc, directement ou de proche en proche, on obtient dans tous les cas

$$d_{p,n+2} \geq a_n \xi^2 + a_{n-1} \xi^3 + \dots + a_1 \xi^{n+1} + (a_0 + 1) \xi^{n+2},$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.1: En vertu du Lemme 5.2, pour tout $k \geq 1$, on a

$$\inf_{n \geq n_k} \nu^n d_{k,n}^\alpha = \nu^{n_k+1} d_{k,n_k+1}^\alpha.$$

La relation (2) s'écrit donc plus simplement

$$H^\alpha(E) = \inf_{k \geq 1} k^{-1} \nu^{n_k+1} d_{k, n_k+1}^\alpha. \tag{10}$$

Nous procédons maintenant par récurrence.

Hypothèse de récurrence: Pour un certain entier $n \geq m$, on a

$$\min_{1 \leq k \leq \nu^n} k^{-1} \nu^{n_k+1} d_{k, n_k+1}^\alpha = \min_{1 \leq k \leq \nu^m} k^{-1} \nu^{n_k+1} d_{k, n_k+1}^\alpha. \tag{11}$$

Étape de récurrence: Posons $M = \min_{1 \leq k \leq \nu^m} k^{-1} \nu^{n_k+1} d_{k, n_k+1}^\alpha$. Soit k un entier vérifiant

$$\nu^n + 1 \leq k \leq \nu^{n+1}.$$

Montrons que

$$k^{-1} \nu^{n_k+1} d_{k, n_k+1}^\alpha \geq M. \tag{12}$$

Si $k = \nu^{n+1}$, en vertu du Lemme 5.3, on a immédiatement

$$k^{-1} \nu^{n_k+1} d_{k, n_k+1}^\alpha = \nu^{-n-1} \nu^{n+2} d_{\nu, 2}^\alpha = \nu d_{\nu, 2}^\alpha \geq M$$

compte tenu de (11), et (12) est satisfait.

Nous supposerons donc que

$$\nu^n + 1 \leq k \leq \nu^{n+1} - 1,$$

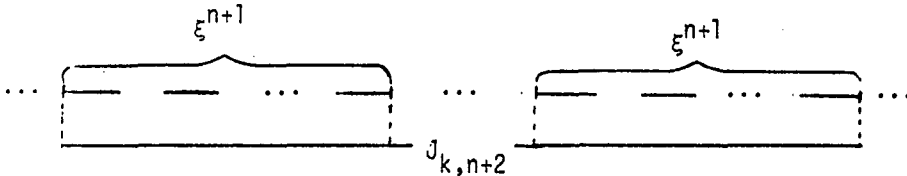
de sorte que $n_k = n + 1$. Alors k peut donc s'écrire

$$k = \epsilon_n \nu^n + \epsilon_{n-1} \nu^{n-1} + \dots + \epsilon_1 \nu + \epsilon_0,$$

où $\epsilon_j \in \{0, 1, \dots, \nu - 1\}$ pour $j = 0, 1, \dots, n$, avec $\epsilon_n \neq 0$.

Désignons par $J_{k, n+2}$ un intervalle de longueur $d_{k, n+2}$ contenant k intervalles fondamentaux d'ordre $n + 2$ ($J_{k, n+2}$ est en outre l'enveloppe convexe d'une réunion de k intervalles fondamentaux consécutifs d'ordre $n + 2$). Les extrémités de $J_{k, n+2}$ appartiennent à des intervalles fondamentaux d'ordre $n + 1$, et à ce sujet, nous distinguons 3 cas:

(a) *Premier cas:* Supposons que les deux extrémités de $J_{k, n+2}$ soient aussi des extrémités d'intervalles fondamentaux d'ordre $n + 1$.



Alors $\epsilon_0 = 0$ et $k = \nu q$, où

$$q = \epsilon_n \nu^{n-1} + \epsilon_{n-1} \nu^{n-2} + \dots + \epsilon_2 \nu + \epsilon_1 < \nu^n.$$

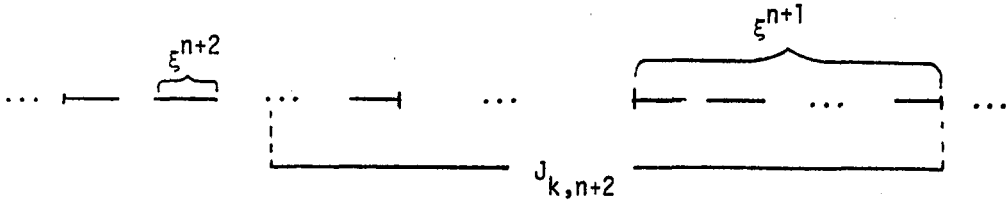
De plus

$$d_{k,n_k+1} = d_{k,n+2} = d_{q,n+1} = d_{q,n_q+1}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} k^{-1}\nu^{n_k+1}d_{k,n_k+1}^\alpha &= (\nu q)^{-1}\nu^{n+2}d_{q,n+1}^\alpha \\ &= q^{-1}\nu^{n_q+1}d_{q,n_q+1}^\alpha \\ &\geq M \text{ (par hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

(b) *Deuxième cas*: Supposons qu'une seule extrémité de $J_{k,n+2}$ soit aussi une extrémité d'intervalle fondamental d'ordre $n+1$.



Alors $\epsilon_0 = \nu - i$ pour un certain $i \in \{1, \dots, \nu - 1\}$. Posons $p = (k + i)/\nu$, de sorte que

$$\begin{aligned} p &= \epsilon_n \nu^{n-1} + \epsilon_{n-1} \nu^{n-2} + \dots + \epsilon_2 \nu + \epsilon_1 + 1 \\ &\leq \nu^n. \end{aligned}$$

En particulier, p est le nombre d'intervalles fondamentaux d'ordre $n+1$ qui rencontrent $J_{k,n+2}$. Montrons que

$$k^{-1}\nu^{n_k+1}d_{k,n_k+1}^\alpha \geq p^{-1}\nu^{n_p+1}d_{p,n_p+1}^\alpha, \tag{13}$$

sachant que $p^{-1}\nu^{n_p+1}d_{p,n_p+1}^\alpha \geq M$ par hypothèse de récurrence.

