Ann. sc. math. Québec, **13** (1), 1989, 39-47.

SUR LES ALGÈBRES LIBRES POUR LES CLASSES AXIOMATIQUES

MICHEL HÉBERT

RÉSUMÉ. Nous comparons les propriétés des algèbres librement engendrées avec celles des algèbres libres "au sens catégorique" (dont on n'exige pas qu'elles soient engendrées par l'ensemble sur lequel elles sont libres). Nous formulons quelques questions sur la docilité ("tractability") du foncteur d'oubli pour les classes d'algèbres et sur le rang de la monade de codensité qu'il induit, et nous donnons des réponses dans certains cas. On montre surtout que, pour les classes axiomatiques d'algèbres (finitaires), les algèbres libres sur les ensembles infinis sont (tout comme les librement engendrées) élémentairement équivalentes.

ABSTRACT. We compare the properties of the freely generated algebra and of the "categorical" free algebra (where we do not require it to be generated by the set on which it is free). We formulate some questions about the tractability of the forgetful functor in Set for classes of algebras and about the rank of the monad of codensity it induces, providing answers in particular cases. We also prove that for axiomatic classes of (finitary) algebras, free algebras on infinite sets are (as the freely generated ones) elementarily equivalent.

1. Introduction. L'algèbre universelle étant principalement axée sur l'étude des variétés, la définition d'algèbre libre habituellement considérée précise que celle-ci doit être engendrée par l'ensemble sur lequel elle est libre. J'appellerai *algèbre librement engendrée* cette structure. Dans les classes non-fermées pour la formation des sous-algèbres, cette notion est en général plus forte que celle définie par la propriété universelle désirée, laquelle sera appelée ici *algèbre libre* (tout court). On admet assez généralement que cette dernière est la plus naturelle, en particulier parce qu'elle concerne la classe elle-même plutôt que la variété qu'elle engendre. De plus, sa formulation catégorique est immédiate (en termes de "composantes" d'un adjoint au foncteur oubli dans la catégorie des ensembles Ens).

Cette distinction amène la question suivante: quelles sont les propriétés des algèbres librement engendrées que partagent les algèbres libres? Je m'intéresserai en particulier à cette propriété qu'ont les algèbres librement engendrées sur des ensembles infinis d'être élémentairement équivalentes (lorsque le type est finitaire). On verra que ceci est vrai aussi des algèbres libres si la classe est axiomatique. Une construction due à R. Fittler sera particulièrement utile pour démontrer ce fait, lequel sera également vrai pour les "structures libres", c'est-à-dire lorsqu'on permet la présence de symboles de relation.

Ce problème, on le verra, est lié à la question suivante: quelles sont les classes d'algèbres d'un type finitaire dont le foncteur oubli a une monade de codensité de rang finitaire (ou borné)?

Cet article a été rédigé à partir de résultats contenus dans la thèse de doctorat de l'auteur ([**4**]).

2. Algèbres libres et algèbres librement engendrées. Un *type* τ sera ici une classe de *symboles de fonction*. À chacun de ceux-ci est associé un cardinal, appelé son *arité*, de telle façon que pour chaque cardinal α, il n'existe qu'un *ensemble* de symboles de fonction d'arité α. Le *rang* de τ, lorsqu'il existe, est le plus petit cardinal infini régulier γ tel que l'arité de tout symbole de fonction de τ soit inférieure à γ. Lorsque τ n'a pas de rang, il

---

Reçu le 29 janvier 1987 et, sous forme révisée, le 28 avril 1988.
Avec le support financier du CRSNG (Canada) et du FCAR (Québec).

est dit *non-borné*, et lorsque son rang est ω, il est dit *finitaire* (tout cardinal est identifié à l'ordinal initial ayant sa cardinalité et ω est le plus petit cardinal infini). Sauf indication contraire, τ sera, tout au long du texte, finitaire.

On notera $L(\tau)$ le langage finitaire du premier ordre ayant comme symboles de fonction les éléments de τ. Si β est un cardinal infini, $L_\beta(\tau)$ désignera le langage dont les règles de formation des formules sont les mêmes que celles de $L(\tau)$, à ceci près qu'on permet la conjonction d'un ensemble de formules de cardinalité inférieure à β et la quantification universelle sur un ensemble de variables de cardinalité inférieure à β (dans [**1**], on note $L_{\beta\beta}(\tau)$ ce langage). En particulier, $L(\tau) = L_\omega(\tau)$. $L_\infty(\tau)$ désignera le langage dont les formules sont celles de tous les langages $L_\beta(\tau)$, pour tous les cardinaux infinis β.

Pour les définitions des notions usuelles d'algèbre universelle ((τ-) algèbre, (τ-) homomorphisme, polynômes, etc), le lecteur est renvoyé au texte classique de Grätzer [**3**]. On notera $V(\tau)$ la catégorie de toutes les (τ-) algèbres et des (τ-) homomorphismes entre elles. Une classe K de τ-algèbres sera identifiée à la sous-catégorie pleine de $V(\tau)$ dont les objets sont les éléments de K. On notera U_τ le foncteur oubli de $V(\tau)$ dans la catégorie Ens.