Soit I l'enveloppe convexe de la réunion des p intervalles fondamentaux d'ordre $n+1$ qui rencontrent $J_{k,n+2}$. Alors

$$|I| = |J_{k,n+2}| + i\xi^{n+2} + \xi^{n+1}(\delta_{l_1} + \dots + \delta_{l_i}),$$

où (l_1, \dots, l_i) est un des deux i -tuplets suivants: $(1, \dots, i)$ ou $(\nu - 1, \dots, \nu - i)$. Compte tenu des relations $\sum_{i=1}^\nu \delta_i = 1 - \nu\xi$, $|I| \geq d_{p,n+1}$ et $|J_{k,n+2}| = d_{k,n+2}$, on a donc

$$d_{p,n+1} \leq d_{k,n+2} + \xi^{n+2}(i + \xi^{-1} - \nu). \tag{14}$$

La relation (13), qu'on cherche à démontrer, s'écrit aussi

$$k^{-1}\nu^{n+2}d_{k,n+2}^\alpha \geq p^{-1}\nu^{n+1}d_{p,n+1}^\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{d_{k,n+2}}{d_{p,n+1}}\right)^\alpha \geq \frac{k}{\nu p} = \frac{\nu p - i}{\nu p} = 1 - \frac{i}{\nu p}. \tag{15}$$

Étant donné (14), et compte tenu du lemme 5.5, on a

$$\begin{aligned} \frac{d_{k,n+2}}{d_{p,n+1}} &\geq 1 - \frac{\xi^{n+2}(i + \xi^{-1} - \nu)}{d_{p,n+1}} \\ &\geq 1 - \frac{\xi^{n+2}(i + \xi^{-1} - \nu)}{\epsilon_n \xi^2 + \epsilon_{n-1} \xi^3 + \cdots + \epsilon_2 \xi^n + (\epsilon_1 + 1) \xi^{n+1}}. \end{aligned}$$

Pour démontrer (15), il est donc suffisant de vérifier que

$$\left(1 - \frac{i}{\nu p}\right)^{1/\alpha} \leq 1 - \frac{\xi^{n+2}(i + \xi^{-1} - \nu)}{\epsilon_n \xi^2 + \xi_{n-1} \xi^3 + \cdots + \epsilon_2 \xi^n + (\epsilon_1 + 1) \xi^{n+1}}, \quad (16)$$

ce qui s'écrit également

$$\left(1 - \frac{i}{\nu p}\right)^{\log_\nu x} + \frac{x - \nu + i}{x f_p(x)} \leq 1, \quad (17)$$

où $x = \xi^{-1}$ et $f_p(x) = \epsilon_n x^{n-1} + \cdots + \epsilon_2 x + (\epsilon_1 + 1)$. De plus, le membre gauche de (17) est décroissant dans la variable i (sa dérivée "par rapport à i " est négative). Il est donc suffisant de démontrer (17) pour le cas $i = 1$, ce qui est équivalent alors à vérifier que

$$x^{\log_\nu(1-1/\nu p)} + \frac{x - \nu + 1}{x f_p(x)} \leq 1, \quad (18)$$

c'est-à-dire, en posant $F(x) = x - x^{\log_\nu(\nu-p^{-1})}$

$$F(x) f_p(x) \geq x - \nu + 1, \quad (19)$$

(l'égalité ayant lieu à $x = \nu$).

Distinguons 3 cas:

(i) Supposons $n \geq \nu + 2$. On a

$$\begin{aligned} \left. \frac{df_p(x)}{dx} \right|_{x=\nu} &= f'_p(\nu) \geq \epsilon_n(n-1)\nu^{n-2} + \epsilon_{n-1}(n-2)\nu^{n-3} \\ &\geq \epsilon_n(\nu+1)\nu^{n-2} + \epsilon_{n-1}\nu^{n-2} \\ &= \epsilon_n \nu^{(n-1)} + (\epsilon_n + \epsilon_{n-1})\nu^{n-2} \\ &\geq \epsilon_n \nu^{(n-1)} + (\epsilon_{n-1} + 1)\nu^{n-2} \\ &\geq p. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dx} [F(x) f_p(x)] \right|_{x=\nu} &= F'(\nu) f_p(\nu) + F(\nu) f'_p(\nu) \\ &= F'(\nu) p + p^{-1} f'_p(\nu) \geq F'(\nu) p + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Le membre de gauche de (19) et sa dérivée étant des fonctions croissantes de x , l'inégalité (19) est démontrée pour $n = \nu + 2$.

(ii) Considérons le cas $n = \nu + 1$. On observe que

$$\epsilon_n \nu^\nu > (\nu - 1) \nu^{\nu-1} \geq (\nu - 1)(\epsilon_{n-2} \nu^{\nu-2} + \cdots + \epsilon_2 \nu + \epsilon_1 + 1)$$

d'où

$$\epsilon_n \nu^{\nu+1} \geq \epsilon_n (\nu - 1) \nu^\nu + (\nu - 1)(\epsilon_{n-2} \nu^{\nu-2} + \cdots + \epsilon_2 \nu + \epsilon_1 + 1)$$

ce qui s'écrit aussi

$$(\epsilon_n \nu^\nu + \epsilon_{n-1} (\nu - 1) \nu^{\nu-2}) p^{-1} \geq \nu^{-1} (\nu - 1).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} f'_p(\nu) &\geq \epsilon_n (n - 1) \nu^{n-2} + \epsilon_{n-1} (n - 2) \nu^{n-3} \\ &= \epsilon_n \nu^\nu + \epsilon_{n-1} (\nu - 1) \nu^{\nu-2}, \end{aligned}$$

d'où

$$p^{-1} f'_p(\nu) \geq \nu^{-1} (\nu - 1)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dx} [F(x) f_p(x)] \right|_{x=\nu} &= p F'(\nu) + p^{-1} f'_p(\nu) \\ &\geq p F'(\nu) + \nu^{-1} (\nu - 1) \\ &= p - (p - \nu^{-1}) \log_\nu (\nu - p^{-1}) + \nu^{-1} (\nu - 1) \\ &\geq p - (p - \nu^{-1}) + \nu^{-1} (\nu - 1) = 1, \end{aligned}$$

ce qui démontre (19) pour le cas $n = \nu + 1$.

(iii) Il reste le cas $n = \nu$ (à ne considérer que si $\nu = 3$ ou 4). Ici $p = \epsilon_\nu \nu^{\nu-1} + \cdots + \epsilon_2 \nu + \epsilon_1 + 1$. Puisque

$$p F'(\nu) = p - (p - \nu^{-1}) \log_\nu (\nu - p^{-1}) = \nu^{-1} + (\nu^{-1} - p) \log_\nu \left(1 - \frac{1}{\nu p} \right)$$

l'inégalité

$$\left. \frac{d}{dx} [F(x) f_p(x)] \right|_{x=\nu} \geq 1$$

devient

$$\nu^{-1} + (\nu^{-1} - p) \log_\nu \left(1 - \frac{1}{\nu p} \right) + p^{-1} f'_p(\nu) \geq 1. \quad (20)$$

La valeur de $(\nu^{-1} - p) \log_\nu \left(1 - \frac{1}{\nu p} \right)$ est minimale lorsque p est minimal, donc lorsque $p = \nu^{\nu-1} + 1$ (i.e. lorsque $\epsilon_\nu = 1$ et $\epsilon_{\nu-1} = \cdots = \epsilon_1 = 0$). D'autre part, si $\nu = 3$

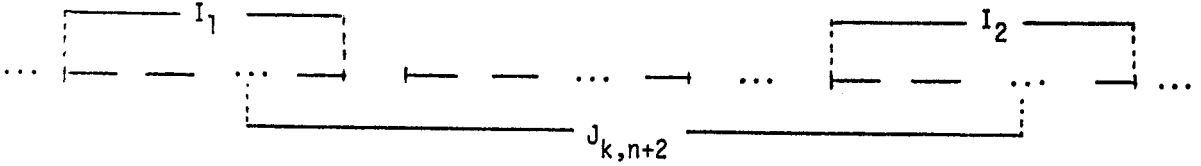
$$p^{-1} f'_p(\nu) = \frac{6\epsilon_3 + \epsilon_2}{9\epsilon_3 + 3\epsilon_2 + \epsilon_1 + 1} \geq \frac{4}{9}$$

et si $\nu = 4$

$$p^{-1} f'_p(\nu) = \frac{48\epsilon_4 + 8\epsilon_3 + \epsilon_2}{64\epsilon_4 + 16\epsilon_3 + 4\epsilon_2 + \epsilon_1 + 1} \geq \frac{75}{128},$$

les valeurs minimales respectives de $4/9$ et $75/128$ étant obtenues lorsque $\epsilon_\nu = 1$ et $\epsilon_{\nu-1} = \cdots = \epsilon_1 = \nu - 1$ (pour $\nu = 3$ ou 4). Par suite, (20) se vérifie aisément par un calcul numérique direct, et (19) est démontré.

(c) *Troisième cas*: Supposons qu'aucune extrémité de $J_{k,n+2}$ n'est une extrémité d'intervalle fondamental d'ordre $n+1$.



Soient I_1 et I_2 les deux intervalles fondamentaux d'ordre $n+1$ qui contiennent les extrémités de $J_{k,n+2}$. Distinguons à nouveau 2 cas:

- (i) Supposons que le nombre d'intervalles fondamentaux d'ordre $n+2$ situés dans $(I_1 \cup I_2) \cap J_{k,n+2}$ est supérieur à ν . Dans ce cas, ce nombre est $\nu + \epsilon_0 = 2\nu - i$ pour un certain $i \in \{1, \dots, \nu - 1\}$ (de sorte que $i = \nu - \epsilon_0$). Comme précédemment, en posant $p = (k + i)/\nu$, on obtient par le même raisonnement qu'en (b), la relation

$$d_{p,n+1} \leq d_{k,n+2} + i\xi^{n+2} + \xi^{n+1}(1 - \nu\xi).$$

et par suite

$$k^{-1}\nu^{n_k+1}d_{k,n_k+1}^\alpha \geq p^{-1}\nu^{n_p+1}d_{p,n_p+1}^\alpha \geq M.$$

- (ii) Supposons que le nombre d'intervalles fondamentaux d'ordre $n+2$ situés dans $(I_1 \cup I_2) \cap J_{k,n+2}$ soit au plus ν . Dans ce cas, ce nombre est $\nu - i$ où $i \in \{0, 1, \dots, \nu - 2\}$. Posons

$$p = (k + \nu + i)/\nu.$$

Alors p est le nombre d'intervalles fondamentaux d'ordre $n+1$ qui rencontrent $J_{k,n+2}$. Si $\epsilon_0 = 0$, alors $i = 0$ et

$$p = (k + \nu)/\nu = \epsilon_n\nu^{n-1} + \epsilon_{n-1}\nu^{n-2} + \dots + \epsilon_2\nu + \epsilon_1 + 1 \leq \nu^n.$$

De plus, en définissant l'intervalle I comme en (b) ci-haut, on a

$$|I| = |J_{k,n+2}| + \xi^{n+1} + \xi^{n+1}\delta_j \text{ (un certain } j \in \{1, \dots, \nu - 1\})$$

d'où

$$d_{p,n+1} \leq d_{k,n+2} + \xi^{n+1}(2 - \nu\xi),$$

c'est-à-dire

$$d_{p,n+1} \leq d_{k,n+2} + \xi^{n+2}(2\xi^{-1} - \nu). \quad (21)$$

Si $\epsilon_0 \neq 0$, alors $i \neq 0$ et

$$k + i = \nu^{n+1} \text{ ou } k + \nu + i \leq \nu^{n+1}$$

car si $k + i < \nu^{n+1}$, on a $\epsilon_j \leq \nu - 2$ pour au moins un indice $j \in \{1, \dots, n\}$. Considérons d'abord le cas $k + i = \nu^{n+1}$. Posons

$$q = (k + i)/\nu = \nu^n.$$

Alors

$$d_{\nu,2} = d_{q,n+1} \leq d_{k,n+2} + i\xi^{n+2} + \xi^{n+1}(1 - \nu\xi)$$

et par suite

$$k^{-1}\nu^{n_k+1}d_{k,n+2}^\alpha \geq q^{-1}\nu^{n_q+1}d_{q,n_q+1}^\alpha = \nu^{-n}\nu^{n+1}d_{\nu,2}^\alpha \geq M.$$

Reste le cas, $k + \nu + i \leq \nu^{n+1}$, pour lequel

$$p = (k + \nu + i)/\nu = \epsilon_n\nu^{n-1} + \epsilon_{n-1}\nu^{n-2} + \dots + \epsilon_2\nu + \epsilon_1 + 2 \leq \nu^n$$

et

$$d_{p,n+1} \leq d_{k,n+2} + \xi^{n+1} + i\xi^{n+2} + \xi^{n+1}(1 - \nu\xi),$$

d'où

$$d_{p,n+1} \leq d_{k,n+2} + \xi^{n+2}(i + 2\xi^{-1} - \nu). \quad (22)$$

Tenant compte de (21), la relation (22) est satisfaite pour $i = 0, 1, \dots, \nu - 2$. L'inégalité (13) qui reste à démontrer dans ce dernier cas équivaut à

$$\left(\frac{d_{k,n+2}}{d_{p,n+1}}\right)^\alpha \geq \frac{k}{\nu p} = \frac{\nu p - \nu - i}{\nu p} = 1 - \frac{(\nu + i)}{\nu p}. \quad (23)$$

En vertu de (22), et compte tenu du lemme 5.5, on a

$$\begin{aligned} \frac{d_{k,n+2}}{d_{p,n+1}} &\geq 1 - \frac{\xi^{n+2}(i + 2\xi^{-1} - \nu)}{d_{p,n+1}} \\ &\geq 1 - \frac{\xi^{n-2}(i + 2\xi^{-1} - \nu)}{\epsilon_n\xi^2 + \epsilon_{n-1}\xi^3 + \dots + \epsilon_2\xi^n + (\epsilon_1 + 2)\xi^{n+1}}. \end{aligned}$$