Soit U le foncteur oubli pour une classe K de τ-algèbres. Si α est un cardinal, une fonction $\eta_\alpha : X \to UF_\alpha$ est appelée l'*algèbre libre sur* α (pour K) si X est de cardinalité α et que pour toute fonction $f : X \to UA$, $A \in K$, il existe un unique homomorphisme f^* tel que $Uf^* \cdot \eta_\alpha = f$. Il est aisé de vérifier que si K contient autre chose que l'algèbre triviale (l'algèbre à un seul élément), alors η_α est injective. Ici, on supposera toujours que K a une algèbre non-triviale. On peut donc voir η_α comme une inclusion. Par abus de langage, on dira parfois que F_α est l'algèbre libre sur α. Clairement, U a un adjoint à gauche si et seulement si K a les algèbres libres sur tous les cardinaux. Si X engendre F_α (au sens habituel, c'est-à-dire dans $V(\tau)$), on dira que η_α est l'*algèbre librement engendrée sur* α (pour K). C'est la notion traditionnellement considérée en algèbre universelle. Elle est aussi l'algèbre libre sur α pour $V(K)$, la variété engendrée par K (dans $V(\tau)$). On peut la construire comme le quotient de l'algèbre des polynômes α-aires W^α par la relation de congruence $\theta_K(= \theta_{V(K)})$ obtenue en reliant les polynômes p et q lorsque pour tout $A \in K$, leurs interprétations p_A et q_A comme fonctions de $(UA)^\alpha$ dans UA sont les mêmes. $(UA)^\alpha$ est ici l'ensemble des fonctions de α (vu comme l'ensemble des ordinaux plus petits que lui) dans UA. Le foncteur de K dans Ens induit par composition sera noté U^α. L'algèbre librement engendrée sur α doit être l'inclusion $\{x_\gamma\}_{\gamma<\alpha} \hookrightarrow U(W^\alpha/\theta_K)$ (où les x_γ sont les variables, identifiées aux polynômes de projection habituels). Ainsi, K a l'algèbre librement engendrée sur α si et seulement si $W^\alpha/\theta_k \in K$.

Des travaux de F.W. Lawvere et F.E.J. Linton se dégage la description suivante du candidat au poste d'algèbre libre sur α pour K. Le foncteur oubli U est dit *docile* ("tractable" en anglais) *en* α si la classe $\mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$ des transformations naturelles de U^α dans U est un ensemble. U est *docile* s'il est docile en tout cardinal α. On peut montrer que la docilité de U est équivalente à l'existence d'une extension de Kan ponctuelle à droite le long de lui-même pour U (voir [**7**] et [**8**]). On notera Nat_α^U la τ-algèbre sur l'ensemble $\mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$ obtenue en interprétant un symbole de fonction β-aire F dans τ de la façon suivante: à $\langle\delta^\mu\rangle_{\mu<\beta} \in (\mathrm{Nat}(U^\alpha, U))^\beta$, la fonction $F_{\mathrm{Nat}_\alpha^U}$ fait correspondre la transformation naturelle $\delta : U^\alpha \dot{\to} U$ dont la composante δ_A sur $A \in K$ envoie $\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha} \in (UA)^\alpha$ sur l'élément $F_A(\langle\delta_A^\mu(\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha})\rangle_{\mu<\beta})$ de UA.

L'algèbre libre sur α, lorsqu'elle existe, est alors l'inclusion $\{pr_\alpha^\gamma\}_{\gamma<\alpha} \hookrightarrow U(\mathrm{Nat}_\alpha^U)$, où pr_α^γ est la projection sur la γ-ième composante. En identifiant la variable x_γ à pr_α^γ, on vérifie sans difficulté que W^α/θ_K est la sous-algèbre de Nat_α^U engendrée par $\{pr_\alpha^\gamma\}_{\gamma<\alpha}$. Ceci explique pourquoi les notions d'algèbre libre et d'algèbre librement engendrée coïncident lorsque K est fermée pour la formation des sous-algèbres.

Lorsque U est docile, on peut construire $\overline{T}_U$, la *monade de codensité de U* (voir [**7**]). Soit $\tilde{\tau}$ le type (non-borné) dont les symboles de fonction α-aires correspondent bijectivement aux éléments de $\mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$. Toute τ-algèbre A dans K a une $\tilde{\tau}$-structure canonique $\tilde{A}$ telle que tout τ-homomorphisme de A dans B (dans K) est un $\tilde{\tau}$-homomorphisme de $\tilde{A}$ dans $\tilde{B}$. On a ainsi un isomorphisme canonique (qui commute avec les foncteurs oubli) de K dans $\tilde{K}$, la sous-catégorie pleine de $V(\tilde{\tau})$ dont les objets sont les $\tilde{A}$ tels que $A \in K$. De par la nature même de $\tilde{\tau}$, l'isomorphisme fait correspondre à une algèbre libre sur α pour K l'algèbre librement engendrée sur α pour $\tilde{K}$. En fait, on peut montrer que la variété engendrée par $\tilde{K}$ est la catégorie d'Eilenberg-Moore de $\overline{T}_U$ (voir par exemple [**6**]), laquelle est notée $\mathrm{Ens}^{\overline{T}_U}$ et est aussi appelée *complétion algébrique de U* ([**8**]).

Une question intéressante ici est de savoir si pour chaque K, il existe un contexte "habituel" dans lequel toute algèbre libre pour K devient une algèbre librement engendrée. Autrement dit, existe-t-il un isomorphisme canonique de K dans une classe K' d'algèbres finitaires où les algèbres libres pour K correspondent à des algèbres librement engendrées pour K'? Par le paragraphe qui précède, c'est bien sûr le cas lorsque $\overline{T}_U$ est *de rang finitaire*, c'est-à-dire lorsque tout élément de $\mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$, pour α infini, peut être construit à partir d'un élément de $\mathrm{Nat}(U^n, U)$ et de projections (α-aires; plus précisément, lorsque pour chaque $\alpha \geq \omega$ et chaque $\delta \in \mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$, il existe $n < \omega$, $\delta' \in \mathrm{Nat}(U^n, U)$ et $\{pr_\alpha^{\zeta(0)}, \ldots, pr_\alpha^{\zeta(n-1)}\} \subseteq \{pr_\alpha^\gamma\}_{\gamma<\alpha}$ tels que $\delta = \delta'(pr_\alpha^{\zeta(0)}, \ldots, pr_\alpha^{\zeta(n-1)})$. Ceci correspond aux cas où $V(\tilde{K})(\cong \mathrm{Ens}^{\overline{T}_U})$ peut être vue comme une variété de type finitaire. C'est ce qui se produit par exemple pour la classe K des groupes uniquement divisibles (pour le type habituel $\{\cdot, 1, ()^{-1}\}$ des groupes), laquelle a toutes les algèbres libres mais pas les algèbres librement engendrées; $V(\tilde{K})$ est alors (isomorphe à) une variété de type $\{\cdot, 1, ()^{-1}, \{r_n \mid n < \omega\}\}$, où r_n est unaire et est interprété par $r_n(x) =$ l'unique y tel que $y^n = x$ (en fait on a ici $V(\tilde{K}) = \tilde{K}$, mais cela n'a rien à voir).

Mais il peut très bien arriver que $\overline{T}_U$ ne soit pas de rang finitaire, comme par exemple lorsque K est la classe des groupes nilpotents ou celle des corps (dans ce dernier cas, $\overline{T}_U$ n'a même pas de rang, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun type borné tel que $V(\tilde{K})$ soit canoniquement isomorphe à une variété d'algèbres de ce type). J'ignore s'il existe de tels cas où K a l'algèbre libre sur un cardinal infini.

Lorsque K est axiomatique (dans $L(\tau)$) et a toutes les algèbres libres, le rang de $\overline{T}_U$ est finitaire. On peut déduire ceci du fait que U préserve les colimites filtrées ([**9**]) et du fait que toute algèbre libre est colimite d'un diagramme filtré ne contenant que des algèbres libres sur des cardinaux finis. Une conséquence de ce résultat est que les algèbres libres sur des cardinaux infinis, pour une telle classe K, sont élémentairement équivalentes: en effet, l'image par l'isomorphisme canonique de F_α étant une algèbre librement engendrée (sur α) qui peut être considérée, à toute fin pratique, comme une τ'-expansion de F_α avec τ' finitaire, et l'équivalence élémentaire des algèbres librement engendrées sur des cardinaux infinis étant un fait bien connu lorsque le type est finitaire, il doit en être de même des algèbres libres. Dans la prochaine section, ce fait sera prouvé dans des conditions plus faibles en montrant l'équivalence élémentaire entre les sous-algèbres des Nat_α^U, pour les α infinis, dont les éléments sont les transformations naturelles qui sont en un certain sens "définissables" dans le langage de départ. En particulier, cela nous donnera une amélioration sensible du résultat ci-dessus: si K est une classe axiomatique (dans $L(\tau)$) ayant une algèbre libre sur un cardinal infini quelconque, alors le rang de $\overline{T}_U$ est finitaire.

3. Algèbres libres sur les cardinaux infinis. Pour faciliter le passage au contexte de la logique, remarquons le fait suivant. Pour un cardinal donné α, on considère le type $\tau_\alpha = \tau \cup \{c_\gamma\}_{\gamma<\alpha}$ où les c_γ sont de nouveaux symboles de constante (i.e. de fonction o-aires). Il est alors aisé de voir que l'inclusion $\eta_\alpha : \{y\}_{\gamma<\alpha} \hookrightarrow UF_\alpha$ est l'algèbre libre sur α pour K si et seulement si $\langle F_\alpha, \{y_\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle$ est l'objet initial de la classe K_α de toutes les τ_α-expansions des algèbres dans K (où $\langle F_\alpha, \{y_\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle$ est la τ_α-expansion de F_α obtenue en interprétant c_γ par y_γ pour chaque $\gamma < \alpha$).

L'idée de la construction suivante est de R. Fittler ([**2**]). Pour chaque cardinal α, on considère l'ensemble

$$A_\alpha^\omega = (A_\alpha^\omega)_K = \{\varphi(x) \mid K_\alpha \models \exists^1\, x\varphi(x) \text{ et } \varphi(x) \text{ est une formule pure de } L(\tau_\alpha)\}$$

où $\exists^1\, x\varphi(x)$ est une abréviation pour l'énoncé

$$\exists\, x(\varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(x) \wedge \varphi(y) \rightarrow x = y)),$$

et une *formule pure* est une formule de la forme $\exists\, X(\wedge\Psi(X,Y))$, où X et Y sont des ensembles de variables et Ψ est un ensemble de formules atomiques.

Soit maintenant la surjection canonique

$$\pi = \pi_\alpha^\omega : A_\alpha^\omega \twoheadrightarrow A_\alpha^\omega/\sim$$

dans l'ensemble quotient défini par la relation d'équivalence $\sim$, où

$$\varphi(x) \sim \varphi'(x) \text{ si et seulement si } K_\alpha \models \forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \varphi'(x)).$$

On obtient une τ_α-algèbre $I_\alpha^\omega = (I_\alpha^\omega)_K$ sur $A_a^\omega/\sim$ en définissant, pour un symbole de fonction n-aire F de τ_α,

$$F_{I_\alpha^\omega}(\pi_\alpha^\omega\varphi_0, \ldots, \pi_\alpha^\omega\varphi_{n-1}) = \pi_\alpha^\omega(\exists\, x_0 \ldots x_{n-1}(\varphi_0(x_0) \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \wedge \\ \wedge\, x = F(x_0, \ldots, x_{n-1})).$$

Si c est un symbole de constante, on a en particulier

$$c_{I_\alpha^\omega} = \pi_\alpha^\omega(x = c).$$

Par une utilisation du théorème de compacité, Fittler montre que lorsque K est axiomatique (dans $L(\tau)$) et a l'algèbre libre sur α (i.e. K_α a un objet initial), alors celle-ci doit être isomorphe à $(\overline{I_\alpha^\omega})_K$, le τ-réduit de $(I_\alpha^\omega)_K$ (en anglais "reduct"; voir [**3**]).

Notons que Fittler effectue sa construction dans le contexte plus général où τ peut avoir des symboles de relation; pour un tel symbole n-aire R, on pose que $R_{I_\alpha^\omega}(\pi_\alpha^\omega\varphi_0, \ldots, \pi_\alpha^\omega\varphi_{n-1})$ si et seulement si $K_\alpha \models \forall x_0 \ldots \forall x_{n-1}(\varphi_0(x_0) \wedge \cdots \wedge \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \rightarrow R(x_0, \ldots, x_{n-1}))$. Si les τ-homomorphismes considérés sont les τ-homomorphismes "au sens faible" (comme dans [**3**], p. 224, par exemple), le résultat (pour les "τ-structures" libres) reste vrai.