Pour démontrer (23), il est donc suffisant de démontrer que

$$\left(1 - \frac{(\nu + i)}{\nu p}\right)^{1/\alpha} \geq 1 - \frac{\xi^{n+2}(i + 2\xi^{-1} - \nu)}{\epsilon_n\xi^2 + \dots + \epsilon_2\xi^n + (\epsilon_1 + 2)\xi^{n+1}}$$

c'est-à-dire

$$\left(1 - \frac{(\nu + i)}{\nu p}\right)^{\log_\nu x} + \frac{i + 2x - \nu}{xg_p(x)} \leq 1, \quad (24)$$

où $x = \xi^{-1}$ et $g_p(x) = \epsilon_n x^{n-1} + \dots + \epsilon_2 x + \epsilon_1 + 2$. De plus, le membre gauche de (24) est décroissant dans la variable i (sa dérivée "par rapport à i " est négative). Il est donc suffisant de démontrer (24) pour le cas $i = 0$, qui s'écrit sous la forme équivalente

$$x^{\log_\nu(1-p^{-1})} + \frac{2x - \nu}{xg_p(x)} \leq 1, \quad (25)$$

ou encore

$$\left[1 - x^{\log_\nu(1-p^{-1})}\right] g_p(x) \geq 2 - \nu x^{-1} \quad (26)$$

(l'égalité ayant lieu à $x = \nu$). Soit $G(x)$ le membre gauche de (26). On vérifie aisément que $G'(x)$ est une fonction croissante de x et que $p^{-1}g'_p(\nu) \geq \nu^{-1}$, d'où

$$G'(\nu) = (p-1)\nu^{-1} \log_\nu \left(1 + \frac{1}{p-1}\right) + g'_p(\nu)p^{-1} \geq \nu^{-1} = \frac{d}{dx}(2 - \nu x^{-1}) \Big|_{x=\nu}$$

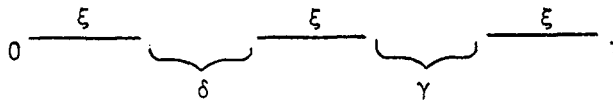
ce qui démontre (26) et par suite (13).

Ceci complète l'étape de récurrence et termine la démonstration. \square

COROLLAIRE 5.6. *En considérant le parfait homogène E de type (ν, ξ) porté par $[0, 1]$ comme dépendant des variables $\delta_1, \dots, \delta_{\nu-1}$, $H^\alpha(E)$ est alors une fonction continue et analytique par morceaux des variables $\delta_1, \dots, \delta_{\nu-1}$ liées par la relation $\delta_1 + \dots + \delta_{\nu-1} = 1 - \nu\xi$.*

DÉMONSTRATION: Le diamètre d'une réunion de k intervalles fondamentaux consécutifs d'ordre n est une fonction linéaire (ou affine) des variables $\delta_1, \dots, \delta_{\nu-1}$. Le corollaire résulte alors directement de la définition des $d_{k,n}$ et de la formule (9). \square

6. Étude détaillée de $H^\alpha(E)$ dans le cas $\nu = 3$. Soit E un parfait homogène de type $(3, \xi)$ porté par $[0, 1]$, δ et γ les distances entre les intervalles fondamentaux consécutifs d'ordre 1:



Nous supposons pour simplifier (mais sans perte de généralité pour des raisons de symétrie) que $\delta \leq \gamma$, de sorte que δ puisse varier entre 0 et $(1 - 3\xi)/2$.

L'objet de cette dernière section est de présenter des formules explicites donnant $H^\alpha(E)$ en fonction de ξ et δ .

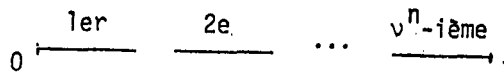
Dans [4], nous avons établi que

$$H^\alpha(E) = 1 \Leftrightarrow \xi^{1-\log_3 2} - 2\xi \leq \delta \leq (1 - 3\xi)/2,$$

compte tenu des identités $\alpha^{-1} = \log_3 \xi^{-1}$ et $2^{\log_3 \xi^{-1}} = \xi^{-\log_3 2}$. Nous évaluerons maintenant $H^\alpha(E)$ lorsque

$$\gamma\xi \leq \delta \leq \xi^{1-\log_3 2} - 2\xi.$$

Pour tout $n \geq 1$, considérons les ν^n intervalles fondamentaux d'ordre n comme étant "ordonnés de gauche à droite", de sorte que le premier débute à 0 et le dernier se termine à 1.



LEMME 6.1. *Si $\delta \geq \gamma\xi$, alors pour tout $n \geq 1$ la réunion des k premiers intervalles fondamentaux d'ordre n est de diamètre $d_{k,n}$, de sorte que*

$$d_{k,n+1} = \xi d_{k,n}.$$

DÉMONSTRATION: Pour $n = 1$, l'énoncé est trivial.

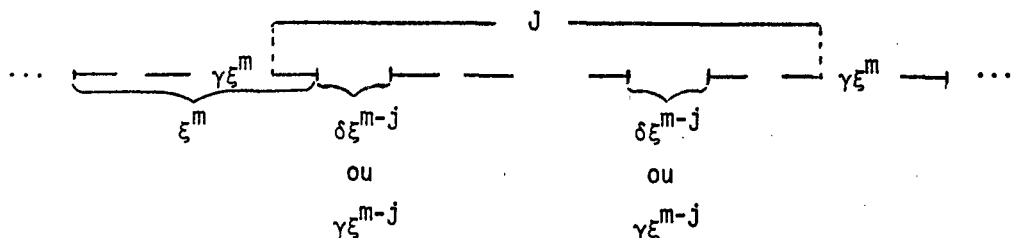


Supposons l'énoncé vrai pour $n = m$ et montrons qu'il demeure vrai pour $n = m + 1$.

Soit J l'enveloppe convexe d'une réunion de diamètre minimale de k intervalles fondamentaux consécutifs d'ordre $m + 1$, de sorte que $|J| = d_{k,m+1}$. Distinguons 2 cas:

(a) Supposons que $k = 3q$, pour un certain entier q .

Si J rencontre $q + 1$ intervalles fondamentaux d'ordre m alors, compte tenu de la relation $\delta \geq \gamma\xi$, $|J|$ est supérieur (d'une quantité $\delta\xi^{m-j} - \gamma\xi^m$ ou $\gamma\xi^{m-j} - \gamma\xi^m$) au diamètre d'une réunion de q intervalles fondamentaux d'ordre m qui rencontrent J .

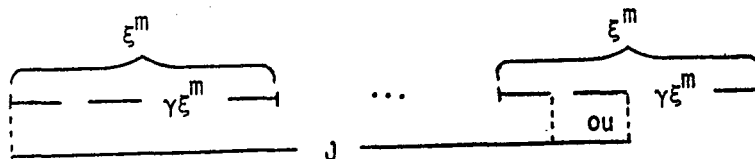


Ceci contredirait (si $\delta > \gamma\xi$) la minimalité de $|J|$ (pour un intervalle contenant k intervalles fondamentaux consécutifs d'ordre $m + 1$). Par conséquent $|J|$ est égal au diamètre d'une réunion de q intervalles fondamentaux consécutifs d'ordre m , ce qui, par hypothèse de récurrence, coïncide avec le diamètre de la réunion des q premiers intervalles fondamentaux d'ordre m . Donc la réunion des k premiers intervalles fondamentaux d'ordre $m + 1$ est aussi de diamètre $|J| = d_{k,m+1} = d_{q,m}$.