Que peut-on dire dans le cas d'une classe K quelconque (ou axiomatique dans $L_\beta(\tau)$ avec $\beta \neq \omega$)? Pour chaque cardinal infini β (et pour chaque cardinal α), on peut construire un ensemble A_α^β et une τ_α-algèbre I_α^β de la même manière que ci-dessus, en remplaçant "$L(\tau_\alpha)$" par "$L_\beta(\tau_\alpha)$". On obtient alors une chaîne de τ_α-homomorphismes injectifs

$$\langle W^\alpha/\theta_K, \{x_\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle \overset{g_\omega}{\rightarrowtail} I_\alpha^\omega \overset{g_{\omega,\beta}}{\rightarrowtail} I_\alpha^\beta \overset{g_{\beta,\lambda}}{\rightarrowtail} I_\alpha^\lambda \rightarrowtail \ldots \tag{1}$$

(pour $\omega \leq \beta \leq \lambda \ldots$) définis par

- $g_\omega([w]_{\theta_K}) = \pi^\omega_\alpha(x = w'(c_{\gamma(0)}, \ldots, c_{\gamma(n-1)}))$ où w' est un polynôme n-aire, pour un $n < \omega$ tel que $K \models \forall X(w(X) = w'(x_{\gamma(0)}, \ldots, x_{\gamma(n-1)}))$ pour un sous-ensemble $\{x_{\gamma(0)}, \ldots, x_{\gamma(n-1)}\}$ de $X = \{x_\gamma\}_{\gamma<\alpha}$ et w est un représentant quelconque de $[w]_{\theta_K}$ (un tel w' et un tel ensemble X existent toujours lorsque τ est finitaire: voir le Lemme 6, p. 43 de [**3**]).
- $g_{\omega,\beta}(\pi^\omega_\alpha\varphi) = \pi^\beta_\alpha\varphi$.
- $g_{\beta,\lambda}(\pi^\beta_\alpha\varphi) = \pi^\lambda_\alpha\varphi$, etc.

À chaque élément $\pi^\beta_\alpha\varphi$, on peut associer la transformation naturelle $\varphi\delta : U^\alpha \dot{\to} U$ dont la composante en $A \in K$ est la fonction $(\varphi\delta)_A$ qui à $\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha} \in (UA)^\alpha$ fait correspondre l'unique $a \in UA$ tel que $\langle A, \{a_\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle \models \varphi[a]$. On vérifie sans difficulté que ceci définit un τ_α-homomorphisme injectif de chacun des $(I^\beta_\alpha)_K$ dans $\langle \mathrm{Nat}^U_\alpha, \{pr^\gamma_\alpha\}_{\gamma<\alpha}\rangle$. En particulier, $A^\infty_\alpha/\sim$ est un ensemble (si U est docile en α), et ce même si A^∞_α (construite comme A^ω_α, mais en remplaçant "$L(\tau_\alpha)$" par "$L_\infty(\tau_\alpha)$") est une classe propre. La suite (1) peut donc être prolongée comme suit:

$$\cdots \rightarrowtail I^\lambda_\alpha \overset{g_{\lambda,\infty}}{\rightarrowtail} I^\infty_\alpha \overset{g_{\infty,\eta}}{\rightarrowtail} \langle \mathrm{Nat}^U_\alpha, \{pr^\gamma_\alpha\}_{\gamma<\alpha}\rangle. \tag{2}$$

où $g_{\infty,\eta}(\pi^\infty_\alpha\varphi) = \varphi\delta$.

Si K est axiomatisable dans $L_\beta(\tau)$ pour quelque β (et τ borné), on peut déduire du théorème de Lowenheim-Skolem-Tarski vers le bas (Théorème 3.4.1 de [**1**]) que son foncteur oubli est docile. J'ignore ce qu'il en est en général (avec τ borné). Pour le reste du texte, les foncteurs oubli seront supposés dociles.

Chaque τ_α-algèbre $A' = \langle A, \{a_\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle$, $A \in K$, dans K_α donne lieu à un τ_α-homomorphisme $g_{A'} : \langle \mathrm{Nat}^U_\alpha, \{pr^\gamma_\alpha\}_{\gamma<\alpha}\rangle \to A'$ défini par $g_{A'}(\varphi\delta) = (\varphi\delta)_A(\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha})$. Si on note g l'homomorphisme de $\langle W^\alpha/\theta_K, \{x_\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle$ dans $\langle \mathrm{Nat}^U_\alpha, \{pr^\gamma_\alpha\}_{\gamma<\alpha}\rangle$ constitué de la composition des homomorphismes de (1) et (2), $g_{A'} \cdot g$ est unique comme homomorphisme de $\langle W^\alpha/\theta_K, \{x_\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle$ dans A', puisque $\{x_\gamma\}_{\gamma<\alpha} \hookrightarrow U_\tau W^\alpha/\theta_K$ est l'algèbre libre sur α pour $V(K)$. Il faut cependant noter que $g_{A'}$ n'est pas forcément unique (comme homomorphisme de $\langle \mathrm{Nat}^U_\alpha, \{pr^\gamma_\alpha\}_{\gamma<\alpha}\rangle$ dans A'), ni aucun des composés $(g_{A'} \cdot g_{\infty,\eta} \cdot g_{\lambda,\eta})$ d'ailleurs, de sorte qu'on peut distinguer deux façons pour K de *ne pas* avoir l'algèbre libre sur α: une façon "structurale" (lorsque $g_{A'}$ n'est pas unique pour quelque $A' \in K$; un exemple d'un tel cas est facile à construire: voir par exemple l'appendice E de [4]) et une façon "superficielle". Cette terminologie est justifiée par le fait que la deuxième possibilité correspond précisément au cas où le fait d'ajouter la τ-algèbre Nat^U_α à K comble la lacune:

PROPOSITION 1. *Soit K une classe de τ-algèbres dont le foncteur oubli est docile en un cardinal α, et soit U' le foncteur oubli pour K', la plus petite sous-catégorie pleine et fermée pour les isomorphismes de $V(\tau)$ contenant K et Nat^U_α. Les énoncés suivants sont équivalents:*

a) *Pour toute fonction $f : \{pr^\gamma_\alpha\}_{\gamma<\alpha} \to UA$, $A \in K$, l'homomorphisme $f^* : \mathrm{Nat}^U_\alpha \to A$, défini par $f^*(\delta) = \delta_A(\langle f(pr^\gamma_\alpha)\rangle_{\gamma<\alpha})$ est unique tel que $Uf^*(pr^\gamma_\alpha) = f(pr^\gamma_\alpha)$ pour tout $\gamma < \alpha$.*
b) *$\eta'_\alpha : \{pr^\gamma_\alpha\}_{\gamma<\alpha} \hookrightarrow U'(\mathrm{Nat}^U_\alpha)$ est l'algèbre libre sur α pour K'.*
c) *La fonction de $\mathrm{Nat}((U')^\alpha, U')$ dans $\mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$ définie par restriction est une bijection.*

PREUVE:

b) $\Rightarrow$ c). Aisé.

c) $\Rightarrow$ a). La bijection en question est en fait un isomorphisme de $\mathrm{Nat}_\alpha^{U'}$ dans Nat_α^U. Comme cette dernière est dans K', l'inclusion $\{pr_\alpha^\gamma\}_{\gamma<\alpha} \hookrightarrow U'(\mathrm{Nat}_\alpha^U)$ doit être l'algèbre libre sur α pour K'.

a) $\Rightarrow$ b). Il suffit de montrer que toute fonction $f : \{pr_\alpha^\gamma\}_{\gamma<\alpha} \hookrightarrow U'(\mathrm{Nat}_\alpha^U)$ relève en un unique endomorphisme f^* de Nat_α^U tel que $U'f^* \cdot \eta'_\alpha = f$. Autrement dit, que pour tout $\langle\delta^\gamma\rangle_{\gamma<\alpha} \in (\mathrm{Nat}(U^\alpha, U))^\alpha$, $g_{\langle \mathrm{Nat}_\alpha^U, \{\delta^\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle}$ (qu'on notera $\overline{g}$, simplement) est unique comme τ_α-homomorphisme de $\langle \mathrm{Nat}_\alpha^U, \{pr_\alpha^\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle$ dans $\langle \mathrm{Nat}_\alpha^U, \{\delta^\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle$. Supposons au contraire qu'il en existe un autre, disons h, tel que $h(\delta) \neq \overline{g}(\delta)$ pour un $\delta \in \mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$. Comme $\overline{g}(\delta) = \delta(\langle\delta^\gamma\rangle_{\gamma<\alpha})$, il existe donc $A \in K$ tel que pour un $\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha} \in (UA)^\alpha$, on a

$$(h(\delta))_A(\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha}) \neq \delta_A(\langle(\delta^\gamma)_A(\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha})\rangle_{\gamma<\alpha}).$$

Considérons la fonction $k : \mathrm{Nat}(U^\alpha, U) \to UA$ définie par $k(\delta') = (h(\delta'))_A(\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha})$. On peut vérifier directement que k est un τ_α-homomorphisme de $\langle \mathrm{Nat}_\alpha^U, \{pr_\alpha^\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle$ dans $\langle A, \{\delta_A(\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha})\}\rangle$. Or, $k \neq g_{\langle A, \{\delta_A^\gamma(\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha})\}_{\gamma<\alpha}\rangle}$, car $k(\delta) = (h(\delta))_A(\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha})$, ce qui contredit a). □

DÉFINITION 2. Une classe K de τ-algèbres sera dite *libérable en* α si elle vérifie les énoncés de la Proposition 1.

LEMME 3. *Si K est libérable en α, alors il existe un cardinal β pour lequel $(g_{\infty,\eta} \cdot g_{\beta,\infty})$ (voir (2)) est un isomorphisme.*

PREUVE: Ordonnons l'ensemble $\mathrm{Nat}(U^\alpha, U) = \{\delta^\gamma\}_{\gamma<\mu}$ et considérons, pour chaque $\zeta < \mu$, la formule $\varphi_\zeta(x_\zeta)$ de $L_\infty(\tau_\alpha)$ suivante:

$$\exists X(\wedge(F(x_{\gamma(0)}, \ldots, x_{\gamma(n)}) = x_{\gamma(n+1)})$$

où $X = \{\{x_\gamma\}_{\gamma<\mu} \setminus x_\zeta\}$ et la conjonction porte sur toutes les expressions telles que $F \in \tau_\alpha$ et $F_{\langle \mathrm{Nat}_\alpha^U, \{pr_\alpha^\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle}(\delta^{\gamma(0)}, \ldots, \delta^{\gamma(n)}) = \delta^{\gamma(n+1)}$. La formule $\varphi_\zeta(x_\zeta)$ est une formule pure de $L_\beta(\tau_\alpha)$ pour un cardinal β, et il est clair que $\langle \mathrm{Nat}_\alpha^U, \{pr_\alpha^\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle \models \varphi_\zeta[\delta^\zeta]$.

De plus, pour chaque $A' = \langle A, \{a_\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle \in K_\alpha$, l'existence de $g_{A'}$ implique que $A' \models \varphi_\zeta[\delta_A^\zeta(\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha})]$. On veut montrer que $\delta_A^\zeta(\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha})$ est l'unique élément de UA à vérifier cette propriété.

Supposons au contraire que $A' \models \varphi_\zeta[a]$ pour $a \neq \delta^\zeta(\langle a_\gamma\rangle_{\gamma<\alpha})$. Il existe alors $\{a'_\gamma\}_{\gamma<\alpha} \in (UA)^\mu$ tel que $a'_\zeta = a$ et

$$A' \models \wedge(F(x_{\gamma(0)}, \ldots, x_{\gamma(n)}) = x_{\gamma(n+1)})[\{a'_\gamma\}_{\gamma<\mu}].$$

La fonction $h : \mathrm{Nat}(U^\alpha, U) \to UA$ définie par $h(\delta^\gamma) = a'_\gamma$, $\gamma < \mu$, est alors un τ_α-homomorphisme de $\langle \mathrm{Nat}_\alpha^U, \{pr_\alpha^\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle$ dans A' distinct de $g_{A'}$, ce qui contredit le fait que K soit libérable en α.