D'autre part, si J rencontre seulement q intervalles fondamentaux d'ordre m alors J est l'enveloppe convexe de leur réunion et la conclusion est la même.

(b) Supposons que $k = 3q + i$, où $i = 1$ ou 2 . Alors

$$|J| = d_{q+1,m} - (3 - i)\xi^{m+1} - \begin{cases} \gamma\xi^m, & \text{si } i = 2 \\ (\delta + \gamma)\xi^m, & \text{si } i = 1 \end{cases}$$



ce qui (en faisant intervenir l'hypothèse de récurrence) coïncide avec le diamètre de la réunion des k premiers intervalles fondamentaux d'ordre $m + 1$.

Puisque les k premiers intervalles fondamentaux d'ordre $n_k + 1$ se trouvent dans le premier intervalle fondamental d'ordre 1, on a immédiatement

$$d_{k,n_k+1} = \xi d_{k,n_k},$$

et le lemme est démontré. \square

THÉOREME 6.2. Soit E un parfait homogène de type $(3, \xi)$ porté par $[0, 1]$. Alors si $\delta \geq \gamma\xi$, on a

$$H^\alpha(E) = \min_{1 \leq k \leq 9} k^{-1} 3^{n_k} d_{k,n_k}^\alpha. \tag{27}$$

DÉMONSTRATION: En vertu du Théorème 5.1 et du Lemme 6.1, on a

$$H^\alpha(E) = \min_{1 \leq k \leq 27} k^{-1} 3^{n_k} d_{k,n_k}^\alpha. \tag{28}$$

Soit M le membre droit de (27). Montrons que si $10 \leq k \leq 27$,

$$k^{-1} 3^{n_k} d_{k,n_k}^\alpha \geq M. \tag{29}$$

On sait que pour $k = 27$, $n_k = 3$ et $d_{k,n_k} = 1$ d'où

$$k^{-1} 3^{n_k} d_{k,n_k}^\alpha = 1 = 3^{-1} 3^{n_3} d_{3,n_3}^\alpha \geq M.$$

Supposons maintenant que $10 \leq k \leq 26$, de sorte que $n_k = 3$. Alors

$$k = \epsilon_2 \cdot 3^2 + \epsilon_1 \cdot 3 + \epsilon_0 = 9\epsilon_2 + 3\epsilon_1 + \epsilon_0,$$

où $\epsilon_2 \in \{1, 2\}$, $\epsilon_j \in \{0, 1, 2\}$ pour $j = 0$ et 1 .

Si $k \equiv 0 \pmod{3}$, posons $p = k/3$. Alors, en vertu de 6.1,

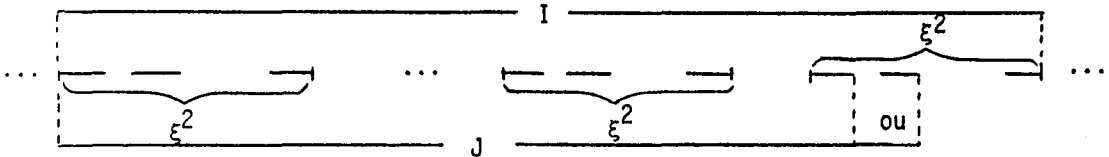
$$d_{k,3} = d_{p,2},$$

car le diamètre de la réunion des k premiers intervalles fondamentaux d'ordre 3 coïncide avec celui de la réunion des p premiers d'ordre 2, et dans ce cas

$$k^{-1} 3^3 d_{k,3}^\alpha = (3p)^{-1} 3^3 d_{p,2}^\alpha = p^{-1} 3^2 d_{p,2}^\alpha \geq M$$

puisque $p \leq 8$.

Pour la suite, on supposera donc que $\epsilon_0 = 1$ ou 2 . Posons $i = 3 - \epsilon_0$, de sorte que $k + i = 3p$, pour un certain entier $p \geq 4$.



Soit J l'enveloppe convexe de la réunion des k premiers intervalles fondamentaux d'ordre 3, et I l'enveloppe convexe de la réunion des p intervalles fondamentaux d'ordre 2 qui rencontrent J . Alors

$$p = 3\epsilon_2 + \epsilon_1 + 1$$

et

$$|I| = |J| + i\xi^3 + \xi^2 \cdot \begin{cases} \gamma, & \text{si } i = 1 \\ \delta + \gamma, & \text{si } i = 2. \end{cases} \tag{30}$$

Traitons le cas $i = 2$. Puisque $\delta + \gamma = 1 - 3\xi$, (30) devient

$$\begin{aligned} |I| &= |J| + 2\xi^3 + \xi^2(1 - 3\xi) \\ &= |J| + \xi^3(\xi^{-1} - 1) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$d_{p,2} = d_{k,3} + \xi^3(\xi^{-1} - 1). \quad (31)$$

Pour obtenir (29), il suffit de démontrer que

$$k^{-1}3^3 d_{k,3}^\alpha \geq p^{-1}3^2 d_{p,2}^\alpha \quad (\text{car } p \leq 8) \quad (32)$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{d_{k,3}}{d_{p,2}}\right)^\alpha \geq \frac{k}{3p} = \frac{3p-2}{3p} = 1 - \frac{2}{3p}. \quad (33)$$

D'autre part, étant donnée la position de I , on a

$$d_{p,2} \geq \epsilon_2 \xi + (\epsilon_1 + 1)\xi^2. \quad (34)$$

Combinant (31) et (34), on obtient

$$\frac{d_{k,3}}{d_{p,2}} \geq 1 - \frac{\xi^3(\xi^{-1} - 1)}{\epsilon_2 \xi + (\epsilon_1 + 1)\xi^2}.$$

Pour démontrer (33), il est donc suffisant de vérifier que

$$1 - \frac{\xi^3(\xi^{-1} - 1)}{\epsilon_2 \xi + (\epsilon_1 + 1)\xi^2} \geq \left(1 - \frac{2}{3p}\right)^{1/\alpha}$$

c'est-à-dire

$$\left(1 - \frac{2}{3p}\right)^{\log_3 x} + \frac{x-1}{x f_p(x)} \leq 1 \quad (35)$$

où $x = \xi^{-1}$ et $f_p(x) = \epsilon_2 x + \epsilon_1 + 1$. Par suite, (35) se démontre de la même façon que (17).