Donc, pour chaque $\zeta < \mu$, on a $K_\alpha \models \exists^1 x_\zeta(\varphi_\zeta(x_\zeta))$, i.e. $\varphi_\zeta(x_\zeta) \in (A_\alpha^\beta)$. Ce qui précède montre que $g_{\beta,\eta}(\pi_\alpha^\beta(\varphi_\zeta)) = \delta^\zeta$, et donc que $g_{\beta,\eta}$ est surjectif. □

Une modification évidente de la Preuve du Lemme 3 la rend valable dans le cas où τ est un type borné quelconque.

Si $A \in V(\tau_\alpha)$, on notera $\overline{A}$ son τ-réduit. Si Σ est un ensemble d'énoncés, $M(\Sigma)$ désignera sa classe de modèles. Si K est une classe de τ-algèbres et β est un cardinal infini, $Th^\beta(K)$ sera l'ensemble des énoncés de $L_\beta(\tau)$ vérifiés par tous les éléments de K. L'algèbre libre sur α pour K sera notée $(F_\alpha)_K$.

PROPOSITION 4. *Soit K une classe de τ-algèbres et α un cardinal. Alors*

a) *K a l'algèbre libre sur α si et seulement s'il existe un cardinal β tel que $(\overline{I_\alpha^\beta}) \in K$. Dans ce cas, on a*

$$(F_\alpha)_K \cong (F_\alpha)_{M(Th^\beta(K))} \cong (\overline{I_\alpha^\gamma})_K \cong (\overline{I_\alpha^\infty})_K \text{ pour tout } \gamma \geq \beta.$$

b) *(Fittler [2]) Si K est axiomatique (dans $L(\tau)$), alors K a l'algèbre libre sur α si et seulement si $(\overline{I_\alpha^\omega}) \in K$.*

PREUVE: a) On a déjà souligné que l'algèbre libre sur α pour K, lorsqu'elle existe, doit être l'inclusion $\{pr_\alpha^\gamma\}_{\gamma<\alpha} \hookrightarrow U(\mathrm{Nat}_\alpha^U)$. Le Lemme 3 prouve donc la nécessité. Inversement, on voit aisément que si (I_α^β) est dans K_α, alors $(I_\alpha^\beta) \models \varphi[\pi\varphi]$ pour tout $\varphi \in A_\alpha^\beta$. Il suit que le seul τ_α-homomorphisme de I_α^β dans $A' \in K_\alpha$ est $(g_{A'} \cdot g_{\infty,\eta} \cdot g_{\beta,\infty})$. La deuxième phrase résulte de l'existence de la chaîne (1)–(2) et du fait que $(I_\alpha^\beta)_K$, par sa construction même, est aussi $(I_\alpha^\beta)_{M(Th^\beta(K))}$. □

Si K a l'algèbre libre sur α, notons $c(\alpha)$ le plus petit cardinal β tel que $(I_\alpha^\beta) \in K_\alpha$. La partie a) de la Proposition 4 montre que $c(\alpha)$ est une borne inférieure pour la "zone d'influence" de $(F_\alpha)_K$, en ce sens que $(F_\alpha)_K$ est aussi l'algèbre libre pour $M(Th^{c(\alpha)}(K))$. Dans cette ligne de pensée, le fait que $(F_\alpha)_K$, si elle existe, doit être isomorphe à $(I_\alpha^\infty)_K$ est consistant avec le fait que $M(Th^\infty(K)) = K$. Plus on cherche l'algèbre libre à gauche dans la chaîne (1)–(2), donc, plus on est ambitieux (plus on cherche l'algèbre libre pour une grande classe); à gauche complètement, W^α/θ_K correspond, comme on sait, à $M(Id(K)) = V(K)$ (où $Id(K)$ est l'ensemble des identités vérifiées par tout $A \in K$).

La partie b) de la Proposition 4 nous dit que si $\beta = \omega$, on a aussi l'inverse, i.e. si $(F_\alpha)_K$ existe et est aussi l'algèbre libre pour $M(Th^\omega(K))$, alors c'est $(\overline{I_\alpha^\omega})_K$ (et donc $c(\alpha) = \omega$). La preuve de Fittler utilise le théorème de compacité et j'ignore si son résultat est également vrai pour un cardinal β infini quelconque (non fortement compact). L'exemple suivant montre en tout cas que l'algèbre libre sur α pour K n'est pas toujours $(\overline{I_\alpha^\omega})_K$.

EXEMPLE 5. *Une classe K dont l'algèbre libre sur 0 n'est pas $(\overline{I_0^\omega})_K$.* Soit $\tau = \{0, 1, +, \cdot\}$, où 0 et 1 sont nullaires et $+$ et $\cdot$ sont binaires. Soit K la plus petite sous-catégorie pleine et fermée pour les isomorphismes contenant $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels munie de sa τ-structure habituelle suggérée par la notation. Il est facile de vérifier que l'identité est le seul τ-endomorphisme de $\mathbb{R}$, et donc que $\mathbb{R}$ est l'algèbre libre sur 0 pour K. De la Proposition 4, on déduit que $\mathbb{R} = (I_0^\beta)_K$ pour un cardinal infini β. Mais $\beta = \omega$ est impossible, puisque $|(A_0^\omega)_K/\sim| \leq \|L(\tau)\| = \omega < |\mathbb{R}|$ (où $\|L(\tau)\|$ est la cardinalité de l'ensemble des formules de $L(\tau)$).

On peut voir $c(\alpha)$ autrement qu'en termes de "zone d'influence" de l'algèbre libre:

PROPOSITION 6. *Soit K une classe de τ-algèbres, U son foncteur oubli. Si $(I_\alpha^\beta)_K \in K_\alpha$ avec β régulier, alors pour tout $\delta \in \mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$, il existe $\sigma < \beta$, $\{pr_\alpha^{\gamma(\mu)}\}_{\mu<\sigma} \subset \{pr_\alpha^\gamma\}_{\gamma<\alpha}$ et $\delta' \in \mathrm{Nat}(U^\sigma, U)$ tels que $\delta = \delta'(\{pr_\alpha^{\gamma(\mu)}\}_{\mu<\sigma})$. En particulier, s'il existe un cardinal régulier β tel que $(I_\alpha^\beta)_K \in K_\alpha$ pour des ordinaux aussi grands qu'on veut, alors $\mathrm{rang}(\overline{T}_U) \leq \beta$.*

PREUVE: Si $\beta > \alpha$, c'est trivial. On supposera donc que $\beta \leq \alpha$.

Le fait que $(I_\alpha^\beta)_K$ soit dans K_α entraîne que $g_{\infty,\eta} \cdot g_{\beta,\infty}$ dans (1)-(2) est un isomorphisme de $(I_\alpha^\beta)_K$ dans $\langle \mathrm{Nat}_\alpha^U, \{pr_\alpha^\gamma\}_{\gamma<\alpha}\rangle$. Pour $\delta \in \mathrm{Nat}(U^\alpha, U)$, il existe donc $\varphi(x) \in (A_\alpha^\beta)_K$ tel que $\delta = \varphi\delta$ (voir plus haut). Par définition de $L_\beta(\tau_\alpha)$, les symboles de $\tau_\alpha \backslash \tau$ apparaissant dans $\varphi(x)$ sont contenus dans un sous-ensemble $\{c_{\gamma(\mu)}\}_{\mu<\sigma}$ de $\{c_\gamma\}_{\gamma<\alpha}$ pour un

$\sigma < \alpha$. La définition de $(g_{\infty,\eta} \cdot g_{\beta,\eta})$ indique alors que $\varphi\delta = \delta'(\{pr_\alpha^{\gamma(\mu)}\}_{\mu<\sigma})$ pour un $\delta' \in \mathrm{Nat}(U^\sigma, U)$. □

La Proposition 6 suggère la question suivante: pour quelles classes K de τ-algèbres existe-t-il un cardinal β tel que $c(\alpha) \leq \beta$ pour tout cardinal α?

La Proposition suivante généralise un théorème de R. Vaught ([**3**], p. 237) qui établit que les algèbres librement engendrées sur des cardinaux infinis (pour une classe de τ-algèbres avec τ de rang finitaire) sont élémentairement équivalentes. Ici on s'intéresse à des objets plus généraux en ce sens que les $(\overline{I_\alpha^\beta})$ ne sont pas forcément des algèbres libres (encore moins des algèbres librement engendrées). Si A et B sont des τ-algèbres, on écrira $A \underset{\rho}{\prec} B$ (B est une *extension ρ-élémentaire* de A) s'il existe un homomorphisme (injectif) $h : A \to B$ tel que pour toute formule φ de $L_\rho(\tau)$, $A \models \varphi[\{a_\gamma\}_{\gamma<\mu}]$ implique $B \models \varphi[\{h(a_\gamma)\}_{\gamma<\mu}]$.

PROPOSITION 7. *Soit K une classe de τ-algèbres et ρ un cardinal régulier. Alors*

$$(\overline{I_\alpha^\beta})_K \underset{\rho}{\prec} (\overline{I_\lambda^\beta})_K$$

pour tous les cardinaux α, λ, β tels que $\omega \leq \beta \leq \rho \leq \alpha \leq \lambda$.

PREUVE: La preuve de Vaught repose essentiellement sur la propriété universelle des algèbres libres et sur le fait que tout élément de W^α/θ_K, avec $\alpha \geq \omega$, doit être dans une sous-algèbre de W^α/θ_K engendrée par un sous-ensemble *fini* de $\{x_\gamma\}_{\gamma<\alpha}$.

Les propriétés qu'on a ici sont strictement plus faibles mais s'avéreront suffisantes: toute endofonction f de $\{c_\gamma\}_{\gamma<\lambda}$ induit un τ-homomorphisme $f^* : \overline{I_\lambda^\beta} \to \overline{I_\lambda^\beta}$ défini par $f^*(\pi_\gamma^\beta\varphi) = \pi_\lambda^\beta\varphi'$, où φ' est obtenu de φ en remplaçant chaque occurrence de c_γ dans φ par $f(c_\gamma)$ (pour tout $\gamma < \lambda$). De plus, f^* est un automorphisme si f est bijectif. Finalement, même s'il peut exister un élément $\pi_\alpha^\beta\varphi$ de $U_\tau(\overline{I_\alpha^\beta})$ qui ne soit dans aucune sous-algèbre de $(\overline{I_\alpha^\beta})$ engendrée par un sous-ensemble de $\{\pi_\alpha^\beta(x = c_\gamma)\}_{\gamma<\alpha}$ de cardinalité inférieure à ρ, l'ensemble des c_γ apparaissant dans l'un quelconque des représentants de la classe d'équivalence $\pi_\alpha^\beta\varphi$ doit être de cardinalité inférieure à ρ (par régularité de ρ).