Reste à traiter le cas $i = 1$. De (30), on a

$$|I| = |J| + \xi^3 + \xi^2 \gamma. \quad (36)$$

D'autre part, par hypothèse $\gamma \xi \leq \delta = 1 - 3\xi - \gamma$, d'où

$$\gamma \leq (1 - 3\xi)(1 + \xi)^{-1},$$

et par conséquent, de (36), on tire

$$|I| \leq |J| + \xi^3(\xi + \xi^{-1} - 2)(1 + \xi)^{-1},$$

c'est-à-dire

$$d_{p,2} \leq d_{k,3} + \xi^3(\xi + \xi^{-1} - 2)(1 + \xi)^{-1}. \quad (37)$$

Pour obtenir (32), et par conséquent (29), il suffit, compte tenu de (34) et (37), de démontrer que

$$1 - \frac{\xi^3(\xi + \xi^{-1} - 2)(1 + \xi)^{-1}}{\epsilon_2 \xi + (\epsilon_1 + 1)\xi^2} \geq \left(1 - \frac{1}{3p}\right)^{1/\alpha},$$

c'est-à-dire

$$\left(1 - \frac{1}{3p}\right)^{\log_3 x} + \frac{(x-1)^2}{x(x+1)f_p(x)} \leq 1, \quad (38)$$

où $x = \xi^{-1}$ et $f_p(x) = \epsilon_2 x + \epsilon_1 + 1$. Finalement, on vérifie (38) par la même méthode déjà utilisée pour le cas de (24) et (17), ce qui termine la démonstration. \square

COROLLAIRE 6.3. Si $\gamma\xi \leq \delta \leq \xi^{1-\log_3 2} - 2\xi$, on a

$$H^\alpha(E) = \min\{(2 + \delta x)^\alpha/2, (x + 2 + \delta x + \delta x^2)^\alpha/5\} \quad (39)$$

où $x = \xi^{-1}$ et $\alpha = \log_x 3$.

DÉMONSTRATION: Posons

$$P_k = k^{-1} 3^{n_k} d_{k, n_k}^\alpha, \quad (k = 1, 2, \dots, 9).$$

Alors

$$\begin{aligned} P_1 &= 1^{-1} \cdot 3 \cdot \xi^\alpha = 1 \\ P_2 &= 2^{-1} \cdot 3(2\xi + \delta)^\alpha = 2^{-1}(2 + \delta x)^\alpha \\ P_3 &= 3^{-1} \cdot 3 \cdot 1^\alpha = 1 \\ P_4 &= 4^{-1} \cdot 3^2(\xi + \delta + \xi^2)^\alpha = 4^{-1}(x + 1 + \delta x^2)^\alpha \\ P_5 &= 5^{-1} \cdot 3^2(\xi + \delta + 2\xi^2 + \delta\xi)^\alpha = 5^{-1}(x + 2 + \delta x + \delta x^2)^\alpha \\ P_6 &= 6^{-1} \cdot 3^2(2\xi + \delta)^\alpha = 2^{-1}(2 + \delta x)^\alpha \\ P_7 &= 7^{-1} \cdot 3^2(2\xi + 1 - 3\xi + \xi^2)^\alpha = 7^{-1}(x^2 - x + 1)^\alpha \\ P_8 &= 8^{-1} \cdot 3^2(1 - \xi + 2\xi^2 + \delta\xi)^\alpha = 8^{-1}(x^2 - x + 2 + \delta x)^\alpha \\ P_9 &= 9^{-1} \cdot 3^2 \cdot 1^\alpha = 1 \end{aligned}$$

L'hypothèse $\gamma\xi \leq \delta \leq \xi^{1-\log_3 2} - 2$ devient (avec $x = \xi^{-1}$)

$$(x - 3)(x^2 + x)^{-1} \leq \delta \leq x^{-1}(x^{\log_3 2} - 2). \quad (40)$$

De plus, on note que la condition $\delta \leq x^{-1}(x^{\log_3 2} - 2)$ équivaut à $2^{-1}(2 + \delta x)^\alpha \leq 1$, c'est-à-dire

$$P_2 \leq P_1 = P_3 = P_9.$$

On obtient par un calcul élémentaire que

$$P_7 = 7^{-1}(x^2 - x + 1)^\alpha \geq 1 \geq 2^{-1}(2 + \delta x)^\alpha = P_2 = P_6,$$

de même que (en faisant intervenir (40))

$$P_8 = 8^{-1}(x^2 - x + 2 + \delta x)^\alpha \geq 2^{-1}(2 + \delta x)^\alpha = P_2,$$

et aussi

$$P_4 = 4^{-1}(x + 1 + \delta x^2)^\alpha \geq 2^{-1}(2 + \delta x)^\alpha = P_2.$$

Toutefois, pour $\delta = (x - 3)(x^2 + x)^{-1}$, un calcul de dérivées nous montre que

$$P_5 = 5^{-1}(x + 2 + \delta x + \delta x^2)^\alpha < 2^{-1}(2 + \delta x)^\alpha = P_2$$

pour x dans un certain intervalle $[3, 3 + \epsilon[$ tandis que

$$P_2 \leq P_5$$

si $x \in [3 + \epsilon, \infty[$.

En vertu de 6.2, le résultat est alors démontré. \square

Dans le cas $0 < \delta \leq \gamma\xi$, la liste des formules explicites obtenues pour les quantités d_{k, n_k+1} ($1 \leq k \leq 27$) est plutôt longue et sa vérification fastidieuse. Nous l'omettons à la suggestion de l'arbitre. Signalons toutefois, qu'une conséquence immédiate de ces formules et de celles données plus haut est que la quantité $H^\alpha(E)$ est une fonction continue et strictement croissante de δ sur l'intervalle $0 < \delta \leq \xi^{1-\log_3 2} - 2\xi$.

Nous traitons maintenant le cas $\delta = 0$, c'est-à-dire le cas pour lequel (comme le confirme le Théorème 4.1) $H^\alpha(E)$ est minimal.

PROPOSITION 6.4. Lorsque $\delta = 0$, $H^\alpha(E)$ est le plus petit des quatre nombres suivants: $3^{\alpha-1}$, $(2x+2)^\alpha/8$, $(x^2+2x+2)^\alpha/17$ et $(2x^2+x+2)^\alpha/23$, où $\alpha = \alpha(x) = \log 3/\log x$ et $x = \xi^{-1}$.

DÉMONSTRATION: Lorsque $\delta = 0$, on a $\gamma = 1-3\xi$, et les quantités d_{k,n_k+1} ($1 \leq k \leq 27$) ne dépendent plus que de ξ . On exprime alors tous ces d_{k,n_k+1} en fonction de x (où $x = \xi^{-1}$), et en posant

$$A_k = x^{n_k+1} d_{k,n_k+1},$$

on calcule les expressions $k^{-1}A_k^\alpha$ ($1 \leq k \leq 27$).