On peut supposer $\tau_\alpha \subset \tau_\lambda$, et on veut montrer que la fonction $h : (\overline{I_\alpha^\beta}) \to (\overline{I_\lambda^\beta})$, définie par $h(\pi_\alpha^\beta\varphi) = \pi_\lambda^\beta\varphi$, constitue une extension ρ-élémentaire. Par l'analogue du Théorème 2, p. 236 de [**3**], il suffit de montrer que pour toute formule $\psi(Y, Z)$ dans $L_\rho(\tau)$ telle que, pour un ensemble $\{\pi_\alpha^\beta\varphi_z\}_{z\in Z}$, on aît

$$(\overline{I_\lambda^\beta}) \models \exists Y\psi[\{h(\pi_\alpha^\beta\varphi_z)\}_{z\in Z}],$$

il doit exister un ensemble $\{\pi_\alpha^\beta\varphi'_y\}_{y\in Y}$ tel que

$$(\overline{I_\lambda^\beta}) \models \psi[\{h(\pi_\alpha^\beta\varphi_z)\}_{z\in Z}, \{h(\pi_\alpha^\beta\varphi'_y)\}_{y\in Y}].$$

Soit $\{\varphi_z\}_{z\in Z}$ un ensemble de représentants des classes d'équivalence $\{\pi_\alpha^\beta\varphi_z\}_{z\in Z}$ et soit $\{\varphi''_y\}_{y\in Y}$ un ensemble de représentants pour un ensemble de classe d'équivalence $\{\pi_\lambda^\beta\varphi''_y\}_{y\in Y}$ tel que

$$(\overline{I_\lambda^\beta}) \models \psi[\{h(\pi_\alpha^\beta\varphi_z)\}_{z\in Z}, \{\pi_\lambda^\beta\varphi''_y\}_{y\in Y}].$$

Soient $\{c_{\zeta(\mu)}\}_{\mu<\beta'}$ et $\{c_{\xi(\nu)}\}_{\nu<\beta''}$ respectivement les sous-ensembles de $\{c_\gamma\}_{\gamma<\alpha}$ et $\{c_\gamma\}_{\gamma<\lambda}$ dont les éléments sont présents respectivement dans $\{\varphi_z\}_{z\in Z}$ et $\{\varphi''_y\}_{y\in Y}$. Par régularité de ρ, on a β', $\beta'' < \rho$, et donc on peut trouver une permutation f de $\{c_\gamma\}_{\gamma<\lambda}$ qui garde fixes les éléments de $\{c_{\zeta(\mu)}\}_{\mu<\beta'}$ et qui envoie chaque élément de $\{c_{\xi(\nu)}\}_{\nu<\beta''}$ dans $\{c_\gamma\}_{\gamma<\alpha}$. Une telle permutation induit un τ-endomorphisme f^* de $(\overline{I^\beta_\lambda})$ (comme plus haut), d'où on a

$$(\overline{I^\beta_\lambda}) \models \psi[\{f^*h(\pi^\beta_\alpha\varphi_z)\}_{z\in Z},\ \{f^*(\pi^\beta_\lambda\varphi''_y)\}_{y\in Y}].$$

Or, $f^*h(\pi^\beta_\alpha\varphi_z) = h(\pi^\beta_\alpha\varphi_z)$ pour tout $z \in Z$ et $f^*(\pi^\beta_\lambda\varphi''_y) = \pi^\beta_\lambda f^*(\varphi''_y) = h(\pi^\beta_\alpha(f^*(\varphi''_y)))$ puisque $f^*(\varphi''_y) \in L_\rho(\tau_\alpha)$. On a donc le résultat en posant $\varphi'_y = f^*(\varphi''_y)$ pour chaque $y \in Y$. □

La Proposition 7 est vérifiée également si τ a des symboles de relation, de même que le corollaire suivant:

COROLLAIRE 8. *Soit K une classe de τ-algèbres axiomatisable dans $L_\beta(\tau)$, β un cardinal régulier, et soit U son foncteur oubli. Si $(\overline{I^\beta_\alpha}) \in K$ pour un $\alpha \geq \beta$, alors les algèbres libres pour K sur les cardinaux $\geq \beta$ existent toutes et forment une chaîne β-élémentaire; de plus, rang $(\overline{T}_U) \leq \beta$. Ceci est toujours le cas lorsque $\beta = \omega$ et que K a l'algèbre libre sur un cardinal infini quelconque.*

PREUVE: Par la Proposition 7, on a $(\overline{I^\beta_\alpha}) \underset{\beta}{\prec} (\overline{I^\beta_\gamma}) \underset{\beta}{\prec} (\overline{I^\beta_\lambda})$ si $\beta \leq \alpha \leq \gamma \leq \lambda$. L'hypothèse implique donc que chacune de ces algèbres est dans K, d'où le résultat par la Proposition 5a). La Proposition 6 assure que le rang de $\overline{T}_U$ existe et est $\leq \beta$. La dernière phrase découle de la Proposition 5b). □

Ainsi, les algèbres libres sur des cardinaux infinis pour une classe axiomatique (dans $L(\tau)$) sont élémentairement équivalentes. J'ignore ce qu'il en est des classes quelconques. Il n'est pas surprenant que, pour les algèbres librement engendrées, ce résultat soit vrai pour une classe quelconque, car une algèbre librement engendrée pour K est toujours une algèbre libre pour une classe axiomatique, en l'occurrence $V(K)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. M.A. Dickmann, "Large Infinitary Languages," North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1975.
2. R. Fittler, *Categories of Models With Initial Objects*, in "Category Theory, Homology Theory and Their Applications I, Lecture Notes in Math.," Springer-Verlag, Berlin, 1969.
3. G. Grätzer, "Universal Algebra," Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.
4. M. Hébert, "Sur la nature et l'existence des algèbres libres," Thèse, Université Laval, Québec, 1984.
5. F.E.J. Linton, *Some Aspects of Equational Categories*, in "Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, 1965," Springer-Verlag, Berlin, New York, 1966.
6. F.E.J. Linton, *Applied Functorial Semantics*, in "Seminar on Triples and Categorical Homology Theory, Lecture Notes 80," Springer-Verlag, Berlin, 1969.
7. S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Math. **5** (1971), Springer-Verlag, New York, Berlin.
8. E.G. Manes, *Algebraic Theories*, Graduate Texts in Math. **26** (1976), Springer-Verlag, New York, Berlin.
9. M. Richter, *Limite in Kategorien von Relationalsystemen*, Zeits. f. Math. Logik und Grund. d. Math. **17** (1971), 75-90.
10. J. Rosicky, *Concrete Categories and Infinitary Languages*, J. of Pure Appl. Alg. **22** (1981), 301-339.

Department of Mathematics
McGill University
Montreal, Quebec, Canada

Département de mathématiques, statistique et actuariat
Université Laval
Québec, Québec, Canada