En vertu de 5.1, on a $H^\alpha(E) = \min_{1 \leq k \leq 27} k^{-1}A_k^\alpha$. La position des intervalles fondamentaux d'ordre ≤ 4 conduit aux résultats suivants: $A_1 = 1$ et

$$2^{-1}A_2^\alpha = 2^{\alpha-1}$$

$$8^{-1}A_8^\alpha = 8^{-1}(2x+2)^\alpha$$

$$3^{-1}A_3^\alpha = 3^{\alpha-1}$$

$$9^{-1}A_9^\alpha = 9^{-1}(3x)^\alpha = 3^{-1}A_3^\alpha$$

$$4^{-1}A_4^\alpha = 4^{-1}(x+1)^\alpha$$

$$10^{-1}A_{10}^\alpha = 10^{-1}(x^2+1)^\alpha$$

$$5^{-1}A_5^\alpha = 5^{-1}(x+2)^\alpha$$

$$11^{-1}A_{11}^\alpha = 11^{-1}(x^2+2)^\alpha$$

$$6^{-1}A_6^\alpha = 6^{-1}(x+3)^\alpha$$

$$12^{-1}A_{12}^\alpha = 12^{-1}(x^2+3)^\alpha$$

$$7^{-1}A_7^\alpha = 7^{-1}(2x+1)^\alpha$$

$$13^{-1}A_{13}^\alpha = 13^{-1}(x^2+x+1)^\alpha$$

$$14^{-1}A_{14}^\alpha = 14^{-1}(x^2+x+2)^\alpha$$

$$21^{-1}A_{21}^\alpha = 21^{-1}(2x^2+3)^\alpha$$

$$15^{-1}A_{15}^\alpha = 15^{-1}(x^2+x+3)^\alpha$$

$$22^{-1}A_{22}^\alpha = 22^{-1}(2x^2+x+1)^\alpha$$

$$16^{-1}A_{16}^\alpha = 16^{-1}(x^2+2x+1)^\alpha$$

$$23^{-1}A_{23}^\alpha = 23^{-1}(2x^2+x+2)^\alpha$$

$$17^{-1}A_{17}^\alpha = 17^{-1}(x^2+2x+2)^\alpha$$

$$24^{-1}A_{24}^\alpha = 24^{-1}(2x^2+2x)^\alpha = 8^{-1}A_8^\alpha$$

$$18^{-1}A_{18}^\alpha = 18^{-1}(x^2+3x)^\alpha = 6^{-1}A_6^\alpha$$

$$25^{-1}A_{25}^\alpha = 25^{-1}(3x^2-x+1)^\alpha$$

$$19^{-1}A_{19}^\alpha = 19^{-1}(2x^2+1)^\alpha$$

$$26^{-1}A_{26}^\alpha = 26^{-1}(3x^2-x+2)^\alpha$$

$$20^{-1}A_{20}^\alpha = 20^{-1}(2x^2+2)^\alpha$$

$$27^{-1}A_{27}^\alpha = 27^{-1}(3x^2)^\alpha = 3^{-1}A_3^\alpha.$$

Pour toute constante $K \geq 0$ et $\beta \in [0, 1]$, la fonction (de t) $t^{-1}(K+t)^\beta$ est décroissante sur $]0, \infty[$. Par conséquent, on a

$$2^{-1}A_2^\alpha \geq 3^{-1}A_3^\alpha$$

$$4^{-1}A_4^\alpha \geq 5^{-1}A_5^\alpha \geq 6^{-1}A_6^\alpha$$

$$7^{-1}A_7^\alpha \geq 8^{-1}A_8^\alpha$$

$$10^{-1}A_{10}^\alpha \geq 11^{-1}A_{11}^\alpha \geq 12^{-1}A_{12}^\alpha$$

$$13^{-1}A_{13}^\alpha \geq 14^{-1}A_{14}^\alpha \geq 15^{-1}A_{15}^\alpha$$

$$16^{-1}A_{16}^\alpha \geq 17^{-1}A_{17}^\alpha$$

$$19^{-1}A_{19}^\alpha \geq 20^{-1}A_{20}^\alpha \geq 21^{-1}A_{21}^\alpha$$

$$22^{-1}A_{22}^\alpha \geq 23^{-1}A_{23}^\alpha$$

$$25^{-1}A_{25}^\alpha \geq 26^{-1}A_{26}^\alpha.$$

Alors, compte tenu des identités

$$3^{-1}A_3^\alpha = 9^{-1}A_9^\alpha = 27^{-1}A_{27}^\alpha$$

$$6^{-1}A_6^\alpha = 18^{-1}A_{18}^\alpha \text{ et } 8^{-1}A_8^\alpha = 24^{-1}A_{24}^\alpha,$$

$$H^\alpha(E) = \min\{k^{-1}A_k^\alpha : k = 3, 6, 8, 12, 15, 17, 21, 23 \text{ et } 26\}. \quad (41)$$

Poursuivant plus loin les comparaisons,

$$\begin{aligned} 15^{-1}A_{15}^\alpha &= 15^{-1}(x^2 + 3 + x)^\alpha \\ &= 5^{-1}x^{-\alpha}(A_{12} + x)^\alpha \\ &= (4 + 1)^{-1}(x^{-1}A_{12} + 1)^\alpha \\ &\leq 4^{-1}(x^{-1}A_{12})^\alpha = 12^{-1}A_{12}^\alpha. \end{aligned}$$

D'autre part, les inégalités

$$k^{-1}A_k^\alpha \geq 8^{-1}A_8^\alpha, \quad k = 6, 15 \text{ et } 21$$

équivalent (car $\alpha = \log_x 3$) respectivement à

$$\begin{aligned} (x + 3)x^{\log_3 8} &\geq (2x + 2)x^{\log_3 6} && (\text{si } k = 6) \\ (x^2 + x + 3)x^{\log_3 8} &\geq (2x + 2)x^{\log_3 15} && (\text{si } k = 15) \end{aligned}$$

et

$$(2x^2 + 3)x^{\log_3 8} \geq (2x + 2)x^{\log_3 21} \quad (\text{si } k = 21).$$

Ces dernières inégalités sont facilement vérifiées en comparant les dérivées premières et secondes (par rapport à x) de chaque membre.

Montrons en dernier lieu que

$$26^{-1}A_{26}^\alpha \geq \min\{3^{-1}A_3^\alpha, 8^{-1}A_8^\alpha\}.$$

Pour $x > 3$ fixé, la fonction

$$\varphi(s) = (3x^s - x + 2)^\alpha(3^{s+1} - 1)$$

définie sur $[1, \infty[$ est croissante si $(x/3)^s < x - 2$ et décroissante si $(x/3)^s > x - 2$. Puisque

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 8^{-1}(2x + 2)^\alpha \text{ et} \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi(s) &= 3^{\alpha-1} \\ &= 8^{-1}A_{26}^\alpha && = 3^{-1}A_3^\alpha \end{aligned}$$

alors

$$26^{-1}A_{26}^\alpha = \varphi(2) \geq \min\{3^{-1}A_3^\alpha, 8^{-1}A_8^\alpha\}.$$

Nous pouvons donc éliminer de la formule (41) les valeurs de $k^{-1}A_k^\alpha$ pour $k = 6, 12, 15$ et 26 , et par conséquent la démonstration de 6.4 est complète. \square

REMARQUE 6.5. Lorsque $\delta = 0$ et $\xi = 1/4$ (donc $x = 4$), E est alors un "ensemble de Cantor" (voir paragraphe 3), défini comme l'ensemble des nombres réels de $[0, 1]$ pour lesquels le chiffre 2 n'apparaît pas dans le développement en base 4. En appliquant 6.4 avec $x = 4$, on retrouve le résultat de Best [1] et Wegmann [6]: $H^\alpha(E) = 10^\alpha/8$.

7. La relation entre $H^\alpha(E)$ et la fonction de Cantor-Lebesgue associée à E . Soit E un parfait homogène de type (ν, ξ) porté par $[0, 1]$. Soit $L_n(t)$ la fonction continue définie sur $[0, 1]$, vérifiant $L_n(0) = 0$ et $L_n(1) = 1$, croissant linéairement de ν^{-n} dans chaque intervalle fondamental d'ordre n ($n \geq 1$) et constante sur tout intervalle complémentaire à E . Si $n \rightarrow \infty$, $L_n(t)$ tend uniformément vers une fonction $L(t)$ continue définie sur $[0, 1]$, constante sur chaque intervalle complémentaire à E , croissante au sens large, qu'on appelle *fonction de Cantor-Lebesgue associée à E* .

Notons $\omega_L(t)$ le module de continuité de L défini par

$$\omega_L(t) = \sup_{|s-s'|\leq t} |L(s) - L(s')|, \quad (0 \leq t \leq 1).$$

THÉORÈME 7.1. $H^\alpha(E) = \inf_{t>0} \frac{t^\alpha}{\omega_L(t)}$.

DÉMONSTRATION: La fonction L étant croissante.

$$\omega_L(t) = \sup_{s'-s=t} L(s') - L(s), \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Fixons $t_0 \in]0, 1]$. Soit s_0 et s'_0 tels que $s_0 < s'_0$ et

$$\omega_L(t_0) = L(s'_0) - L(s_0).$$

Notons θ_1 (respectivement θ_2) l'ensemble des extrémités gauches (respectivement droites) d'intervalles fondamentaux de la construction de E .

Soit $\epsilon > 0$. Par définition de L et de E , il existe $x_1 \in \theta_1$ et $x_2 \in \theta_2$ tels que $[x_1, x_2] \subset]s_0, s'_0]$ et

$$L(x_1) - L(s_0) < \frac{\epsilon}{2} \text{ et } L(s'_0) - L(x_2) < \frac{\epsilon}{2},$$

de sorte que

$$L(s'_0) - L(s_0) < L(x_2) - L(x_1) + \epsilon. \tag{42}$$

(En effet, on a $\omega_L(t_0) > 0$, d'où $]s_0, s'_0[\cap E \neq \emptyset$. De plus, $L(s_0) = \inf_{\substack{x_1 > s_0 \\ x_1 \in \theta_1}} L(x_1)$ et $L(s'_0) = \sup_{\substack{x_2 < s'_0 \\ x_2 \in \theta_2}} L(x_2)$.)

Pour un certain choix d'entiers k et n , l'intervalle $[x_1, x_2]$ contient exactement k intervalles fondamentaux d'ordre n , d'où

$$x_2 - x_1 \geq d_{k,n},$$

et compte tenu de (2) et (42)

$$\begin{aligned} H^\alpha(E) &\leq k^{-1} \nu^n d_{k,n}^\alpha \\ &= \frac{d_{k,n}^\alpha}{L(x_2) - L(x_1)} \\ &\leq \frac{(x_2 - x_1)^\alpha}{L(x_2) - L(x_1)} \\ &\leq \frac{(s'_0 - s_0)^\alpha}{L(s'_0) - L(s_0) - \epsilon}. \end{aligned}$$

Mais ϵ étant arbitraire, on obtient

$$H^\alpha(E) \leq \frac{(s'_0 - s_0)^\alpha}{L(s'_0) - L(s_0)} = \frac{t_0^\alpha}{\omega_L(t_0)},$$

d'où, t_0 étant quelconque dans $[0, 1]$,

$$H^\alpha(E) \leq \inf_{t>0} \frac{t^\alpha}{\omega_L(t)}.$$

L'inégalité inverse est presque immédiate car pour tout intervalle $[x_1, x_2]$ avec $x_1 \in \theta_1$ et $x_2 \in \theta_2$, on a

$$L(x_2) - L(x_1) \leq \omega_L(x_2 - x_1)$$

d'où, compte tenu de (2),

$$\begin{aligned} H^\alpha(E) &= \inf_{\substack{x_1 \in \theta_1 \\ x_2 \in \theta_2}} \frac{(x_2 - x_1)^\alpha}{L(x_2) - L(x_1)} \\ &\geq \inf_{\substack{x_1 \in \theta_1 \\ x_2 \in \theta_2}} \frac{(x_2 - x_1)^\alpha}{\omega_L(x_2 - x_1)} \geq \inf_{t>0} \frac{t^\alpha}{\omega_L(t)}, \end{aligned}$$

et le théorème est démontré. \square

REMARQUE FINALE. Dans notre définition "élargie" d'un parfait homogène linéaire de type (ν, ξ) , on ne pourrait pas aller plus loin et permettre aux intervalles fondamentaux $\varphi_i(K)$ de se chevaucher sur une distance non-nulle (au lieu de leur permettre au plus un point de contact) car, en vertu d'une étude portant sur des fractals de structure plus complexe ([5]), la dimension de Hausdorff du fractal E que l'on obtiendrait pourrait être inférieur à $\log \nu / \log \xi^{-1}$. D'ailleurs, on donne dans [5] un exemple où c'est effectivement le cas, et l'on peut faire la conjecture que dès qu'il y a chevauchement des intervalles fondamentaux d'ordre 1 alors $\dim E < \log \nu / \log \xi^{-1}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Best, E., *On Sets of Fractional Dimensions III*, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **47** (1942), 436-454.
2. Gierl, A., *Über das Hausdorffsche Mass gewisser Punktmengen in der Zifferntheorie*, J. Reine angew. Math. **202** (1959).
3. Kahane, J.P. et Salem, R., "Ensembles parfaits et séries trigonométriques," Hermann, Paris, 1963.
4. Marion, J., *Mesure de Hausdorff d'un fractal à similitude interne*, Annales des sciences mathématiques du Québec, no 1, **10** (1986), 51-84.
5. Marion, J., *Mesures de Hausdorff et théorie de Perron-Frobenius des matrices non-négatives*, Annales de l'Institut Fourier, Grenoble, **4**, **35** (1985), 99-125.
6. Wegmann, H., *Das Hausdorff-Maß von Cantormengen*, Math. Ann. **193** (1971), 7-20.

690, rue Filiatrault
Ste-Dorothée, Laval
Québec, H7X 2J4